الوحدة الأولى: مشاكل النقل Transportation problems

تعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز بأقل تكلفة ممكنة .

I. نموذج النقل : Transportation Model

يفترض نموذج النقل وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مصانع ، شركات ...) مقدارها n ، و عدد من مراكز التسويقية مقدارها m، وهدف النموذج هو تحقيق أقل تكلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل ز والجدول التالي يوضح مشكلة النقل :

المراكز التسويقية

	D_1	D_2	D_3	....	D_n	**العرض Supply**
S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	.....	C_{1n}	b_1
S_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	.....	C_{2n}	b_2
S_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	.....	C_{3n}	b_3
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
S_n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	.....	C_{nm}	b_n
الطلب Demond	a_1	a_2	a_3	.....	a_n	

حيث C_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المركز (j) ولو فرضنا أن X_{ij} عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j) فإن النموذج الرياضي لمشكلة النقل يكتب كما يلي :

$$\text{Min } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \dots\dots + C_{ij} + \dots\dots\dots + C_{nm}X_{nm}$$

Subject to ,

$$\begin{cases} C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+\dots\dots\dots\dots+C_{1m}X_{1m} = b_1 \\ C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+\dots\dots\dots\dots+C_{2m}X_{2m} = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_{n1}X_{n1}+C_{n2}X_{n2}+\dots\dots\dots\dots+C_{nm}X_{nm} = b_n \\ C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+\dots\dots\dots\dots+C_{n1}X_{n1} = a_1 \\ C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+\dots\dots\dots\dots+C_{n2}X_{n2} = a_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_{1m}X_{1m}+C_{2m}X_{2m}+\dots\dots\dots+C_{nm}X_{nm} = a_n \end{cases}$$

$X_{11} , X_{12} ,X_{13} \dots\dots\dots\dots X_{nm} \geq 0$

و لإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل سيكون في الصعب حل هذا النموذج الرياضي و ذلك لكثرة القيود و المتغيرات ، ولكن هناك طرق أسهل لحل هذه المشكلة .

طرق حل مشاكل النقل :

* طريقة الزاوية الشمالية الغربية the north-west Cornner Method
* طريقة أقل التكاليف the Least Costes Method
* طريقة فوجل التقريبية the Vogel's Approscimation Method

وهذه الطرق تعطي حلا أساسيا (أولي) للمشكلة و سنبحث لاحقا عن طريقة الوصول إلى الحل الأمثل .

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية the north-west Cornner Method

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية ، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل ، و لتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي :

إحدى الشركات لهائلات مخازن في مواقع مختلفة كما أن لها ثلاثة مراكز تسويقية ، للإشارة أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع بالدينار ، و حجم المخزون في كل مخزن و الاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها و الجدول التالي :

المراكز

		D_1	D_2	D_3	العرض
	S_1	5	1	8	12
	S_2	2	4	8	14
المصادر	S_3	3	6	7	4
	الطلب	9	10	11	30 / 30

المطلوب : ما مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة الزاوية الشمالية .

ملاحظة : الأرقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في الجدول تمثل كلفة النقل بالدينار ،

الحـــل :

بداية يجب التأكد من توفر شرط التوازن أي مجموع العرض المتوفر في المصادر يساوي ما تطلبه المراكز التسويقية

$$12+14+4= 9+10+11$$

1. نأخذ الخلية الأولى و التي تقع في الصف الأول (الشمالي) و العمود الأول (الغربي) وهي الخلية (S_1 , D_1) ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الكلب D_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ثم تخصص أقل الكميتين للخلية (S_1 , D_1)

$$Min(12,9)=9$$

أي يتم تخصيص 9 وحدات للخلية (S_1 , D_1) وهذا يؤدي إلى سد احتياجات المركز D_1بالكامل.

2. نأخذ الخلية الثنائية (S_1 , D_2) و التي تكون هي الآن في الزاوية الشمالية الغربية ، و نقارن الكمية المتاحة لدى المصدر (S_1) بالكمية المطلوبة في قبل المركز D_2 و نختار الأقل و نخضعها للخلية (S_1 ,D_2)

$$\text{Min}(3,10) = 3$$

لذا تخصص 3 وحدات للخلية (S_1 , D_2) .

3. نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت بالكامل ، لذا نأخذ الخلية (S_2 , D_2)

$$\text{Min}(14,7) = 7$$

4. نأخذ الخلية (S_2 , D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ن و تخصص أقل الكميتين للخلية (S_2 ,D_3)

5. نأخذ الخلية (S_3 ,D_3) ، وتخصص لها 4 وحدات و هي الكمية المتبقية لدي المركز S_3 عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت .

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	**العرض**
S_1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	~~12~~ ~~3~~ 0
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	~~12~~ ~~7~~ 0
S_3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ ~~4~~ 0	30 30

ويكون إجمالي تكاليف النقل للجدول السابق كما يلي :

Total Cost = (5x9)+(1x3)+(7x4)+(7x4)=104 D (دينار)

2. **طريقة أقل التكاليف The Least Costs Méthode**

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب، حيث يتم بموجب هذه الطريقة البحث و التركيز غلى اقل تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب و العرض، و لتوضيح الخطوات الرئيسية لهذه الطريقة نورد المثال السابق:

المراكز التسويقية

المصادر

	D_1	D_2	D_3	**العرض**
S_1	5	1	8	12
S_2	2	4	0	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30

نلاحظ أن اقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي الصفر ، وهي تقابل المصدر S_2 و المركز D_3 ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3 ، ثم نختار اقل القيمتين ، و نخصصها للخلية (S_2 , D_3)

Min(14,11)= 11

* نبحث عن اقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول ، فنجد انها تساوي (1) ، وهي تقع في الخلية (S_1 , D_2) لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع ما يحتاجه المركز D_2 ، ثم نختار أقل الكميتين

Min(12,10)= 10

و نخصصها للخلية (S_1 , D_2)

* التكلفة الأقل الأخرى ضمن الجدول تساوي 2 و تقع في الخلية (S_2 , D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع احتياجات المركز D_1، و نختار أقل الكميتين

Min(3,9)= 3

ونخصصها للخلية (S_3 , D_1)

* التكلفة الأقل التالية تساوي 3 و تقع ضمن الخلية (S_3 , D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_3 مع احتياجات المركز D_1 و نختار أقل الكميتين

$$Min(4,9)= 4$$

ونخصصها للخلية (S_3 , D_1)

* التكلفة الأقل الأخيرة ضمن الجدول تساوي 5 وتقع في الخلية (S_1 ,D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع احتياجات مركز الطلب D_1 ونختار اقل الكميتين

$$Min(2,2)= 2$$

ونخصصها للخلية (S_1 , D_1)

المراكز التسويقية

	D_1	**D_2**	**D_3**	**العرض**
S_1	$\boxed{5}$ **2**	$\boxed{1}$ **10**	$\boxed{8}$	~~12~~ ~~2~~ **0**
S_2	$\boxed{2}$ **3**	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	~~14~~ ~~3~~ **0**
S_3	$\boxed{3}$ **4**	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	~~4~~ **0**
الطلب	~~9~~ ~~6~~ ~~2~~ **0**	~~10~~ **0**	~~11~~ **0**	

المصادر

Total Cost =(5x2)+(1x10)+(2x3)+(0x11)+(3x4)=38 دينار

من خلال حسابنا للتكلفة الكلية لمشكلة النقل نلاحظ أن هذه الطريقة تكلفتها أقل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية .

3. **طريقة فوقل التقريبية Vogel's Approximation Méthode (الجزاء) (VAM)**

تعتبر هذه الطريقة الأقرب إلى الحل الأمثل يعني أنها أفضل من الطريقتين الاخرتين في معظم الأحيان .

لكنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول من الطرق الأخرى و تتلخص خطوات الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي :.

1. حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود ، و تأثيرها على جانبي الجدول .
2. تحديد الصف أو العمود الذي يملك أكبر فرق في الكلفة (أعلى جزاء) .
3. اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود .
4. في الخلية التي اختيرت في الخطوة (3) نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر ن و نأخذ القيمة الاقل .
5. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل الأعمدة و الصفوف و تكرر العملية السابقة إلى أن تلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة .

