REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar El-Oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Méthode de différences finies pour les équations aux dérivées partielles

Mohammed Beggas

Cours de prémière année master

Table des matières

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équation aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé E.D.P dans la suite . C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'E.D.P que l'on a pu comprendre le rôle de tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Quand sont apparues les E.D.P ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17 éme siècle (Newton, Leibniz). Ensuite le "catalogue" des E.D.P s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique . S'il ne faut retenir que quelque noms,on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équation de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'equation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme et Heisenberg pour les équation de la théorie de la relativité.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des E.D.P, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématique peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêment puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées.C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météoroqiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation, et de démontre la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises.

En vue de passage d'un problème exacte (continu)au problème approchée (discrét), on dispose plusieurs techniques : les différences finies, les élément finie et les volumes finie.

Nous nous limiterons ici à l'exposé des technique des différences finies.

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans les problème continu par des différences divisées ou un nombre finie de points discrets ou noeuds du maillage

Avantage :grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines de calcules(Simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

Dans de nombreux au domaines de la physique et en particulier dans le cas de la mécanique de fluides, on rencontre une équation aux dérivées partielles très simple modélisant le déplacement d'une grandeur, déplacement d'une quantité de matière, d'une quantité de mouvement ou d'une onde. Ce qui nous permettra d'en déduire des schémas numériques adéquats. C'est l'équation de Poisson.

Le travail présent se décompose en 5 chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux sur les équations aux dérivées partielles et les classiffications des E.D.P du deuxième ordre avec des exemples tirés de la physique.

Quand deuxième chapitre, il est consacré à la méthode de différences finies. Nous exposons le principe de ce méthode.

L'objectif du troisième chapitre est l'approximation de problème elliptique par la méthode de D.F qui transforme le problème continu. à un problème discrét, par la suite nous obtenons une système d'équation linéaire, sa forme matricielle est le suivant :

$$A_h u_h = f$$

en tenant compte de l'analogie de résolution entre le problème continu et le problème discrét.

En finissons par l'approximation de problème parabolique par la méthode de différences finies

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et un rappel sur les matrices que nous utiliserons pas la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < +\infty$*

$L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable, i.e :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } \text{ tel que } \int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx < +\infty \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

• *Pour $p = 1$*

L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace de toute le fonction intégrable sur Ω

• *Pour $p = +\infty$*

$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que : } \exists C > 0 \ |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$. *muni de la* *norme :*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\Big\{C, \ \ tell\ que\ \ |f(x)| < C\ p.p\ sur\ \Omega\Big\} = \sup\ \ essf$$

1.1.2 Espace $C^k([a,b])$

Définition 1.2.
$\Big(f \in C^k[a,b]\Big) \Leftrightarrow \Big(\ f\ \textit{est dérivable jusqu'à l'ordre } k \textit{ et la dérivée d'ordre } k \textit{ est continue}\Big)$.

1.2 Formules de Taylor et développements limités

Nous avons vu précédemment que la dérivation est essentielle dans l'étude des fonctions. On va voir que les développements limités fournissent encore plus de précision dans l'allure et le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné. Une autre application importante de cette notion est le calcul approché de la valeur d'une fonction en un point, en particulier pour celles qui ne sont pas de type polynomial.

1.2.1 Diverses formules de Taylor

Dans toute cette section, on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (n+1)$ fois dérivable.

Formule de Mac-Laurin

On se place dans le cas où l'intervalle $[a,b]$ est de la forme $[0,x]$, x étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n devient :
$f(x)-f(0) = xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}f^{(n+1)}(c)$, où $\quad c \in]0,x[$.

Formule de Taylor-Young

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soit a et x deux points de I. Alors on montre qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \longrightarrow a.$$

Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \longrightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tendant vers a.

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + (x)^n\varepsilon(x) = f(0) + xf^{'}(0) + \frac{1}{2!}x^2 f^{''}(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + (x)^n\varepsilon(x)$.
On peut noter, en utilisant les notations de Landau

$$(x)^n\varepsilon(x) = O(x^n) \qquad (x \longrightarrow 0)$$

et

$$f(x) = f(0) + xf^{'}(0) + \frac{1}{2!}x^2 f^{''}(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

On dira que

$$f(0) + xf^{'}(0) + \frac{1}{2!}x^2 f^{''}(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0),$$

est le développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0.

Généralisation

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f \in C^p(\Omega)$$

Pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i$$

Pour $p = 2$:

$$D^2 f(x_0)(h^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(h_{i_1}, h_{i_2})$$

si on pose :

$$p = n = 2, \qquad x_{i_1} = x, \quad x_{i_2} = y, \qquad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2 f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2$$

Formule de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f(x_0) h^k + O(\|h\|^p)$$

Si $n = p = 2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2\Big]$$

Si $p = 1$, $n = 3$, $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$
$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)h_2 + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)h_3 + O(\|h\|)$.

Exemple 1.1. *Appliquer la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 2 à la fonction* $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y$*, au voisinage de point* $a(1, 2)$*.*
Il est claire que f *est de classe* C^∞ *sur* $\Re^2$*, notons :* $h = (h_1, h_2) = (x - 1, y - 2)$*, la formule de Taylor pour* $(n = p = 2)$ *est*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$
$$+\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2\Big].$$

aprés les calcules des dérivées partielles, on obtient :
$f(h_1, h_2) = 7 + [-h_1 + 11h_2] + \frac{1}{2}[6h_1^2 - 4h_1 h_2 + 12h_2^2] + O(h_1^2 + h_1^2)$

