الوحدة الثانية

مشاكل التخصيص (التعيين)

The Assignment Problems

يمكن القول أن مشاكل التخصيص هي عبارة عن حالة خاصة من مشاكل النقل ن و تتعلق بتخصيص عدد معين من الأجهزة أو العمال لإنجاز عدد من الوظائف و ذلك عن طريق تعيين جهاز واحد أو عامل واحد لأداء وظيفة واحدة ، وهذا يتطلب تساوي عدد الأجهزة مع عدد الوظائف ، و المشكلة هنا تتعلق باختبار أفضل تعيين بحيث يؤدي ذلك إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح .

1. **طرق حل مشاكل التخصيص :.**

هناك عدة طرق متبعة لحل مشاكل التخصيص منها :.

1. طريقة العد الكامل
2. الطريقة الهنغارية
3. طريقة البرمجة الخطية
4. طريقة النقل

1. **طريقة العد الكامل :** Complete Enumération

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص، وتعتمد على تحديد جميع البدائل المحتملة ثم نختار التخصيص المناسب الذي يؤدي إلى تحقيق الهدف المنشود (تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح) .

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب عدد الصفوف أو عدد الأعمدة (Factorial (!))

فإذا كان لدينا عدد العمال مثلا يساوي **N** فإن عدد البدائل يساوي **N!** ، فإذا كان لدينا عدد الصفوف يساوي 3 فإن **3! = 3x2x1 = 6** أي أن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص .

مثال 1 :. ليكن لدينا ثلاثة أجهزة (A,B,C) لإنجاز ثلاثة وظائف (1,2,3) ، و كانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة بالدينار معطاة في الجدول التالي :.

الأجهزة	الوظائف		
	1	2	3
A	16	8	14
B	10	4	8
C	8	2	10

المطلوب : استخدم طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف ؟

الحل : عدد الأجهزة 0=3 ، لذا فإن عدد البدائل : !3 = 6

الجدول التالي يعطي البدائل السنة و التكاليف الناتجة عن كل بديل

البدائل	الأجهزة			إجمالي التكاليف
	A	B	C	
1	1	2	3	16+4+10 = 30
2	1	3	2	16+8+2 = 26
3	2	1	3	8+10+10 = 28
4	2	3	1	8+8+8 = 24
5	3	1	2	14+10+2 = 26
6	3	2	1	14+4+8 = 26

يلاحظ من الجدول أن أفضل البدائل هو البديل رقم (4) وهو تخصيص :

الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة (2) .

الجهاز (B) لإنجاز الوظيفة (3) .

الجهاز (C) لإنجاز الوظيفة (1) .

مثال 2 :.

شركة ترغب في تخصيص ثلاث عمال لإنجاز ثلاث وظائف فإذا كانت الأرباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف بالدينار مبنية في الجدول التالي :

العمال	الوظائف		
	1	2	3
A	6	15	4
B	9	7	6
C	7	1	11

المطلوب : استخدم طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تعيين يحقق أعظم ربح ممكن ؟

الحل : عدد البدائل = **3! = 6** .

الجدول التالي يعطي البدائل السنة و الأرباح الناجمة عن كل بديل

البدائل	العمال			الأرباح
	A	B	C	
1	1	2	3	6+7+11 = 24
2	1	3	2	6+11+1 = 18

3	**2**	**1**	**3**	**15+9+11 = 35**
4	**2**	**3**	**1**	**15+6+7 = 28**
5	**3**	**1**	**2**	**4+9+1 = 14**
6	**3**	**2**	**1**	**4+7+7 = 18**

الحل الأمثل الذي يحقق أعظم ربح ممكن هو عند إجراء التخصيص التالي :.

العامل **(A)** لإنجاز الوظيفة (2)

العامل **(B)** لإنجاز الوظيفة (1)

العامل **(C)** لإنجاز الوظيفة (3)

ويكون الربح الناتج عن هذا التعيين : 35 دينار.

هذه الطريقة قد تبدو بسيطة خاصة إذا كان عدد الوظائف قليل لا يتجاوز 3 وظائف و لكن إذا كانت المشكلة تتعلق بأربعة وظائف فإن عدد البدائل = 24 بديلا ، وفي حالة خمسة وظائف فإن عدد البدائل يساوي "120" بديلا ، و هكذا كلما زادت البدائل كلما أصبحت هذه الطريقة غير عملية .

وفي هذه الحالة نلجأ إلى الطريقة الأخرى وهي :

2. **الطريقة الهنجارية (المجرية) : Hungarian Method**

خطوات تطبيق هذه الطريقة لأقل التكاليف هي :

1. تطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود
2. ثم نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف
3. نغطي الأصفار (في الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد ممكن من المستقيمات .
4. إذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف الجدول فإننا قد وصلنا إلى الحل و نقوم بعملية التعيين بأخذ القيمة الأصلية المناظرة للصفر في الجدول .

