Chapitre III : Statique

III.1.Introduction

La statique est la partie de la mécanique rationnelle, qui étudie les forces qui s'exercent sur un objet en équilibre et au repos. On peut, par exemple, déterminer les forces qui interviennent sur les éléments de structure d'une construction tels qu'un pont ou un bâtiment ou encore celles qui s'exercent sur des structures biologiques comme les mâchoires, les membres ou le squelette. La statique permet aussi d'évaluer l'avantage de mécanique obtenu au moyen de machines simples comme, par exemple, les leviers qui interviennent dans le corps humain.

III.2.Notion principales sur la statique

III.2.1.solide parfait

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels ,on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable)

III.2.2.Equilibre

Le principal objectif de la statique est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'état d'équilibre aux ouvrages du génie. Quand un corps et en équilibre, le torseur résultant des forces extérieures qui agissent sur lui est nul, donc la force résultante et le moment en tout point sont nuls.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et } \vec{M}_0 = \sum \vec{M} = \vec{0} \qquad \text{(III-01)}$$

Ces deux égalités sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre.

A L'équilibre en deux dimensions:

III.2.2.1. Isolation des systèmes mécaniques

Avant de passer a l'application des équations d'équilibres, il est essentiel de définir avec précision le corps ou le système mécanique qui doit être analysé afin de pouvoir représenter clairement et complètement toutes les forces extérieures qui agissent sur lui. L'omission d'une force ou l'inclusion d'une force qui n'agit pas sur le corps en question aboutiraient à des résultats erronés. Un système mécanique est défini comme un corps ou un jeu de corps qu'il est possible de dissocier de tous les autres corps environnantes. Un tel système est: soit un corps unique ou un ensemble de corps connectés.

Des que nous avons fait notre choix sur le corps ou l'ensemble de corps que l'on veut analyser, on isole ce corps ou cet ensemble de corps de tous les autres corps ou éléments avec lequel il est en contact. On trace ensuite le schéma du corps libéré sur lequel on applique toutes les forces extérieures qui agissent sur lui. C'est seulement après avoir tracé avec précision ce diagramme que l'on applique les équations d'équilibre de la statique.

III.3. Conditions d'équilibre

L'équilibre est réalisé quand la force résultante $\vec{R}$ et le moment résultant $\vec{M}$ sont tous les deux (2) nuls: $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$ (III-02)

III.3. a.cas particulier d'équilibre: (voir tableau)

Equilibre d'un corps soumis à seulement deux forces

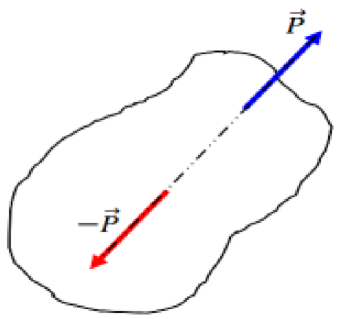


Fig.III.1a. L' équilibre de deux Forces

Equilibre d'un corps soumis à l'action de trois forces. Elles doivent être concourantes et le triangle des forces est fermé.