1.3 Opérateurs différentiels

Définition 1.3. *Gradient d'une fonction scalaire* $u = u(x, y, z)$:

$$\vec{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

1.3.1 Divergence de vecteur V

Soit V une fonction vectorielle de 3 variables (x, y, z) définie sur un domine Ω de $\mathbb{R}^3$ et $\grave{a}$ valeurs V_1, V_2, V_3 dans $\mathbb{R}$. On appelle divergence du vecteur V et on note $div(V)$ ou $\nabla.V$, le scalaire :

$$div(V) = \nabla.V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

1.3.2 Laplacien

On appelle Laplacien de u, et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = div(\vec{grad} u) = \nabla.\nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Exemple 1.2. *Soit donné une fonction scalaire de* $\Re^3$ *définie par :* $u(x, y, z) = 2x^2y + zy^3 - 3z$.

$$\vec{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} 4xy \\ \\ 2x^2 + 3zy^2 \\ \\ -3 \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

$div(\vec{grad} u) = 4y + 6zy$

Donc

$\Delta u = div(gr\vec{a}du) = 4y + 6zy.$

1.3.3 La fonction harmonique

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et f une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le Laplacien de f défini par : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exemple 1.3. *Soit f une fonction définie sur $\Re^2 - \{0,0\}$ par :$f(x,y) = ln(x^2+y^2)$, il est claire que : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.*
Donc la fonction f est harmonique sur $\Re^2 - \{0,0\}$.

1.4 Rappels sur les matrices

1.4.1 Norme matricielle

Définition 1.4. *On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)toute application vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

$\| A \| > 0 \Leftrightarrow A > 0.$

2. $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$

3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|, \quad \forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ *(inégalité triangulaire)*

4. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \quad \forall (A,B) \in M_n((\mathbb{K})^2$

Par exemple :

$$\| \cdot \|_1 = \max_{j=1\cdots n} \sum_{i=1}^{n} | a_{i,j} | .$$

$$\| \cdot \|_\infty = \max_{i=1\cdots n} \sum_{j=1}^{n} | a_{i,j} | .$$

1.4.2 Valeur propre

Définition 1.5. *1 Soit A une matrice carrée d'ordre n. Un vectur propre de A est un vecteur non nul $\vec{X}$ tel que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, pour un certain scalaire λ.*

2 Un scalaire λ est appelé une valeur propre de A si l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ admet une solution non triviale $\vec{X}$; $\vec{X}$ est appelé le vecteur propre associé à λ.

Remarque 1.1. *1 λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation*

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0 \qquad (\star)$$

2 L'espace solution de $(\star)$ n'est pas autre que $\ker(A - \lambda I)$. Cet espace est appelé l'espace propre de A associé à valeur propre λ.

1.4.3 Rayon spectrale

Spectre

Le spectre $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \quad A - \lambda I \qquad \text{singulière }\}.$$

Le rayon spectrale de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \quad \lambda \in \sigma(A)\}$$

1.4.4 Matrices particuliers

1 **Transposée d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$. La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ij}$.

2 **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carrée telle que : $A = A^t$

3 **Matrice définie positive (forme quadratique)**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^t AX$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$X^t AX > 0 \qquad \forall X \neq 0$$

Remarque 1.2.

Si $\quad X^t AX \geq 0 \qquad \forall X \neq 0$

La matrice est positive mais non définie.

Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

4 **Matrice unité**

La matrice unité noté I est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

5 **Matrice diagonale**

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \\ \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases}$$

6 **Matrice par blocs**

Une matrice par blocs $A = (A_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ est une matrice dont les entrées (a_{ij} sont des mtrices au lieu d'être des scalaire.

On doit toutefois respecter les deux règles suivants :

1. Toutes les matrices d'un même ligne (A_{ij} avec $1 \leq j \leq n$) ont même nombre de ligne.
2. Toutes les matrices d'un même colonne (A_{ij} avec $1 \leq i \leq n$) ont même nombre de colonnes. Ainsi, il existe des nombre entiers m_i et n_j tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

7 **Matrice bande (tridiagonale)**

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (ou $\mathbb{C}^{m\times n}$) est une matrice bande si elle n'admet des éléments non nuls que sur un "certain nombre" de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément, on dit que A est une matrice bande-p inférieure si $a_{ij} = 0$ quand $i < j + p$ et bande-q supérieure si $a_{ij} = 0$ quand $j > i + q$.

On appelle simplement matrice bande-p une matrice qu'est bande-p inférieure et supérieure.

8 **Matrice tridiagonale par blocs**

Soit la matrice tridiagonale$A$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définie la matrice tridiagonale par blocs tel que :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & \cdots & 0 \\ A_{21} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont de sous-matrices de A.

Définition 1.6. ***Matrices monotones***

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est dite monotone si A est inversible et si $A^{-1} \geq 0$ i.e. tous les coeficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Exercices

Exercice 1

Appliquer la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 2 à la fonction $f(x, y) = y^2 + y \sin x$, au voisinage de point $M(0, 1)$.

Exercice 2

Soit $f(U)$ une fonction dérivable. calculer les dérivées partielles premières de la fonction g définie par :

$$g(x, y) = f(\frac{y}{x}).$$

cas particulier $f = arctan$.

Exercice 3 Appliquer la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 3 à la fonction : $f(x, y) = e^x ln(1 - y)$ au voisinage de l'origine.

Exercice 4

Soit la matrice tridiagonale A de $R^{n \times n}$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & 0 \\ . & . & 2 & . & 0 \\ . & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est symétrique et définie positive.

Chapitre 2

Généralité Sur les équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions qui concerne les équations aux dérivées partielles, ainsi des phénomènes physiques modéliser par des équations aux dérivées partielles (en abrégé E.D.P).

2.1 Généralités

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables u et ses dérivées partielles et une fonction f donnée :

$$F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = f \tag{2.1}$$

Ω est une ouvert de $\mathbb{R}^n$, F est une fonction de plusieurs variable réelles. L'ordre de dérivation le plus élève est appelé l'ordre de l'E.D.P.