5. إذا كان عدد المستقيمات أقل من عدد صفوف الجدول ، فإننا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة و نطرحها من كل القيم غير المغطاة ، و نضيف هذه القيمة إلى نقاط تقاطع المستقيمات .
6. يجري تكرار التغطية حتى يتم التوصل إلى عدد مستقيمات مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة .

ملاحظة :

في حالة تعظيم الأرباح يتم أولا طرح جميع القيم من أعلى قيمة في الجدول ، ومن ثم نطبق الخطوات السابقة .

مثال1 :

ترغب إدارة أحد المصانع في تعيين أربع عمال لإنجاز أربعة وظائف فإذا كانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف بالدينار معطاة في الجدول التالي :

	الوظائف			
العمال	**1**	**2**	**3**	**4**
A	**5**	**6**	**2**	**4**
B	**9**	**5**	**1**	**9**
C	**1**	**2**	**6**	**1**
D	**7**	**6**	**15**	**12**

المطلوب : استخدم الطريقة الهنغارية لإيجاد أفضل تعيين يحقق أقل تكلفة .

الحل :

1. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود .
2. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف .

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

	1	2	3	4
A	4	4	1	3
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	6	4	14	11

طرح الأعمدة ← طرح الصفوف

3. تعطي كل صف و كل مود يحتوي عل صفر فأكثر بأقل عدد ممكن من المستقيمات .

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

4. بما أن عدد المستقيمات الأفقية و العمودية أقل من عدد صفوف الجدول لذا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة و نطرحها من باقي القيم الغير مغطاة . ونضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات .

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	1	3	0	0
B	6	3	0	6
C	0	2	7	0
D	0	0	10	5

بهذه الخطوة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل و يتم اختيار الحل كالتالي :.

- اختيار الصفر الوحيد في أي صف أو عمود أولا و يشطب أي صفر آخر في ذلك الصف أو العمود .
- في الصف الأول نختار الصفر (A4) و يشطب باقي الأصفار في العمود الرابع .
- في الصف الثاني نختار الصفر (B3) و يشطب باقي الأصفار في العمود الثالث .
- في الصف الثالث نختار الصفر (C1) و يشطب باقي الأصفار في العمود الأول .
- و أخيرا . في الصف الرابع نختار الصفر (D2) .

وعلى هذا الأساس يتم :.

1. تعيين العامل (**A**) لإنجاز الوظيفة (4)
2. تعيين العامل (**B**) لإنجاز الوظيفة (3)
3. تعيين العامل (**C**) لإنجاز الوظيفة (1)
4. تعيين العامل (**D**) لإنجاز الوظيفة (2)

وبالتالي فإن أقل التكاليف من الجدول الأصلي و الناجمة عن هذا التخصيص هي :

4+1+1+6 = 12 **D** (دينار)

<u>مثال2</u> :

مؤسسة تجارية ترغب في تخصيص عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف ، فإذا كان عدد العمال أربعة و كانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي :

الوظائف

العمال

	1	**2**	**3**	**4**
A	**6**	**15**	**4**	**5**
B	**9**	**7**	**6**	**1**
C	**5**	**11**	**1**	**7**
D	**14**	**18**	**9**	**10**

المطلوب : إيجاد الحل المثالي ، و مجموع الأرباح لهذه المسألة .

<u>الحل</u> :

1. لأن المسألة تعظيم الأرباح ، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو "18"

الوظائف

العمال

	1	**2**	**3**	**4**
A	**12**	**3**	**14**	**13**
B	**9**	**11**	**12**	**17**
C	**13**	**7**	**17**	**11**
D	**4**	**0**	**9**	**8**

2. طرح أقل رقم في كل صف لا يوجد به صفر من باقي الأرقام في الصف

الوظائف

العمال

	1	**2**	**3**	**4**
A	**9**	**0**	**11**	**10**
B	**0**	**2**	**3**	**8**
C	**6**	**0**	**10**	**4**
D	**4**	**0**	**9**	**8**

كطد

3. طرح أقل رقم في كل عمود لا يوجد به صفر من باقي الأرقام في العمود

الوظائف

العمال

	1	**2**	**3**	**4**
A	**9**	**0**	**8**	**6**
B	**0**	**2**	**0**	**4**
C	**6**	**0**	**7**	**0**
D	**4**	**0**	**6**	**4**

4. نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	**9**	**0**	**8**	**6**
B	**0**	**2**	**0**	**4**
C	**6**	**0**	**7**	**0**
D	**4**	**0**	**6**	**4**