ملاحظة:

عند تساوي الفروق في الصفوف و الأعمدة نأخذ الفرق أما إذا كانت كل الفروق في الصفوف و الأعمدة متساوية في كل المراحل من البداية تفسر طريقة فوقل

* ستوضح طريقة فوقل بالاستعانة بالمثال السابق :

فرق الصفوف

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	5	1	8	12	4
S_2	2	4	0	14	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	11	30	
فرق الأعمدة	1	3	7		

* من خلال حساب الفروق مصفوف و الأعمدة نلاحظ أن للعمود الثالث أكبر فرق و يساوي 7 .
* نبحث عن أقل كلفة في العمود الثالث فنجدها تساوي 0 وهي للخلية (S_2, D_3) .

* نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة في المصدر S_2 ثم نختار أقل الكميتين $Min(11,14)= 11$

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	$\boxed{8}$	12	4
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	~~14~~ 3	2
$S_3$8	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	4	3
الطلب	9	10	~~11~~ 0		
	1	3	X		

* ويتم تعديل العرض و الطلب ن وهذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل احتياجات المركز D_3 ، لذا يشطب المركز D_3 و لذلك لإعادة حساب الفروقات مرة أخرى .

* يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود .

* نبحث عن اقل كلفة في الصف الأول ن فنجد للخلية (S_1 , D_2) أقل كلفة و البالغة 1

* نقارن احتياجات مركز الطلب D_1 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S_1 ، ثم نختار أقل الكميتين $Min(12,10)= 10$

* يتم شطب مركز الطلب D_2 ، ولهذا السبب لا يؤخذ بعين الإعتبار عند حساب الفرق في الكلفة في المراحل اللاحقة

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	5	1 10	8	~~12~~ 2	4
S_2	2	4	0 11	~~14~~ 3	2
S_3	3	6	7	4	3
	9	10	~~11~~	30	
فرق الأعمدة	1	X	X		

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف و الأعمدة بسبب وجود مركز طلب واحد وهو (D_1) و الذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن، ما نحتاجه الآن هو البحث عن أقل كلفة في العمود الأول، و الذي نلاحظ أنه في المصدر S_2 تقابل أقل كلفة و التي تساوي 2 وبالتالي يتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 و البالغة "3" وحدات لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1 ، ويتم إلغاء المصدر S_2 ونتابع هكذا، إلى أن نحصل على نموذج النقل بصيغته النهائية بالشكل التالي :

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5 2	1 10	8	_____
S_2	2 3	4	0 11	_____
S_3	3 4	6	7	_____
الطلب	_____	_____	_____	_____

وبالتالي :.

Total Cost = 5x2+1x10+2x3+0x11+3x4=38 D

- إذن الكلفة الإجمالية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية =104 دينار.
- الكلفة الإجمالية بموجب اقل التكاليف = 38 دينار
- الكلفة الإجمالية بموجب طريقة فوقل = 38 دينار

II. نموذج النقل الغير متوازن

لقد ذكرنا سابقا أن مجموع قيم العرض يجب أن تكون متساوية مع مجموع قيم الطلب ، ولكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية و بالتالي يكون النموذج غير متوازن ، و لكي نوازن النموذج نضيف إلى الأقل قيمة الفرق و تكون التكلفة الموازية لها أصفار.

الشكل الطبيعي

العرض = الطلب

شرط تساوي العرض و الطلب

حيث : عدد المراكز i=1.2.3...... m

عدد المصادر j =1.2.3 ....n

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع ، إذ يكون الطلب أكبر من العرض أحيانا أو العرض أكثر من الطلب أحيانا أخرى ، وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير شرط التوازن تحايلا و ذلك كما يلي :.

<u>الحالة الأولى :.</u> العرض أكثر من الطلب أي :.

ينبغي في هذه الحالة إضافة مركز تسويقي (عمود) خيالي إلى جدول المسألة و تكاليف النقل من أي مصدر إلى هذا المركز نفترضها معدومة .