Remarque 2.1.

1 Notons que si $n = 1$*, alors l'E.D.P est une équation différentielle ordinaire (E.D.O).*

2 Si dans (1.1) f *est nulle, on dit que l'équation est homogène.*

Définition 2.1.

Si u est ses dérivées apparaissent séparément dans l'E.D.P, celle ci est dit linéaire.

Exemple 2.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1^{er} *ordre linéaire et homogène.*

Définition 2.2.

Si u n'est pas linéaire en au moins une dérivée dans l'E.D.P, alors l'E.D.P est non linéaire.

Exemple 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

2^{eme} *ordre et non linéaire.*

Exemple 2.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f$$

3^{eme} *ordre linéaire*

La forme la plus générale pour une E.D.P linéaire du 1^{er} ordre est :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y)$$

2.1.1 E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2

Elles sont de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \tag{2.2}$$

les trois premier temes A, B, C sont des constantes.

2.1.2 Classification

Le type de l'E.D.P (1.2) dépend de signe de $B^2 - 4AC$

- Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'E.D.P est dit hyperbolique .
- Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'E.D.P est dit parabolique.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'E.D.P est dit elliptique.

Exemple 2.4.

1) L'équation des ondes hyperbolique est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \qquad C > 0$$

$$B^2 - 4AC = 4C^2$$

2) L'équation de la diffusion parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad d > 0$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

3) L'équation de Laplace elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.1.3 Le problème aux limite

Soient u et une E.D.P valide sur un ouvert Ω , les trois principaux types de conditions aux frontières sont :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$, c'est la condition de Dirichlet .
2. On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{grad} u).\vec{n}$ c'est la condition de Neumann .
3. On impose ces deux condition sur $\partial\Omega$ c'est la condition de mixte .

Remarque 2.2.

Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière, on impose souvent des conditions à l'infini .

2.1.4 Condition initiale

Si l'E.D.P modèlise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépende du temps .

Remarque 2.3.
(E.D.P + condition aux limite) $\Rightarrow$ problème aux limite

2.1.5 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limite.

Proposition 2.1. *On dit que (P) bien posé si :*

1. *Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières .*
2. *la solution doit-être unique.*
3. *la solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées*

2.1.6 Problème mal posé

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé .

Exemple 2.5.

$$(P)\begin{cases} u^{''}(x) = 0 \\ u^{'}(a) = u_0 \\ u^{'}(b) = v_0 \end{cases}$$

$u^{''} = 0 \Rightarrow u^{'} = C_1 \Rightarrow u = C_1 x + C_2$
$u^{'}(a) = u_0, u^{'}(b) = v_0$
cas 1 :
Si $u_0 \neq v_0$ le problème (P) n'admet aucune solution.
cas 2 :

Si $u_0 = v_0$ le problème (P) admet une infini de solution : $u(x) = u_0 x + C$.
Donc le problème (P) est mal posé.

2.2 Quelques modèles tirés de la physique

2.2.1 Problème parabolique

L'équation de la chaleur

On considère une barre de longueur L dont la température est fixée *à* zéro aux extrémités.
L'équation de la température au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) \qquad \forall x \in [0,L] \text{ et } t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad C.I \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad C.L \end{cases}$$

2.2.2 Problème hyperbolique

L'équation des ondes

Proposition 2.2.
Considérons une membrane élastique de surface Ω, plan au repos et fixée sur son bord Γ. Lors de petites vibration transversales, le déplacement normal au plan d'équilibre en tout point x, y de Ω et à chaque instant t est une fonction $u : (x,y,t) \to u(x,y,t)$ qui vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \Delta u + f \qquad \forall (x,y) \in \Omega \quad et \quad \forall t \in [0,T]$$

où C désigne la vitesse des ondes.
Ce problème du second ordre en temps est un modèle de problème hyperbolique. La détermination de la solution nécessite de fixer deux conditions initiales en temps.
En fixant les valeurs du déplacement transversal u et de sa dérivée partielle en temps, au

temps

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = v^0(x,y) \end{cases}$$

on obtient un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.
Les conditions aux limites choisies, pour la membrane fixée sur son bord Γ, *sont des conditions de Dirichlet homogènes mais on pourrait choisir d'autres types de conditions aux limites comme dans les cas stationnaires ou paraboliques.*

Remarque 2.4. ***(Solution stationnaire)***
Lorsque la solution ne dépend plus du temps (régime permanent ou stationnaire) on retrouve une équation déja étudiée de forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad \forall (x,y) \in \Omega \\ \quad + \qquad \textit{Conditions aux limites sur } \Gamma \end{cases}$$

L'équation des ondes et l'équation de la chaleur ont les mêmes expression dans le cas stationnaire. C'est pourquoi les solutions du problème de Poisson ci-dessus peuvent s'interpréter physiquement, *à* la fois comme des déplacements d'une membrane élastique ou des températures.(voir [11]).

2.2.3 Problème elliptique

L'équation de poisson

On considère une membrane élastique plane Ω fixée sur son pour tout Γ.On suppose la membrane soumise en tout point $(x.y)$ *à* une densité de forces f s'exerçant perpendiculairement au plan de la membrane.
Sous l'action de f chaque point de la membrane subit un petit déplacement le déplacement transversal, perpendiculaire au plan de Ω est l'inconnue u de ce problème et vérifie

d'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) \qquad \forall x, y \in \Omega \\ \quad u(x,y) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Gamma \end{cases}$$

Exercices

Exercice1

Donner le classement de EDP suivants :

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$.
2. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.
3. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 0$.
4. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 2

Soit le problème de Neumann (P) pour une fonction u définie sur un intervalle $[a,b]$:

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) est mal posé.