5. و حيث أن عدد المستقيمات " الأفقية و العمودية " اقل من عدد صفوف الجدول لذا نختار أقل رقم من الأرقام غير المغطاة وهو "4" و نطرحه من جميع الأرقام غير المغطاة و نضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات ، لينتج الجدول التالي :

	1	2	3	4
A	**5**	**0**	**4**	**2**
B	**0**	**6**	**0**	**4**
C	**6**	**4**	**7**	**0**
D	**0**	**0**	**5**	**0**

الحل المثالي هو :

1. تعيين العامل (**A**) لإنجاز الوظيفة (2) .
2. تعيين العامل (**B**) لإنجاز الوظيفة (3) .
3. تعيين العامل (**C**) لإنجاز الوظيفة (4) .
4. تعيين العامل (**D**) لإنجاز الوظيفة (1) .

مجموع الأرباح للحل المثالي "من الجدول الأصلي" هو :

15 + 6 + 7+ 14 = 42**D** (دينار)

ملاحظة :

هنا بدأنا بطرح الصفوف في البداية ومن ثم الأعمدة ، لكن إذا أخذنا الأعمدة في البداية فإن النتيجة ستكون واحدة .

* **مشاكل التخصيص غير متوازنة Unbanlanred Problèmes**

إذا كان عدد الأجهزة لا يساوي عدد المهام أو الوظائف ، فإن مشكلة التخصيص هذه تسمى بمشكلة غير متوازنة ، ويمكن إزالة عدم التوازن هذا بإضافة صفوف وهمية أو أعمدة وهمية ، كما يمكن إضافة أكثر من صف أو عمود حتى يكون عدد الصفوف مساويا إلى عدد الأعمدة .

التكاليف و الأرباح الواجب و ضعها في الصفوف الجديدة أو الأعمدة تحدد من طبيعة المشكلة ، ففي حالة تخفيض التكاليف تكون عناصر الصف أو العمود الجديد تساوي صفر و بعد ذلك يتم إتباع خطوات الطريقة الهنغارية لإيجاد الحل الأمثل :

أما في حالة تعظيم الأرباح فإننا طرح قيم المصفوفة الأولية للأرباح من أعلى قيمة فيها و نحولها إلى المصفوفة الأولية للتكاليف ، ثم بعد ذلك يتم إضافة الصف أو العمود الوهمي ، ثم نتبع نفس خطوات حالة تخفيض التكاليف .

مثال : استخدم الطريقة الهنغارية لإيجاد أفضل تخصيص لعملية إنتاج ثلاثة سلع باستخدام أربعة آلات إذا علمت أن كلفة إنتاج السلعة المعنية على الآلة المعنية كما في الجدول الآتي :

السلع

الآلات

C	B	A	
24	**43**	**27**	**1**
12	**50**	**24**	**2**
6	**40**	**15**	**3**
15	**46**	**21**	**4**

الحل :

إن المصفوفة الأولية للتكاليف غير متوازنة لأن عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة و عليه لابد من إضافة عمود وهمي بكلفة إنجاز تساوي صفر ، و بالتالي تصبح مصفوفة التكاليف كما يلي :

	A	B	C	D
1	**27**	**43**	**24**	**0**
2	**24**	**50**	**12**	**0**
3	**15**	**40**	**6**	**0**
4	**21**	**46**	**15**	**0**

وبالتالي أصبحت مشكلة التخصيص متوازنة ، وبالتالي نطبق الطريقة الهنغارية كما يلي :

1. لا حاجة لطرح أقل قيمة في كل صف لأنها تساوي الصفر.
2. طرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود كالآتي :

	A	B	C	D
1	**12**	**3**	**18**	**0**
2	**9**	**10**	**6**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**6**	**6**	**9**	**0**

3. تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الأصفار.

	A	B	C	D
1	**12**	**3**	**18**	**0**
2	**9**	**10**	**6**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**6**	**6**	**9**	**0**

نلاحظ أن عملية التغطية تمت بخطين فقط و الذي يعني أننا لم نصل إلى التخصيص الأمثل

.

4. نطور الحل بطرح أقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم الغير المغطاة و إضافتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات حيث أن أقل قيمة = 3

	A	B	C	D
1	**9**	**0**	**15**	**0**
2	**6**	**7**	**3**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**3**
4	**3**	**3**	**6**	**0**

5. نكرر الخطوة 4 لتعذر تنفيذ عملية التخصيص

	A	B	C	D
1	**9**	**0**	**15**	**3**
2	**3**	**4**	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	**6**
4	**0**	**0**	**3**	**0**

في مصفوفة التكاليف الأخيرة نلاحظ أنه يمكن تغطية القيم الصفرية بأربعة خطوط عمودية و أفقية ، أي أن عدد الخطوط يكون مساويا لعدد الصفوف أو الأعمدة ، و لهذا يمكن إجراء عملية التخصيص كما يلي :

الآلة	السلعة المخصصة	التكلفة
1	B	**43**
2	C	**12**
3	A	**15**
4	D	**0**
التكاليف الكلية		**70**

في هذا التخصيص تكون الآلة 4 معطلة عن العمل .