الحالة الثانية : الطلب أكثر من العرض ، أي :

ينبغي في هذه الحالة إضافة مصدر (سطر) خيالي إلى جدول المسألة ، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض و الطلب و تكاليف النقل هذا المصدر إلى مركز تسويقي نفترضها معدومة .

* في الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول بصفة عادية ، ثم في النهاية نحذف السطر او العمود الذي تمت إضافته .

من أجل ذلك نورد المثال التالي :

مثال 1 : وازن نموذج النقل التالي ، ثم اوجد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	**العرض**
S_1	2	1	3	100
S_2	5	4	0	150
S_3	2	3	6	50
الطلب	100	120	60	300 / 280

نلاحظ هنا أن مجموع قيم العرض =300 ن و مجموع قيم الطلب =280 ، وبالتالي نضيف عمود آخر قيمة الطلب فيه =20 ، و التكاليف = صفر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2	1	3	0	100
S_2	5	4	0	0	150
S_3	2	3	6	0	50
الطلب	100	120	60	20	300 / 280

إذن الحل الأولي للنموذج بطريقة أقل التكاليف كما يلي :

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2	1 100	3	0	~~100~~ 0
S_2	5 70	4 20	0 60	0	~~150~~ ~~90~~ ~~70~~ 0
S_3	2 30	3	6	0 20	~~08~~ ~~30~~ 0
الطلب	~~100~~ ~~70~~ 0	~~120~~ ~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~20~~ 0	300 / 300

Total Cost =100+350+80+60 = 590 D دينار

<u>مثال2</u>: وازن نموذج النقل التالي، ثم اوجد الكلفة الكلية بطريقة فوقل

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	120
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	100
العرض	100	100	50	

نلاحظ أن الطلب أكثر من العرض ، وبالتالي نضيف صف قيمته 30 وتكاليف = صفر كالآتي

الأسواق

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	120
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	100
S_3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	30
الطلب	100	100	50	

ويكون الحل الأولي للتكلفة الكلية بطريقة فوقل كما يلي :

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{0}$ 100	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 20	~~100~~ ~~120~~
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{5}$	~~100~~ 0
S_3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 30	~~30~~ 0
الطلب	~~100~~	~~100~~ 0	~~50~~ ~~20~~ 0	

الفرق

1 1 1

1 1 1

0

الفرق	0	1	2
	2	2	3
	2	2	

III. اختبار مثالية الحل

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة و إنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل ، ونعني بذلك أن هل هذا الحل لا يوجد

حل أفضل منه أم أن هناك حلول أفضل منه ؟

وهناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل وهما :.

1. طريقة المسار المتعرج " طريقة الحجر المتنقل " The Stepping Stone Method
2. طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method

1. طريقة المسار المتعرج

تقتضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) و جدول الحل الأولي لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة .

و إذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل التكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك .

و تتم عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها .

* كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الآتي وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن تساوي دائما مجموع عدد الصفوف و عدد الأعمدة ناقص واحد . أي

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1

عدد الخلايا المشغولة = (m + n- 1)

* القواعد التي يجب مراعاتها لتطبيق هذه الطريقة :.

1. تكوين مسار معلق لكل خلية غير مشغولة .

بحيث يبدأ و ينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها ، ويجب أن يتألق المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية و العمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق .

وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة .

2. يتم وضع إشارة زائد (+) للخلية المراد تقييمها ثم إشارة (-) للخلية التي تليها في المسار ، ثم زائد (+) للخلية التالية في المسار ، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة و السالبة حتى نصل إلى الخلايا التي بدأنا بها .
3. نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) ، وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها .
4. تكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة ، فإذا كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير المباشرة لها سالبة .

   فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل و تخفيض التكاليف و تعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة الغير مباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف و تؤدي إلى تحسين الحل .
5. يتم إشغال الخلية الغير مشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.
6. تكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا و اختبار الخلايا الغير مشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل .
7. في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا = $(m + n - 1)$ (حالة حل مفكك) ، في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا الغير مشغولة و التي تحتوي على أقل كلفة قيمة صفر بحيث لا يؤثر على الحل و تساعدنا في اختيار الخلايا الغير مشغولة .