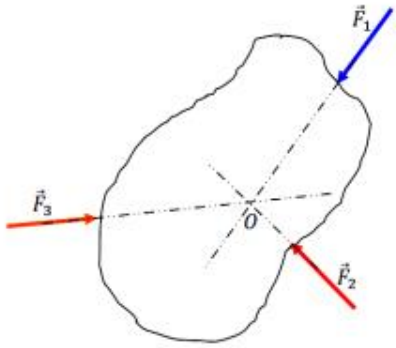


Fig.III.1b. L' équilibre de trois Forces

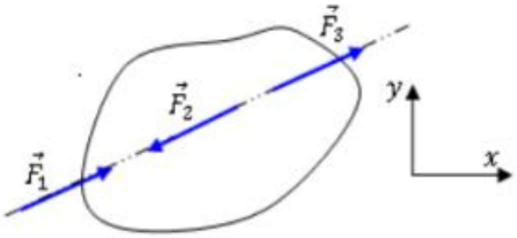
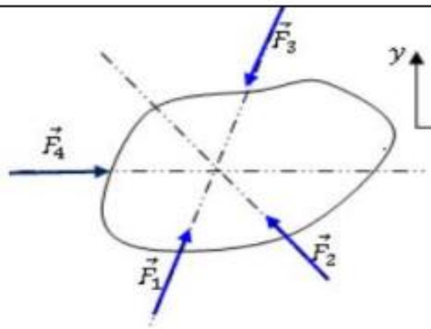
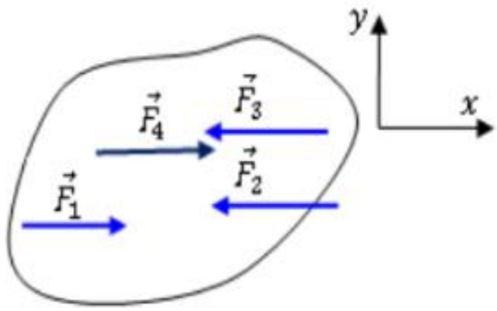
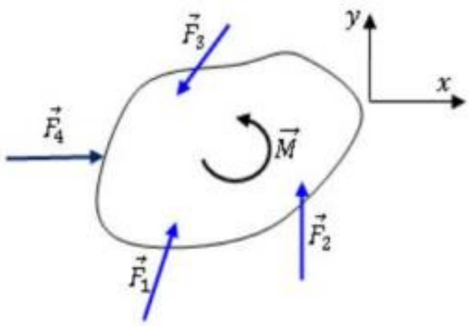
Systèmes de forces	Schéma du corps isolé	Equations indépendantes
1- colinéaires		$\sum F_x = 0$
2- Concourantes a un point		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$
3- parallèles		$\sum F_x = 0$ $\sum M_Z = 0$
4- système général		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_Z = 0$

Tableau III.1. D'équilibre en deux dimensions

* Une particule soumise à deux forces est en équilibre statique si les deux forces ont le même module, la même direction mais de sens opposé tel que leur résultante, soit nulle

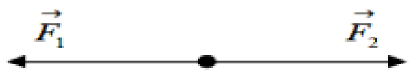


Fig.III.2. L' équilibre statique de deux forces

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}, \; F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \qquad \text{(III-03)}$$

III.4.Système de forces

Un système de forces, c'est un ensemble de forces agissant sur un corps solide. Si le corps reste toujours au repos sous l'action d'une système de force, le système est appelé système d'équilibre.

Système d'équivalent: Si deux systèmes de forces $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ et $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots$ appliquè au solide sont dit équivalents s'ils se laissent réduire l'un à l'autre.

Un système de forces équivalent à zéro.

III. 5.Principe de la statique

On demande de toutes les théorie et les équations de la statique à partir de plusieurs suppositions quant accepte sans démonstration, et qu'on appelle l'action.

III.6. Axiomes de la statique

III.6.1. Axiome1

Pour deux forces appliqués à un solide parfait se trouve en équilibre ,il faut et il suffit quelles soient de module égal, de sens contraire et portes sur la même droites.

$F_1 = F_2$

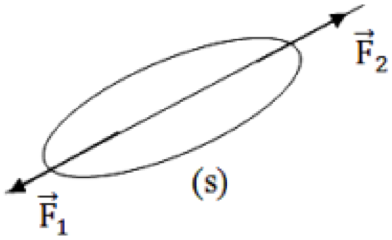


Fig.III.3. L' équilibre de deux forces

III.6.2.Axiome2

Un système de forces appliqué à un solide parfait reste en équilibre ,si on ajoute ou en relève un système de forces d'équilibre.

III.6.3.Axiome3

Les forces exercées par deux solide l'un sur autre doivent être de même module, même support et de sens opposées pour réserver l'équilibre.

III.6.4.Axiome4

Si un système de forces données est équilibré sur un solide ,il reste équilibré sur tout autre solide.

III.6.5.Axiome5

Si un corps déformable se trouve en équilibre ,il reste aussi après la solidification.

III.7. Liaison et réaction

III.7.1. Définition

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction par contre le solide est lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels rigide qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons, et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons. La direction de vecteur réaction $\vec{R}$ dépend de la surface de contacte :

III.7.2. Liaisons sans frottements

Dans le cas d'une liaison sans frottement (surface lisse) entre un solide et un plan, la réaction est toujours suivant la normale au plan de contact quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide.