Chapitre 3

Principe de la méthode de différence finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines des calculs (simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

3.0.1 Maillage :

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discréte de la grandeur u ramène à constituer un maillage de l'intervalle de définition.

On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N+1$ points x_i pour $i = 0, ..., N$ régulièrement espaces avec un pas Δx. Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les noeuds du maillage. Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

3.1 Cas D1 :

3.1.1 Dérivée d'order 1 :

Développement de Taylor :

Pour $u \in C^2$ la formule de Tylor à l'order 2 aux point $u(x+h)$, et $u(x-h)$ nous donne :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + +O(\Delta x^2)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + +O(\Delta x^2)$$

3.1.2 L'erreur de Troncature

Définition 3.1.

La puissance de Δx avec le quelle l'erreure de troncature tend vers 0 est appellée : l'ordre de la méthode

Notation :

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ u point x_i, soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i, on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$.
Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u.

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

3.1.3 Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor au voisinage de x_i. On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3)$$

3.1.4 Dérivée d'ordre supérieur :

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i. Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i + O(\Delta x^4)$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre un :

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

$$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

3.2 Cas D2 :

Dans le cas $D2$, considérons une grandeur $u(x, y)$ défnie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en $N \times P$ noeuds (x_i, y_j) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Δy dans l'autre direction. On notera u_{ij} la valeur discréte de la grandeur $u(x, y)$ au noeud (x_i, y_j).

Notation :

$u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y) \qquad i, j \in \mathbb{Z}$

$u(x, y)$: est décomposé en $N \times P$ noeuds (x_i, y_j)

Δx : un pas dans la direction de x

Δy : un pas dans la direction de y

3.2.1 Dérivée premiére

De la même manière que dans le cas en dimension un, on obtient pour D2 les approximations suivants :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \qquad \text{différences finies (D.F) centre}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \text{D.F avant}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta) \qquad \text{D.F arrière}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \qquad \text{D.F centre}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \qquad \text{D.F avant}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \qquad \text{D.F arrière}$$

Remarque 3.1.

Pour obtenir de ordres superieurs il faut utiliser plusieur noeuds au voisinage de (x_i, y_j)

Exemple 3.1. *Un schémas aux D.F d'ordre* 3 *par la dérivée première est*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2,j} + 6u_{i+1,j} - 3u_{i,j} - 3u_{i-1,j}}{6 \vartriangle x} + O(\vartriangle x^3)$$

3.2.2 Dérivée d'ordre supérieur

Développement de Taylor

$$u(x_i + \vartriangle, j) = u_{i,j} + \vartriangle x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\vartriangle x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\vartriangle x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\vartriangle x^4)$$

$u(x_i - \triangle, j) = u_{i,j} - \triangle\, x\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)_i + \dfrac{\triangle\, x^2}{2!}\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i - \dfrac{\triangle\, x^3}{3!}\Big(\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_i + O(\triangle\, x^4)$

Par sommation on obtient :

$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \triangle\, x^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i + O(\triangle\, x^4)$

$\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\triangle\, x^2} + O(\triangle\ x^2)$ D.F. centre d'ordre 2 par rapport à x

$\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)_i = \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\triangle\, y^2} + O(\triangle\, y^2)$ D.F.centre d'ordre 2 par rapport à y

La méthode de différence finie repose sur les trois principes suivants :

1) **Consistance** :

   Posons $L : u \longrightarrow -u''$ opérateur de (P_c)

   $L_h \longrightarrow D_h(D_h u)$ opérateur de (P_h)

   L'erreur de consistance de (P_h) par rapport à (P_c) est défini par :

$$R_h(u) = L(u(x)) - L_h(u(x))$$

   La problème (P_h) est dit consistance par rapport à (P_c) si

   $R_h \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$

2) **Stabilité :**

   On dit que le problème (P_h) est stable si pour toute fonction f.la solution correspпendante u_h de (P_h) avec f est bornée par la donnée f.

   La notion de stabilité dépend de la norme utilisées.

3) **Convergence :**

   En générale :(Consistance + Stabilité) $\Rightarrow$ Convergence

   Le théorème de Lax :

   Dans un problème bien posé. et avec un schéma numérique consistance ,la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Exercices

Exercice 1

Appliquer la formule de Taylor à la fonction $u(x, y)$, pour determiner les schéma de différences d'ordre un suivants :

-Différences finies progressives (en avant).

-Différences finies régressives (en arrière).

Pour l'estimation de la dérivée seconde, au voisinage de (x_i, y_j).

Exercice 2

Soit le schéma aux différences finies :

$$\frac{1}{2h}[4f(x+h) - 3f(x) - f(x+2h)]$$

Montrer la consistance du schéma avec f'.

Montrer que l'erreure de consistance est d'ordre 2.

Exercice 3

Appliquer la formule de Taylor à la fonction $u(x, y)$ au voisinage de (x_i, y_j), pour donner une approximtion en différences finies de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Utiliser les noeuds : (i+1,j+1),(i+1,j-1), (i-1,j-1),(i-1,j+1).

Exercice 4

Soit le schéma aux différences finies :

$$\frac{1}{h^2}[af(x-h) + bf(x) + cf(x+2h)]$$

Trouver les coefficients a,b,c tels que ce schéma est consistant(d'ordre 1) avec la dérivée seconde, au voisinage de (x).

Chapitre 4

Approximation par D.F de problème elliptique

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann.
Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Cas particulier : l'équation de Laplace

Si f = 0, on obtient une équation de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.1 Introduction du modèle

Le problème modéle est le suivant :

L'équation de Poisson avec le condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n \\ \quad u = g \qquad sur\, \partial\Omega \end{cases}$$

4.2 Problème continu en D1

$$(P_c) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ \quad u(a) = u(b) = g \end{cases}$$

4.2.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Pour $f \in C^0([0,1])$, $\exists! u \in C^2([0,1])$ (solution classique) de (P_c) (voir [2]).