* ومن أجل إيضاح هذه الطريقة نورد المثال التالي :

<u>مثال:</u>

تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية و تقوم هذه الشركة بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية ، الجدول أدناه يبين تكاليف نقل الوحدة الواحدة و الكميات المعروضة و المطلوبة ، استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي المقبول ، ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المعرج .

المراكز التسويقية

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	7	3	10	22
S_2	4	6	0	24
S_3	5	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

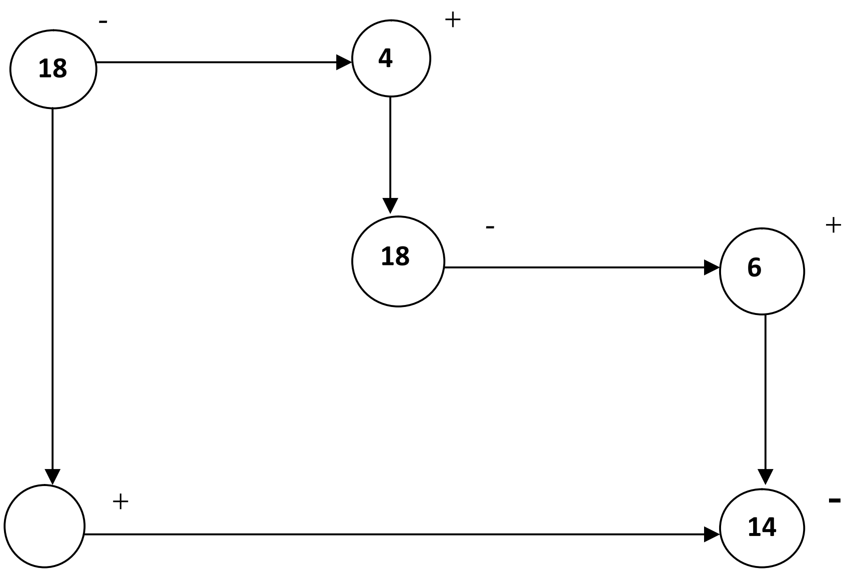
<u>مثال</u>:

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	22
S_2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{0}$ 6	24
S_3	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 14	14
الطلب	18	22	20	60

1. يتم التأكد من أن الحل الأولي قابل للحل الأمثل و نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة تساوي 5 و أن الشرط (عدد الخلايا = 3+3-1) أي أن الشرط عدد الخلايا المشغولة m+n-1 محقق .
2. يتم رسم مسار مغلق للخلايا الغير المشغولة .
3. يتم حساب الكلف الغير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا الغير مشغولة و كالآتي:

الكلفة الغير مباشرة	المسار المغلق	الخلية الغير مشغولة
+10-0+6-3 = 13	X(1,3) → X(2,3) → X(2,2) → X(1,2) → X(1,3)	X (1,3)
+4-7+3-6 = -6	X(2,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,1)	X(2,1)
+5-7+3-6+0-9 = -14	X(3,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) X(2,2) X(2,3) X(3,3) X(3,1)	X(3,1)
+8-6+0-9 = -7	X(3,2) → X(2,2) → X(2,3) → X(3,3) → X(3,2)	X(3,2)

4. من التكاليف الغير مباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(3.1) لها أكبر قيمة سالبة و لذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف ، ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة ، و يمكن تمثيل مسار الخلية X(3.1) كالآتي :.



5. إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X(3.1) تتحدد من المسار المغلق أعلاه ، وإن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (14) وحدة ، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة و طرحها من الخلايا السالبة و بذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق و تصبح كالآتي :.

X(3,1) = 14

X(1,1)=18-14 = 4

X(1,2) = 4+14 =18

X(2,2) = 18-14 = 4

X(2,3) = 6+14 = 20

X(3,3) = 14-14 = 0

بالتالي يصبح جدول النقل كالآتي :.

	1	2	3	العرض
1	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{3}$ 18	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{0}$ 20	24
3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية :.