Dans le cas d'un contact ponctuels sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce point : $\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ (III-04)

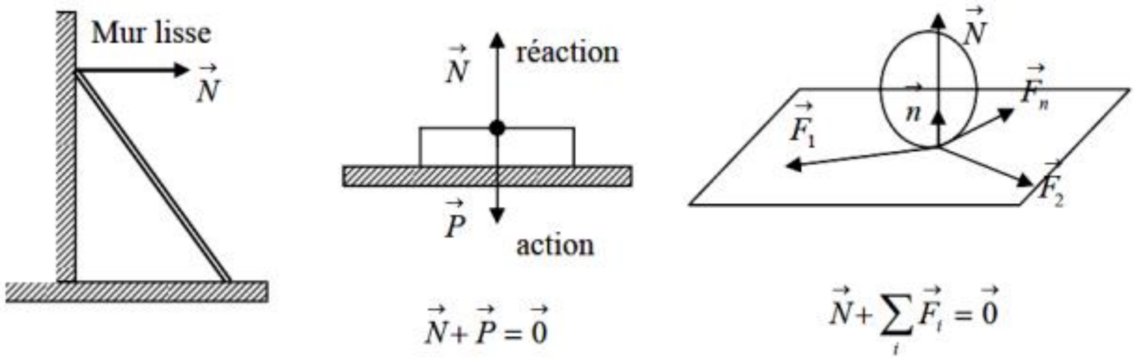


Fig.III.4. Liaisons sans frottements

III.7.3. Liaisons entre solides avec frottement

La figure .1b représente un corps en état d'équilibre statique. La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids du corps. Appliquons graduellement en un point de ce corps une force horizontale $\vec{F}$ (fig.III.5 : b.2). il existe alors une contre force $\vec{T}$ qui équilibre et s'oppose à cette force $\vec{F}$.

$\vec{T}$: est appelée force de frottement statique.

Elle résulte d'un grand nombre de paramètres liés aux états de surfaces, à la nature des matériaux et aux forces de contact entre la pièce et la surface considérée.

Dans le cas d'une surface avec frottements (fig.III.5 : b.3), la condition d'équilibre s'écrira:

$\vec{N} + \vec{T} + \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$ (la somme des actions et des réactions, est nulle) (III-05)

soit μ_0 :Le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact)* nous pouvons écrire :

* Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| < \mu_0 |\vec{N}|$ (III-06)

*A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu_0 |\vec{N}|$, $\mu_0 = \tan\varphi = \frac{\vec{T}_m}{|\vec{N}|}$ (III-07)

La force de frottement $\vec{T}$ est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle φ est appelé angle de frottement statique.

Si $\vec{F} > \vec{T}_m$ le solide se met en mouvement de glissement sur la surface.

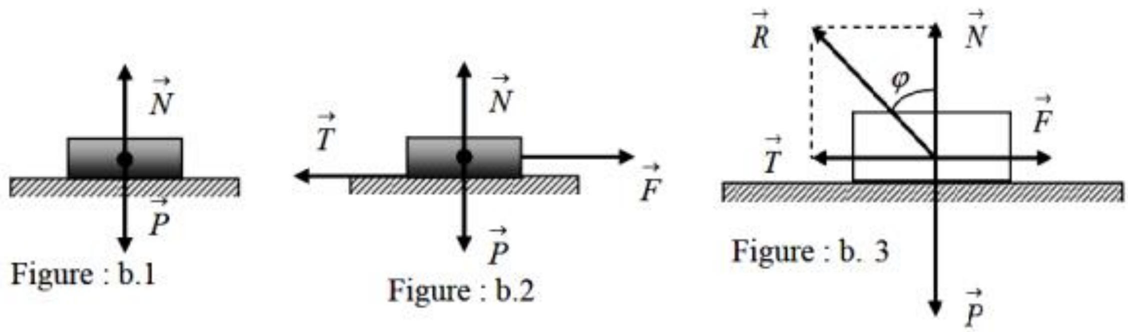


Fig.III. 5. Liaisons avec frottements

III.8. Type de liaison

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, etc.

Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est généralement négligeable.

III.8.1. Liaison ponctuelle (Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse) :

Le solide repose simplement sur une surface polie dont la réaction est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui.

Dans ce type de liaison l'appui du solide est soit :

III.8.1.a. Simple

le solide repose sur un substrat horizontal, vertical où incliné de façon permanente en un seul point de contacte quelque soit la forme du solide (S)

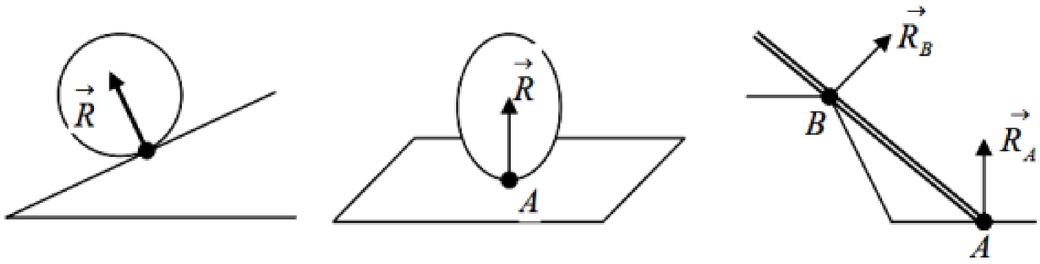


Fig.III.6. Liaisons ponctuelle

III.8.2. Articulation d'un solide

Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

III.8.2.1. Liaison verrou (Articulation cylindrique)

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S_1) a deux degrés de liberté par rapport au solide(S_2) : Une translation suivant l'axe A_z, et une rotation autour du même axe.

$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$ avec $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$ (La réaction suivant l'axe de l'articulation R_{Az} est nulle). (III-08)

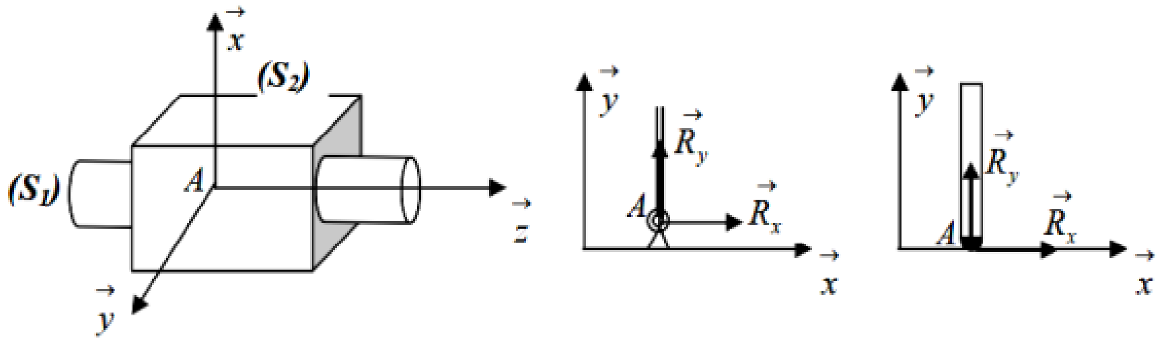


Fig.III.7. Liaison verrou (Articulation cylindrique)

III.8.2.2. Liaison rotule (Articulation sphérique)

le solide peut bouger dans tous les sens de l'espace en restant en contacte avec un autre solide comme celles de l'épaule, la hanche humain, les attelages de caravane, les billettes. La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes :

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az} \qquad \text{(III-09)}$$

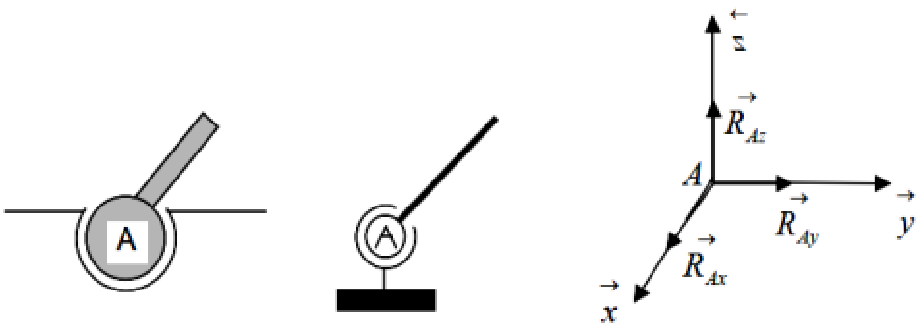


Fig.III.8. Liaison rotule (Articulation sphérique)

