Exercices résolus sur l'analyse numérique Master 1

Exercice 01: On s'intéresse ici à la résolution numérique du problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans }]0,1[\times]0,T[\,,\ \lambda > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ donnée,} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \forall t \in [0,T]\,, \end{cases}$$

et on considère le schéma explicite suivant:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + \lambda \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} = 0. \tag{1}$$

1) Montrer que ce schéma est consistant et déterminer son ordre.
2) Etudier sa stabilité.

Solution

1) La consistance:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) &= \frac{u(x_i,t^{n+1}) - u(x_i,t^n)}{\triangle t} - \frac{\triangle t}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\zeta_1)\,, \\ &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} - \frac{\triangle t}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\zeta_1)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) &= \frac{u(x_i,t^n) - u(x_{i-1},t^n)}{\triangle x} + \frac{\triangle x}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\zeta_2,t^n) \\ &= \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} + \frac{\triangle x}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\zeta_2,t^n)\,, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} |R_{\triangle x,\triangle t}| &= \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) - \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + \lambda \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n) - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t^n) - \lambda \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right| \\ &= \left| -\frac{\triangle t}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\zeta_1) + \lambda \frac{\triangle x}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\zeta_2,t^n) \right| \leq C_1(\triangle t) + C_2(\triangle x) \\ &= O(\triangle t) + O(\triangle x)\,. \end{aligned}$$

Donc, le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et en espace.
2) D'après l'équation (1), on trouve

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \lambda \frac{\triangle t}{\triangle x}\right) u_i^n + \lambda \frac{\triangle t}{\triangle x} u_{i-1}^n,$$

alors sous la condition de CFL (ici, $0 \leq \lambda \frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1$), u_i^{n+1} est une combinaison convexe de u_i^n et u_{i-1}^n et on a la forme matricielle suivante:

$$U^{n+1} = AU^n,$$

où $A=\begin{pmatrix} 1-r & 0 & 0 & ... & 0 \\ r & 1-r & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & r & 1-r \end{pmatrix}$, $r=\lambda\frac{\triangle t}{\triangle x}$.
Par itération, on obtient $U^{n+1}=A^{n+1}U^0$, il vient

$$\left\|U^{n+1}\right\|_\infty=\left\|A^{n+1}U^0\right\|_\infty\leq\left\|A^{n+1}\right\|_\infty\left\|U^0\right\|_\infty\leq\left(\|A\|_\infty\right)^{n+1}\left\|U^0\right\|_\infty\leq\left\|U^0\right\|_\infty,\ \ (\|A\|_\infty=1)$$

donc, le schéma est stable en $\|.\|_\infty$.
<u>Exercice 02</u>: Le même problème d'exercice 01, et considérons le schéma de Lax-Wendroff, une discrétisation explicite en temps et une discrétisation centrée en espace:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\triangle t}+\lambda\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\triangle x}=0, \tag{2}$$

2) D'après l'équation (2), on trouve

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\lambda\frac{\triangle t}{2\triangle x}u_{i-1}^n-\lambda\frac{\triangle t}{2\triangle x}u_{i+1}^n,$$

si on a posé $r=\lambda\frac{\triangle t}{2\triangle x}$, on obtient la forme matricielle suivante:

$$U^{n+1}=AU^n,$$

où $A=\begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & ... & 0 \\ r & 1 & -r & \ddots & \vdots \\ 0 & r & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -r \\ 0 & ... & 0 & r & 1 \end{pmatrix}$.
Par itération, on obtient $U^{n+1}=A^{n+1}U^0$, alors le schéma est stable en $\|.\|_\infty$ si et seulement si $\|A\|_\infty\leq 1$. Comme $\|A\|_\infty=1+2r>1$, le schéma est instable en $\|.\|_\infty$.
<u>Exercice 03:</u> Soit l'équation de transport suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\alpha u=0 \text{ dans }]0,1[\times]0,T[,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=u_0(x) \text{ donnée,} \\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ \forall t\in[0,T], \end{cases}$$

on considère le schéma aux différences finies suivant:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\triangle t}+\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\triangle x}+\alpha u_i^n=0. \tag{3}$$

1) Montrer que ce schéma est consistant et déterminer son ordre.
2) Montrer que u_i^{n+1} peut s'écrire sous la forme

$$u_i^{n+1}=\gamma_1 u_{i-1}^n+\gamma_2 u_i^n\ ,$$

où γ_1, γ_2 sont des coefficients réels à déterminer.
3) Sous quelle condition on obtient l'inégalité suivante:

$$\left\|U^{n+1}\right\|_\infty \leq (1-\alpha\triangle t)\left\|U^n\right\|_\infty, \ \forall n \geq 0.$$