4.2.2 Principe du maximum continu

Proposition 4.1. *[2]*

Soit $f \in C^0([0,1])$, *et* $u \in C^2([0,1])$ *la solution de* (P_c), *Alors :*

1 $f \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

2 $f \leqslant 0 \Rightarrow u \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

3 $f = 0$ *alors :* $\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$

4 $f \geqslant 0$ *et* $\inf_{\partial\Omega} u \geqslant 0$ *Alors* $u \geqslant 0$ *dans* Ω

4.3 Problème discret en D1

On discrétise l'intervalle continue $[a, b]$, en un nombre finie des points x_i :

Déscrétisation uniforme

$x_i - x_{i-1} = h = x_{i+1} - x_i \quad$ (h : le pas de discrétisation)

En utilisant le différence finie centrée, le problème approché (P_h) s'écrit dans ce cas de la façon suivant :

Trouver les u_i tel que :

$$(P_h) \begin{cases} -\frac{u_{i+1-2u_i+u_{i-1}}}{h^2} = f_i \qquad i = 1...N \\ u_0 = u_{N+1} = g \end{cases}$$

$\Omega_h = \Big\{ x_i = ih; \quad 1 \leq i \leq N \Big\}$

on peut écrire le système précédent sous forme matricielle, où les inconnues sont regroupes dans le vecteur $u_h = (u_1, u_2...u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ qui vérifie :

$$A_h U_h = b$$

A_h matrice de taille $N \times N$ est donnée par :

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \\ \vdots \\ \\ f_N \end{pmatrix}$$

A_h : matrice carrée tridiagonale.

Proposition 4.2. *[4]*

Pour que le problème (P_h) admet une solution discrète unique il faut et il suffit que la matrice A_h soit symétrique et définie positive.

L'existence et l'unicité de la solution discrète du problème (P_h)

1- **La matrice** A_h **est symétrique :**

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} = A_h^t$$

A_h est symétrique car $A_h^t = A_h$ (clair)

2- **La matrice** A_h**est définie positive :**

$\forall X \in \mathbb{R}^N \quad X^t A_h X > 0$

On pose N=5

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3 - x_4, -x_3 + 2x_4 - x_5, -x_4 + x_5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + (-x_2 + 2x_3 - x_4)x_3 + (-x_3 + 2x_4 - x_5)x_4 + (-x_4 + x_5)x_5$

$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 - x_3x_4 - x_3x_4 + 2x_4^2 - x_4x_5 - x_4x_5 + 2x_5^2$

$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2 - 2x_4x_5 + 2x_5^2$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_1^2 + x_5^2 > 0$

donc A_h est définie positive.

Généralisation :

pour $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$; $X \in \mathbb{R}^N$

$$X^tAX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, \cdots, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}, \cdots, -x_{N-1} + 2x_N) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_N \end{pmatrix}$$

$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \cdots + (-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1})x_i + \cdots + (-x_{N-1} + 2x_N)x_N$

$$= 2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^{N} x_{i+1}^2$$

$$= x_1^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_{i+1}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i^2 - 2x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_1^2 + x_N^2 > 0$$

Alors $X^tA_hX > 0$ donc A_h défini positive

A_h est symétrique et défini positive, alors d'aprés la proposition (3.3.1) le problème (P_h) admet une solution discrète unique.

4.3.1 Consistance :

Proposition 4.3. *[2]*

(P_h) est consistance par rapport à (P_c) et on a : si $u \in C^4([0,1])$:

$$\|R_h U\|_{h,\infty} \leqslant \frac{1}{12}\|U^{(4)}\|_\infty h^2$$

$$\left|-u''(x) + \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}\right| = \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2))$$
$$\|R_h U\|_{h,\infty} \leqslant \frac{h^2}{24} \times 2\max(u^{(4)}(\theta_1), u^{(4)}(\theta_2))$$
$$\leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty$$

Poson : $c = \frac{1}{12}\|u^{(4)}\|_\infty$

Alors : $\|R_h U\|_{h,\infty} \leqslant Ch^2$

Consistance d'ordre 2.

4.3.2 Principe du maximum discret

Proposition 4.4. *[2]*

Une matrice A est monotone si et seulement si :

$$(AX \geqslant 0 \Longrightarrow X \geqslant 0)$$

Proposition 4.5. *[2]*

Si $f \geqslant 0$, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :

$$U_h \geqslant 0$$

Le monotone de la matrice A_h, nous assure le principe du maximum discret :

$$A_hU_h = b$$

Si $b \geqslant 0 \Longrightarrow A_hU_h \geqslant 0 \Longrightarrow U_h \geqslant 0$

4.3.3 Stabilité

Soient u solution de (P_c) : $LU = f$ dans Ω et U_h solution de (P_h) :$L_hU_h = f$ dans Ω
on a : $LU - L_hU_h = 0$ dans Ω_h
Donc : $LU - L_hU + L_hU - L_hU_h = 0$
d'où : $R_hU + L_h(U - U_h) = 0$
où R_hU est l'erreur de consistance on obtient :

$$R_hU = L_h(U_h - U) \text{ dans } \Omega_h$$

On a : $\|R_h\|_{h,\infty} \leqslant Ch^2$
Si U est suffisamment régulière on veut savoir si $U - U_h$ est petite quad R_h est petite $(h \longrightarrow 0)$ c'est la notion de stabilité.
On va montrer que le problème (P_h) est stable pour la norme discéte du maximun
(la norme de la convergence uniforme).