التكلفة	السلعة المخصصة	الآلة
43	B	**1**
0	D	**2**
6	C	**3**
21	A	**4**
70	**التكاليف الكلية**	

وفي هذا التخصيص تكون الآلة 2 معطلة عن العمل .

* **عدم قبول التخصيص Hamdling Unacceptable Assignment**

في بعض مشاكل التخصيص نلاحظ عدم إمكانية تخصيص أحد الأقسام لإنتاج سلعة معينة مثلا أو كان لا يمكن تخصيص عامل معين إلى الآلة معينة لاعتبارات مانعة .

سبق و تعرفتم على المتغيرات الاصطناعية في البرمجة الخطية و عالجنا ضمان عدم ظهورها في الحل الأمثل و ذلك بإعطاء تكاليف عالية جدا لمشاكل الحد الأدنى ، و أرباح قليلة جدا لمشاكل الحل الأعلى ، أما في حالة عدم قبول التخصيص و لكي نتجنب عملية التخصيص الخاطئة ، يمكن استخدام نفس الطريقة (الأسلوب) حيث تتضمن مصفوفة التكاليف الأولية **M+** في الأماكن محظورة التخصيص ، بينما تتضمن مصفوفة الأرباح الأولية **M-** و عند تحويل مصفوفة الأرباح الأولية إلى مصفوفة تكاليف أولية فإن **M-** تتحول إلى **M+** .

<u>مثال</u> : أردنا في شركة صناعية تعيين أربعة عمال على أربع آلات بحيث أن العامل الأول لا يستطيع تشغيل الآلة الرابعة و العامل الثالث لا يستطيع تشغيل الآلة الثانية ، و كانت تكلفة تعيين كال عامل على كل من هذه الآلات كما في الجدول التالي :

	1	2	3	4
A	**5**	**0**	**3**	M
B	**2**	**3**	**2**	**0**
C	**3**	M	**0**	**0**
D	**0**	**8**	**0**	**2**

.أوجد أفضل تخصيص باستخدام الطريقة الهنغارية .

الحل :

نضع قيمة الكلفة **M** في الخلايا التي لا يمكن إجراء التخصيص فيها و بتطبيق الخطوة الأولى من خطوات الطريقة الهنغارية (طرح الصفوف) تصبح مصفوفة التكاليف كما يلي :.

	1	2	3	4
A	**5**	**0**	**3**	M
B	**2**	**3**	**2**	**0**
C	**3**	M	**0**	**0**
D	**0**	**1**	**0**	**2**

العمال

نلاحظ أن مصفوفة التكاليف هذه تحتوي على صفر في كل عمود لذلك لا داعي لتطبيق الخطوة الثانية (طرح الأعمدة) لذلك نغطي القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من المستقيمات فيكون عدد المستقيمات مساويا لعدد الصفوف و تكون عملية التخصيص كما يلي :.

A2 , B4 , C3 , D1

و التكاليف الكلية تكون 3+8+3+7 = 21

3. **طريقة النقل Transportation Méthode**

في هذه الطريقة يتم التعامل مع مشكلة التخصيص على أنها مشكلة نقل ، و تعتبر قيم العرض و الطلب جمعيها مساوية إلى واحد ،نجد الحل الابتدائي بأحد الطرق الثلاثة المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل .

4. **طريقة البرمجة الخطية Linear Progrramming Method**

لتوضيح مشكلة التخصيص وفق أسلوب البرمجة الخطية نعتمد المثال السابق

	1	2	3
A	**9**	**13**	**7**
B	**14**	**14**	**6**
C	**10**	**13**	**8**

فإذ كانت X_{ij} تمثل تخصيص العامل **i** للآلة **j** فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي :

$$\text{Min } Z = 9X_{11} + 13X_{12} + 7X_{13} + 14X_{21} + 14X_{22} + 6X_{23} + 10X_{31} + 13X_{32} + 8X_{33}$$

S.t

$$\begin{cases} 9X_{11}+13X_{12}+7X_{13} = 1 \\ 14X_{21}+14X_{22}+6X_{23} = 1 \\ 10X_{31}+13X_{32}+8X_{33} = 1 \\ 9X_{11}+14X_{21}+10X_{31} = 1 \\ 13X_{12}+13X_{22}+13X_{32} = 1 \\ 7X_{13}+6X_{23}+8X_{33} = 1 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0 \quad i=1.2.3 \quad j=1.2.3$

هذا البرنامج الخطي، ثم نقوم بالحل بإحدى طرق حل البرامج الخطية.