T.C = (7)(4)+(3)(18)+(6)(4)+0(20)+(5)(14)+(9)(0) = 176

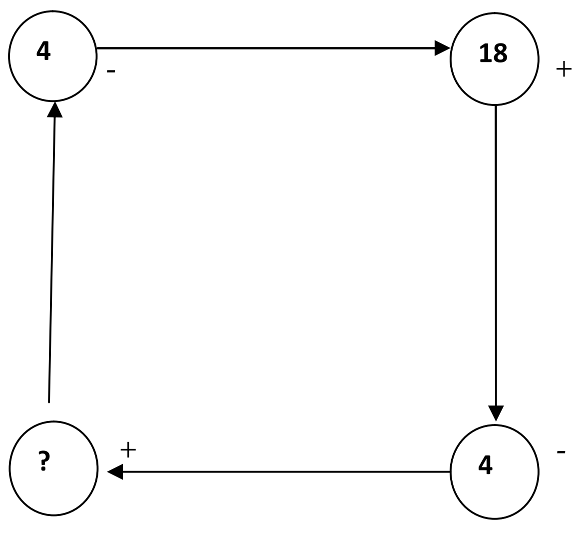
كانت الكلفة الكلية باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية 372 في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول 176 أي هناك تخفيض في التكاليف بقيمة 196 .

* إن الحل المحقق في الجدول السابق يمكن أن يكون حلا أمثلا أولا يكون كذلك .

أي هل هناك إمكانية في الحصول على نتائج أفضل من النتيجة السابقة ، و يتطلب ذلك اختيار الجدول الذي تم التوصيل إليه طبقا لنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دارسة أثرر اشتغال الخلايا الغير مشغولة على التكلفة الكلية و كالآتي:

التكلفة الغير مباشرة	المسار المغلق	الخلية الغير مشغولة
+10-0+6-3=13	X(1,3) → X(2,3) → X(2,2) → X(1,2) → X(1,3)	X(1,3)
+4-7+3-6= -6	X(2,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,1)	X(2,1)
+8-5+7-3= 7	X(3,2) → X(3,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(3,2)	X(3,2)
+9-5+7-3+6-0=14	X(3,3) → X(3,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,3) → X(3,3)	X(3,3)

ممن التكاليف الغير مباشرة التي تم احتسابها نجد أن الخلية X(2,1) لها قيمة سالبة و لذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي غلى تخفيض التكاليف ويتم إشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنتقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة و يمكن تمثيل مسار الخلية X(2,1) كالآتي :



إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية X(2,1) تتحدد من المسار المغلق أعلاه ن وهي عبارة عن أصغر عدد من الوحدات في الخلايا التي تأخذ الإشارة السالبة في المسار.

إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة هي (4) وحدات ، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة و طرحها من الخلايا السالبة و بذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق و تصبح كالآتي :.

$X(1,1) = 4-4 =0$

$X(1,2) = 18+4 = 22$

$X(2,1) = 4$

$X(2,2) = 4-4 = 0$

و كما يتضح في الجدول الآتي :.

	1	2	3	العرض
1	7	3 22	10	22
2	4 4	6	0 20	24
3	5 14	8	3	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكلفة الكلية :

$T.C = (22)(3)+(4)(4)+(20)(0)+(14)(5) =152$

كانت التكلفة الكلية 176 في التعديل الأول للجدول في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول للمرة الثانية 152 أي أن هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 24 .

* إن الحل المتحقق في الجدول قد يكون هو الحل الأمثل و بذلك يتم اختبار أمثلية الجدول الأخير ،

بحيث نلاحظ في هذا الجدول أنه لا يحقق الشرط كون عدد الخلايا لمشغولة = (m + n-1) ، إذ أن الخلايا المشغولة أصبحت (4) لذلك يتم إضافة صفر إلى أحد الخلايا الغير مشغولة و التي لها أقل تكلفة وهي الخلية X(2,2) لمساعدتنا في اختبار الخلايا الغير مشغولة و الجدول التالي يوضح ذلك .