Proposition 4.6. *[2]*
Si la matrice A_h est monotone, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :
$A_hU_h = b$ *par conséquent on a :*
$\|U_h\|_{h,\infty} = \|U_h\|_\infty = \|A_h^{-1}b\|_\infty \leqslant \|A_h^{-1}\|\|f\|_\infty$
on a : $\|A_h^{-1}\| \leqslant \frac{1}{8}$
Donc : $\|U_h\|_{h,\infty} \leqslant \frac{1}{8}\|f\|_\infty$

4.3.4 Convergence

Théorème 4.1. *[2]*

Soit $f \in C^2([0,1])$

on note U la solution de (P_c) et U_h la solution de (P_h). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendant de h telle que :

$$\|U - U_h\|_{h,\infty} \leqslant C\|f^{(2)}\|_\infty h^2$$

Remarque 4.1.

En particulièr, la matrice de discrétisation de $(-u^{''})$ avec conditions aux limites de Newman homogènes :

$$\begin{cases} -u^{''}(x) = f(x) \quad a < x < b \\ \quad u^{'}(a) = u^{'}(b) = 0 \end{cases}$$

donne une matrice A_h qui est symétrique et positive, mais non définie, d'où l'unicité n'est pas vérifiée.

4.4 Problème continu en D2

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,on considère le problème continu suivant :

Trouver $u(x,y)$ qui vérifie :

$$(P_c) \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction donnée régulière dans Ω.

Le problème (P_c) admet une solution exacte unique.

On considère :

- un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (rectangulaire)
- une fonction $f \in C^1(\Omega)$ et une fonction $g \in (\partial\Omega)$.

4.4.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Théorème 4.2. *[8]*

Pour $f \in C^1(\Omega)$ *le problème* (P_c)*. Admet une solution unique* u *régulière .*

4.4.2 Principe du maximum continu

Proposition 4.7. *[6]*

Soit $f \in C^0([0,1])$*, et* $u \in C^2([0,1])$ *la solution de* (P_c)*, Alors :*

1 $f \geqslant 0 \Rightarrow u \geqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

2 $f \leqslant 0 \Rightarrow u \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$

3 $f = 0$ *alors :* $\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u$

4 $f \geqslant 0$ *et* $\inf_{\partial\Omega} u \geqslant 0$ *Alors* $u \geqslant 0$ *dans* Ω

4.5 Problème discret en D2

Un schéma à 5 points pour le Laplacien :

choisissant : $\Omega =]0,a[\times]0,b[$

pas discrétisation : $\Delta x = \dfrac{a}{N+1}$; $\Delta y = \dfrac{b}{M+1}$

tel que : $x_i = i\Delta x, \quad i = 0...N+1$

$y_j = j\Delta y, \quad j = 0...M+1$

on défini Ω_h le maillage intérieur à Ω par :

$$\Omega_h = \Big\{ P_{i,j} = (x_i, y_j) \qquad , i = 1...N, j = 1...M \Big\}$$

$$\partial\Omega_h = \Big\{ P_{i,j} = (x_i, y_j) \qquad , avec \quad i = 0 \, ou \, N+1, j = 0 \, ou \, M+1 \Big\}$$

Le problème approché (discret)

S'écrit alors : trouve $u_h = u_h(x_i, y_j)$ tell que :

$$(P_h)\begin{cases} -\Delta_h u_h = f(x_i, y_j) \qquad dans \quad \Omega \\ \\ u_h = 0 \qquad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Δ_h est le schéma de différence finie pour Δ :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Notre problème devient :

$$\frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N \,;\, 1 \leq j \leq M$

avec le conditions aux limites :

$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \,;\, 0 \leq j \leq M+1$

$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0 \,;\, 0 \leq i \leq N+1$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N\times M}; b \in \mathbb{R}^{N\times M}$

$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{N,1}, u_{N,2}, \cdots, u_{N,M})^t$

$b = (f(x_1, y_1), \cdots, f(x_N, y_M))^t$

où $u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons défini la forme de la matrice ce A_h (pour simplifier) dans le cas

d'un maillage uniforme :

où $\Delta x = \Delta y = h$ on a :

$\frac{1}{h^2}(4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = f_{i,j}$

$j = 1, \quad i = 1 \cdots N$

$$\begin{cases} i = 1 \quad \frac{1}{h^2}(4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0}) = f_{1,1} \\ i = 2 \quad \frac{1}{h^2}(4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0}) = f_{2,1} \\ \vdots \\ i = N \quad \frac{1}{h^2}(4u_{N,1} - u_{N+1,1} - u_{N-1,1} - u_{N,2} - u_{N,0}) = f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} D_N & -I_N & & & \\ -I_N & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N \times N$

D_N : matrice carrée $(N \times N)$ donnée par :

$$D_N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad I_N = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs,puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible.alors la matrice A_h est inversible donc le système $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

4.5.1 Consistence

Pour $u \in C^4(\Omega)$ on obtient au point $P_{i,j} = (x_i, y_j) \in \Omega_h$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta x^2}{24}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y_j)\Big]$$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta y^2}{24}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_4)\Big]$$

$x_i \leq \theta_1 \leq x_{i+1}, x_{i-1} \leq \theta_2 \leq x_i, y_j \leq \theta_3 \leq y_{j+1}, y_{j-1} \leq \theta_4 \leq y_j$
on a : $R_h u = \Delta u(x_i, y_j) - \Delta_h u(x_i, y_j)$
donc $\| R_h u \|_{h,\infty} \leq \dfrac{h^2}{6} M_4(u)$
où $M_4(u) = max\Big(\Big\|\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big\|_\infty, \Big\|\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big\|_\infty\Big)$
L'erreur de consistence est donc d'ordre 2.