III.8.2.3. Encastrement d'un solide

On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$: la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point *A*

$\vec{M}_{/A}$: le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A

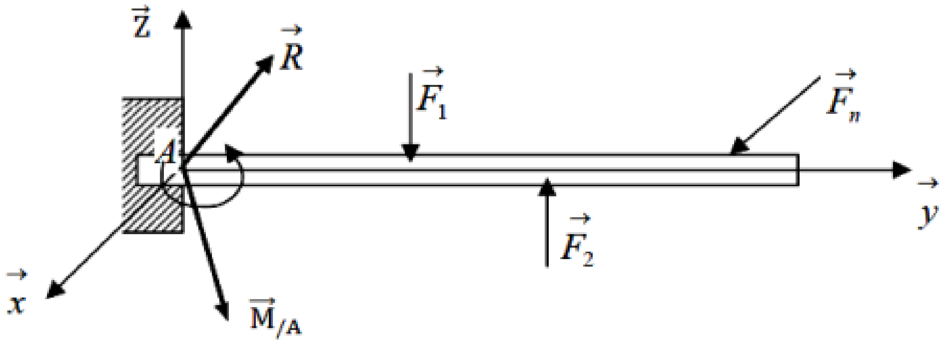


Fig.III.09. Encastrement d'un solide

$$\vec{M}_{/A} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i \qquad \text{(III-10)}$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \qquad \text{(III-11)}$$

Exemple : appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe Oz	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

III.9. Forces concourantes

Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

III.9.1.Concourants

les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.
Les forces $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots .. \vec{F}_i$ concourantes en O, leur résultante unique $\vec{R}$ est appliquée en O, et vaut la somme géométrique des vecteurs forces :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots .. \vec{F}_i = \sum_{n=1}^{i} \vec{F}_n \qquad \text{(III-12)}$$

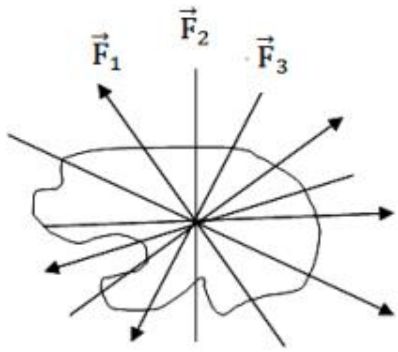


Fig.III.10. Forces concourantes

III.9.2. Parallèles

les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'interceptent à l'infini

III.9.3.Non concourantes et non parallèles

Les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

III.9.4. Résultante de deux forces concourantes

Soient deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ appliquées à un point O du solide (Fig.III.11a). Pour la détermination de leur résultante $\vec{R}$ on construit un parallélogramme sur $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ (Fig.III.11b).

Le module et la direction de la résultante $\vec{R}$ sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (fig.III.11b, Règle du parallélogramme)

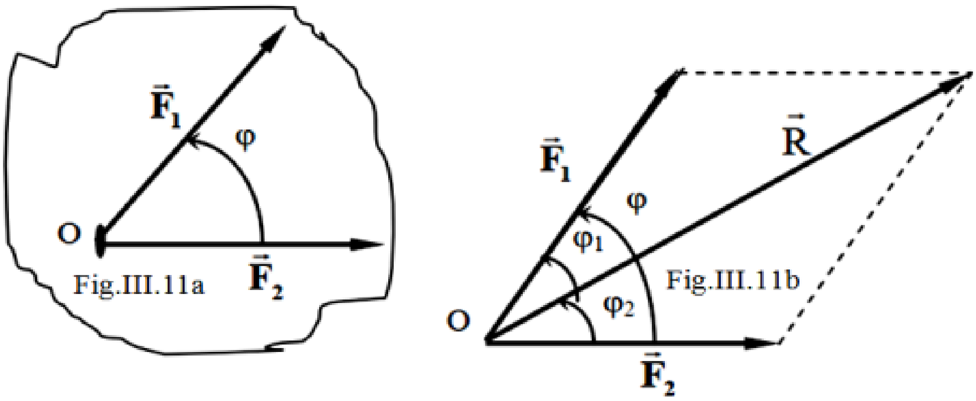


Fig.III.11. Résultante de deux forces concourantes

On s'écrit : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Son module s'obtient : $\|\vec{R}\| = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \varphi)}$ (III-13)