	1	2	3	**العرض**
1	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ **22**	$\boxed{10}$	**22**
2	$\boxed{4}$ **4**	$\boxed{6}$ **0**	$\boxed{0}$ **20**	**24**
3	$\boxed{5}$ **14**	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	**14**
الطلب	**18**	**22**	**20**	**60**

يتم اختبار الأمثلية الجدول الأخير بنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا الغير مشغولة على التكلفة الكلية كالآتي :

الخلية الغير مشغولة	**المسار المغلق**	**التكلفة الغير مباشرة**
X(1,1)	X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,1) → X(1,1)	+7-3+6-4 = 6
X(1,3)	X(1,3) → X(2,3) → X(2,2) → X(1,2) → X(1,3)	+10-0+6-3 = 13
X(3,2)	X(3,2) → X(3,1) → X(2,1) → X(2,2) → X(3,2)	+8-5+4-6 = 1
X(3,3)	X(3,3) → X(3,1) → X(2,1) → X(2,3) → X(3,3)	+9-5+4-0 = 8

إن التكلفة الغير مباشرة للخلايا الغير المشغولة هي أرقام موجبة ، لذلك فإن إشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف و بذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل و التكاليف : T.C = 152

ملاحظة :. الجدول الأخيرة الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة المسار الحرج هو نفس الجدول الذي تم الحصول عليه عند استخدامنا طريقة أقل التكاليف و طريقة فوقل مما يدل أن هاتين الطريقتين تعطي في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل .

2. طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method :

ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية :

1. التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $m + n - 1$
2. يتم تكوين معادلة لكل خلي ة مشغولة في جدول الحل الأولي على أساس المعادلة الآتية $C_{ij} = U_i + U_j$

   حيث :

   U_i : المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية .

   U_j : المتغير الخاص بالعمود j و التي تقع فيه الخلية المعنية .

   C_{ij} : كلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمود j
3. إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المشغولة و حسب الصيغة التي تم ذكرها في الخطوة السابقة .
4. حساب الكلفة الغير مباشرة للخلايا الغير مشغولة وفقا للمعادلة الآتية الكلفة الغير مباشرة للخلية

$$(i\text{-}j) = (C_{ij} - U_i - U_j)$$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير مباشرة لها سالبة ، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل و تخفيض التكاليف ، وتعطي الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة ، و نكمل الحل كما هو متبع في طريقة المسار المتعرج .

ولغرض التوضيح هذه الطريقة نستعين بالمثال السابق

حل المثال:

من جدول الحل الأولي و الذي تم الحصول عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية ، وجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل .

	1	2	3	العرض
1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{0}$ 6	24
3	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 14	14
الطلب	18	22	20	60

من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة 5 و بذلك يتم تكوين خمسة معادلات و كالآتي :.

$C_{11} = U_1 + V_1 = 7$ ....(1)

$C_{12} = U_1 + V_2 = 3$ ....(2)

$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$ ....(3)

$C_{23} = U_2 + V_3 = 0$ ....(4)

$C_{33} = U_3 + V_3 = 9$ ....(5)

بما انه لدينا عدد المتغيرات أكثر من عدد المعادلات و لغرض تسهيل الحل ، نفرض أن أحد المتغيرات يساوي صفر حتى نتمكن من إيجاد قيم المتغيرات الأخرى ن و لنفرض أن U_1 يساوي صفر ، ومن المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية :

$V_1 = 7$ $\quad$ $U_1 = 0$

$V_2 = 3$ $\quad$ $U_2 = 3$

$V_3 = -3$ $\quad$ $U_3 = 12$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة و ذلك بحساب التكلفة الغير مباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة :.

$(C_{ij} - U_i - V_j)$ = الكلفة الغير مباشرة

الخلية الغير مشغولة	**التكلفة الغير مباشرة $(C_{ij} - U_i - V_j)$**
X(1,3)	**10-0-(-3) = 13**
X(2,1)	**4-3-7 = -6**
X(3,1)	**5-12-7 = -14**
X(3,2)	**8-12-3 = -7**

من التكاليف الغير مباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(3,1) لها أكبر قيمة سالبة ، لذلك يتم اشتغالها بنقل كميات إليها و طبقا لما تم شرحه في طريقة المسار المتعرج حيث يتم رسم لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها ، وهكذا إلى أن تصبح جميع التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة موجبة أو تساوي الصفر .