جامعة الوادي　　　كلـيـــة العلـــــوم الدقيقه　　　قسم الرياضيات　　　السنة الثانية ماستر

فــرض في مادة التحليــل المركب　　　05 جانفييه 2022

التمرين الأول نعتبــر التكامل العددي الحقيقي

$$\lambda = \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta}\, d\theta$$

1- وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.
2- أحسب هذا التكامل λ.

التمرين الثاني نعتبر الدالة :

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

بحيث : $\cos 2z = \dfrac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}$

لما $z = x + iy$ ، أثبت المحدودية :

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2}\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{y} - e^{-y}}$$

استنتج ما يلي :

$$|y| > 1 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{2}\frac{e^{2} - e^{-2}}{e + e^{-1}}$$

التمرين الثالث أحسب الراسب عند كـل قطب مع تحديد الطبيعه والتكراريه للدالة :

$$f(z) = \left(z^2 - 1\right)\frac{1 - e^{\frac{1}{z}}}{(1-z)^2}$$

للتذكير في حالة استخدام نشــر تايلر السلسله الهندسية ونتائج هذا النشر فان :

$$|z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

التمرين الرابع نعتبر كثير الحدود :

$$f(z) = 3z^{15} + 4z^8 + 6z^5 + 19z^4 + 3z + 2$$

1. أثبت أن كثير الحدود $f(z)$ يملك فقط أربعة جذور تقع على الدائرة الوحدة $C = \{|z| = 1\}$.
2. كيف تحسب التكامل المركب I بحيث :

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

3. لحساب التكامل J على الدائرة $C = \{|z| = r\}$.اقترح قيمة لـ r وتأكد من ذلك باستخدام نظرية روشي (التأكد من وجود الجذور على الدائرة $C = \{|z| = r\}$ المقترحه) بحيث :

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(z^2 - z\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

في الحالة الآتيه :

$$f(z) = 4z^5 - 19z^4 + 9z^3 + 3z + 2$$

أحسب التكامل J.

Enseignant chargé de cours de module : Dr.Rehouma.Abdelhamid