4.5.2 Stabilité

Proposition 4.8. *[6]*
A_h est un matrice symétrique définie positive et de plus monotone alors :
$A_h^{-1} \geq 0$ et $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{16}(a^2 + b^2)$
donc

$$A_h u_h = b \Rightarrow u_h = A_h^{-1} b$$

$$\begin{aligned}\|u_h\|_\infty &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|b\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2)\|f\|_\infty\end{aligned}$$

4.5.3 Convergence

On note u la solution de (P_c) $(u \in C^4(\Omega))$ et u_h la solution de (P_h).Il existe une constante $C > 0$ indépendante de la tellque :

$$\|u - u_h\|_{h,\infty} \leq C M_4(u) h^2$$

avec $M_4(u) = max(\|.\|_\infty, \|.\|_\infty)$ et $C = \dfrac{a^2+b^2}{96}$

Remarque 4.2.

Maillage non uniforme $\Delta x \neq \Delta y$

Notre problème (P_h) devient :

$$\frac{-u_{i+1,j}+2u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{-u_{i,j+1}+2u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y^2}=f(x_i,y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N\,;\, 1 \leq j \leq M$

avec les conditions aux limites :

$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0\,;\quad 0 \leq j \leq M+1$

$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0\,;\quad 0 \leq i \leq N+1$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N\times M}; b \in \mathbb{R}^{N\times M}$

$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{N,1}, u_{N,2}, \cdots, u_{N,M})^t$

$B = (f(x_1,y_1), \cdots, f(x_N,y_M))^t$

où $u_{i,j} = u_h(x_i,y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons la forme de la matrice A_h (pour simplifier) dans le cas d'un maillage non uniforme :

où $\Delta x \neq \Delta y$

on pose $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$ on a :

$\frac{1}{h^2}(2u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j})+\frac{1}{k^2}(2u_{i,j}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}) = f_{i,j}$

$j = 1, i = 1\cdots N$

$$\begin{cases} i=1 \quad \frac{1}{h^2}(2u_{1,1}-u_{2,1}-u_{0,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{1,1}-u_{1,2}-u_{1,0})=f_{1,1} \\ i=2 \quad \frac{1}{h^2}(2u_{2,1}-u_{3,1}-u_{1,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{2,1}-u_{2,2}-u_{2,0})=f_{2,1} \\ \vdots \\ i=N \quad \frac{1}{h^2}(2u_{N,1}-u_{N+1,1}-u_{N-1,1})+\frac{1}{k^2}(2u_{N,1}-u_{N,2}-u_{N,0})=f_{N,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i=1 \quad (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{1,1}-\frac{1}{h^2}u_{2,1}-\frac{1}{h^2}u_{0,1}-\frac{1}{k^2}u_{1,2}-\frac{1}{k^2}u_{1,0}=f_{1,1} \\ i=2 \quad (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{2,1}-\frac{1}{h^2}u_{3,1}-\frac{1}{h^2}u_{1,1}-\frac{1}{k^2}u_{2,2}-\frac{1}{k^2}u_{2,0}=f_{2,1} \\ \vdots \\ i=N \quad (\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2})u_{N,1}-\frac{1}{h^2}u_{N+1,1}-\frac{1}{h^2}u_{N-1,1}-\frac{1}{k^2}u_{N,2}-\frac{1}{k^2}u_{N,0}=f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} D_N & -I_N & & & \\ -I_N & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N \times N$

D_N : matrice carrée $(N \times N)$ donnée par :

$$D_N = \begin{pmatrix} \frac{2h^2}{k^2}+2 & -\frac{h^2}{k^2} & & & \\ -\frac{h^2}{k^2} & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -\frac{h^2}{k^2} \\ & & & -\frac{h^2}{k^2} & \frac{2h^2}{k^2}+2 \end{pmatrix} \qquad I_N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs, puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible. alors la matrice A_h est inversible donc le systéme $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

4.6 *Applications*

Pour montrer l'analogie entre le problème continue et son analogie discret, on va donner deux applications, la première application concerne un problème mal posé au cas continue ou on va avoire la même résultat au cas discret.
La deuxième concerne la résolution numérique de l'équation de Poisson en dimension deux, en appliquant le schéma à 5 points.

4.6.1 Première application

Soit le problème (P) :

$$(P)\begin{cases} -u'' = 1 \qquad \text{dans }]0,1[\\ \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) (P) est mal posé.

$-u'' = 1 \Longrightarrow u'' = -1 \Longrightarrow u' = -x + c_1 \Longrightarrow u = \dfrac{-x^2}{2} + c_1x + c_2$

$u'(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

$u'(1) = 0 \Longrightarrow -1 + c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1$

donc le problème (P) dmet une infini de solution.

donc le problème (P) mal posé.

On va montre que le problème (P_h) est aussi mal posé numériquement.

$$(P_h)\begin{cases} -\Big(\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\Big) = 1 \qquad \text{dans }]0,1[\\ \\ u'(0) = u'(N+1) = 0 \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq 4$

avec le condition aux limites :

Nous utilisons :

2) $u'_i = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} \Longrightarrow u'_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h} = 0 \Longrightarrow (u_1 - u_0)4 = 0 \Longrightarrow u_0 = u_1$

3) $u'_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h} \Longrightarrow u'_{N+1} = \dfrac{u_N - u_{N-1}}{h} = (u_N - u_{N-1})4 = 0 \Longrightarrow u_3 = u_4$

le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{3\times 3}, b \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$u_h = (u_1, u_2, u_3)^t$

$b = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$

où $u_i = u(x_i)$

4) $-(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = h^2 \Longrightarrow -(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = \dfrac{1}{16}$

la forme matricielle :

$1 \leq i \leq N$

$$\begin{cases} i=1 \quad -u_2 - u_0 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i=2 \quad -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i=3 \quad -u_4 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i=1 \quad -u_2 - u_1 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i=2 \quad -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i=3 \quad -u_3 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textbf{le système linéaire :} \\ A_h U_h = b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Existence et unicité

Pour que le problème P_h admet une solution

1 A_h symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_h^t$$

donc A_h symétrique

2 A_h n'est pas définie car :

$$X^t AX = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0$$

pour $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$: $X^t AX = 0$

Donc : la matrice A_h est symétrique et positive mais non définie.