4) En déduire que sous certaines conditions, le schéma est $L^\infty-$stable.
Solution
2) D'après l'équation (3), on a

$$u_i^{n+1} = \frac{\triangle t}{\triangle x} u_{i-1}^n + \left(1 - \alpha\triangle t - \frac{\triangle t}{\triangle x}\right) u_i^n,$$

d'où $\gamma_1 = \frac{\triangle t}{\triangle x}$, $\gamma_2 = 1 - \alpha\triangle t - \frac{\triangle t}{\triangle x}$.
3) D'après la formule précédente, il vient $U^{n+1} = AU^n$, où

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

alors sous la condition $(\gamma_2 \geq 0)$, on obtient $\|A\|_\infty = \gamma_1 + \gamma_2 = 1 - \alpha\triangle t$, ceci implique que $\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|U^n\|_\infty \leq (1-\alpha\triangle t)\|U^n\|_\infty$.
4) Si de plus $\alpha \geq 0$, $0 \leq 1 - \alpha\triangle t \leq 1$, donc $\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^0\|_\infty$, enfin le schéma est $L^\infty-$stable.
Exercice 04: On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation de la chaleur suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \text{ dans }]0,1[\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ donnée}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

à l'aide du $\theta-$schéma, on a

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} - \left[(1-\theta)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\triangle x)^2} + \theta\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\triangle x)^2}\right] = 0, \ \theta \in [0,1],$$

1) Quel est le type du schéma dans les cas suivants: $\theta = 0$, $\theta = 1$.
2) Pour $\theta = \frac{1}{2}$, ce schéma s'appelle schéma de Crank-Nicholson. Donner l'expression de sa formule et étudier la stabilité dans ce cas.
Solution
1) Pour $\theta = 0$, on trouve le schéma explicite d'Euler et pour $\theta = 1$, on trouve le schéma implicite d'Euler.
2) pour $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2(\triangle x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2(\triangle x)^2},$$

d'après un simple calcul, on a

$$u_i^{n+1} = (1-r)\,u_i^n - r u_i^{n+1} + \frac{r}{2}u_{i-1}^n + \frac{r}{2}u_{i-1}^{n+1} + \frac{r}{2}u_{i+1}^n + \frac{r}{2}u_{i+1}^{n+1},\ \text{où } r = \frac{\triangle t}{(\triangle x)^2}. \qquad (4)$$

On utilise maintenant la condition de Von Neumann pour examiner la stabilité en L^2 comme suit:
on remplace u_i^n par sa transformée de Fourier, i.e, $u_i^n(\zeta) = \hat{u}^n(\zeta)\,e^{i\zeta x_i}$, alors à partir de l'équation (4), on a

$$\left(1 + r - \frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x} - \frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)\hat{u}^{n+1}(\zeta)\,e^{i\zeta x_i} = \left(1 - r + \frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x} + \frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)\hat{u}^n(\zeta)\,e^{i\zeta x_i},$$

il vient

$$\hat{u}^{n+1}(\zeta) = \frac{\left(1 - r + \frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x} + \frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)}{\left(1 + r - \frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x} - \frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)}\hat{u}^n(\zeta) = G(\triangle t, \triangle x, \zeta)\,\hat{u}^n(\zeta)$$

alors selon la condition de Von Neumann, le schéma est stable en L^2 si et seulement si $\underset{\zeta\in\mathbb{R}}{sup}\,|G(\triangle t, \triangle x, \zeta)| \leq 1$.

En effet, $G(\triangle t, \triangle x, \zeta) = \frac{\left(1-r+\frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x}+\frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)}{\left(1+r-\frac{r}{2}e^{-i\zeta\triangle x}-\frac{r}{2}e^{i\zeta\triangle x}\right)} = \frac{1-r+r\cos(\zeta\triangle x)}{1+r-r\cos(\zeta\triangle x)}$, et $|G(\triangle t, \triangle x, \zeta)| = \left|\frac{1-2r\sin^2\left(\frac{\zeta\triangle x}{2}\right)}{1+2r\sin^2\left(\frac{\zeta\triangle x}{2}\right)}\right|$
.

Pour $r \leq \frac{1}{2}$, $\left|\frac{1-2r\sin^2\left(\frac{\zeta\triangle x}{2}\right)}{1+2r\sin^2\left(\frac{\zeta\triangle x}{2}\right)}\right| \leq 1$, donc le schéma est stable.