Et sa direction se détermine : $\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin_{\varphi_1}} = \frac{R}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi}$ (III-14)

III.9.5. Résultante de plusieurs forces concourantes

III.9.5.1. Méthode du parallélogramme des forces

On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun (Fig.III.12a), en faisant leur composition suivant la règle du parallélogramme par composer les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, trouver leur résultante $\vec{R}_1$ puis composer cette dernière et la force $\vec{F}_3$, construire un parallélogramme sur $\vec{R}_1$ et $\vec{F}_3$, trouver la résultante $\vec{R}_2$ et ainsi de suite (fig.III.12a), jusqu'à obtention de la résultante finale $\vec{R}$ (en double lignes dans la fig.III.12b).

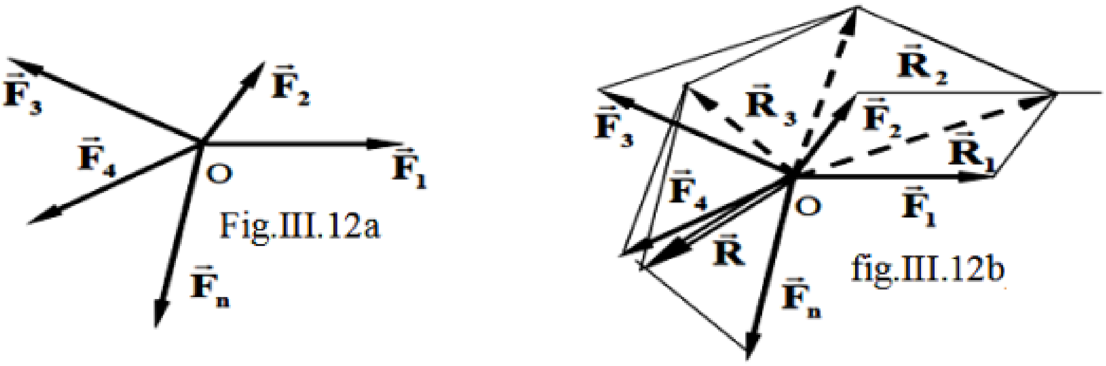


Fig.III.12. Résultante plusieurs forces concourantes (Méthode du parallélogramme)

III.9.5.2. Règle du polygone des forces

Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force.

Tout d'abord, on place l'origine du vecteur $\vec{F}_2$, à l'extrémité B de $\vec{F}_1$, puis de placer l'origine $\vec{F}_3$ à l'extrémité C de $\vec{F}_2$, ….. etc ; en joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de $\vec{F}_n$, on obtient la résultante $\vec{R}$ La méthode porte le nom : **La règle du polygone des forces** (Fig.III.13).

La ligne brisée ABDCEF s'appelle polygone des forces et le segment AF, vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.

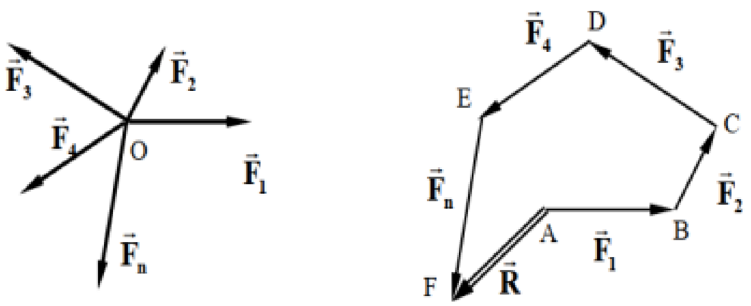


Fig.III.13. Règle du polygone des forces