Alors : d'aprés la proposition (3.3.1) le problème P_h n'admet pas une solution discréte unique d'où : le problème (P_h) est aussi mal posé.

4.7 Deuxième application

Soit l'équation de Laplace en D2 avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 9 \\ u(x,1) = x \,;\, u(1,y) = y \\ u(0,y) = u(y,0) = 0 \end{cases}$$

Choisissant $n = m = 3$ et $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$

1 **La matrice de discrétisation :**

Notre problème devient :

$$-\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2} = 9$$

$u_{i,m+1} = i$, $u_{n+1,j} = j \quad 0 \leq i \leq n$

$u_{0,j} = u_{j,0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m$

on a $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$ et $m = n = 3$ où $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$

$$\Omega_{h,k} = \begin{Bmatrix} x_i = ih & 0 \leq i \leq 3 \\ y_i = jk & 0 \leq j \leq 3 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 9\Delta x^2$

$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 1$

La forme matricielle :

$$\begin{cases} i=1,\ j=1 & -u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} + 4u_{1,1} = 1 \\ i=1,\ j=2 & -u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ i=2,\ j=1 & -u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} + 4u_{2,1} = 1 \\ i=2,\ j=2 & -u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} = 1 \\ -u_{2,2} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ -u_{1,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} = 1 \\ -u_{1,2} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Le système linéaire :

$$A_h u_h = b.$$

Où

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'existence et unicité de la solution discrète du $(P_h$:

1) La matrice A_h est symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = A_h^t$$

Donc A_h symétrique car : $A_h^t = A_h$

2) La matrice A_h est définie positive :

$\forall X \in \mathbb{R}^N \qquad X^t A_h X > 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$

Donc A_h est défini positive, alors (P_h) admet la solution unique.

Exercices

Exercice 1

Soit le problème (P) pour une fonction $u(x)$ définie sur un intervalle $[0,4]$:

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x) \quad x \in]0,4[\\ u(0) = \alpha \\ u(4) = \beta \end{cases}$$

où $c \geq 0, f \in C([0,4],\mathrm{R})$ et la fonction u de classe C^4.

1. Exprimer le problème discret (P_h) associé à (P),en utilisant le schéma aux différences finies centrées.

   On supposera que le maillage est uniforme et de pas $\triangle x = h = 1$.

2. Mettre(P_h) sous forme matricielle :

   $$AU_h = b$$

   .

   Déterminer la matrice A et les vecteurs : U_h, b

3. Montrer que le problème (P_h), admet une solution unique.

Chapitre 5

Approximation par D.F de problème parabolique

5.1 Le problème continu D1

Soit le problème parabolique en dimension un suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t \in]0,T[\end{cases} \tag{5.0}$$

Remarque 5.1. *(P) est le problème de la chaleur ou : $f = 0$ et $V = 1$, avec les condition homogène ; $Q_T =]0,1[\times]0,T[$*

Théorème 5.1. *Si $u_0 \in C(]0,1[, R)$, alors le problème (P) admet une solution unique et $u \in C^2(Q_T, R) \cap C(\bar{Q}_T, R)$.*

Proposition 5.1. *(Principe du maximum)*
Soit u la solution de (P) alors :

1 Si $u_0(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$,alors :
$u(x,t) \geq 0 \qquad (x,t) \in Q_T$

2 $\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(]0,1[)}$

5.1.1 Schéma aux différences finies

On discrétise d'une façon uniforme les intervalles d'espace et du temps :

$$x_i = \Delta h \qquad t = 1, \cdots, M+1$$

$$t^n = n\Delta t \qquad n = 0, \cdots, N$$

$$h = \Delta x = \frac{1}{M+1}; \Delta t = \frac{T}{N}$$

on cherche alors une approximation $U_i^n \backsimeq u(x_i, t^n)$

de la solution exacte aux noueds P_i^n . Un schéma aux différences finies est dit schéma à un pas si u_i^{n+1} ne dépendent que de U_j^n .

Pour la discrétisation du problème (P) on a trois possibilités pour $(\dfrac{\partial u}{\partial t})$:

Schéma centrée : "le plus naturel"

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} : \qquad instable \quad et \quad inutilisable. \tag{5.0}$$

Schéma décentrée (en avant)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} \qquad onobtient, \tag{5.0}$$

Le schéma d'Euler explicite,

explicite : calcule directe de U^{n+1} en fonction de U^n, le plus simple mais stable sous condition.

Schéma décentrée (en arriérer)

$$\frac{u_i^{n} - u_i^{n-1}}{\Delta t} \qquad on \;\; obtient \tag{5.0}$$

le schéma d'Euler implicite,

implicite : on doit passer par un système linéaire pour trouver U^{n+1} en fonction de u^n.

plus compliqué mais toujours stable. On va étudier les deux schémas d'Euler.

5.1.2 Consistance

Proposition 5.2. *Supposons que la solution u du problème (p) est c^2/t et c^4/x.Alors les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espaces, telle que $|R_n u_i^1| \leqslant c((\Delta t) + h^2$.*

5.1.3 Schéma d'Euler explicite

$$(P_h)\begin{cases} -\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad i = 1, ..., M+1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \qquad n = 1, ..., N \end{cases}$$

Stabilité

Proposition 5.3. *Sous la condition :*$\dfrac{\Delta}{t}h^2 \leqslant \frac{1}{2}$
le schéma explicite du problème (P_h) est stable en norme $\| \bullet \|_\infty$.
la condition ($\dfrac{\Delta}{t}h^2 \leqslant \frac{1}{2}$) s'appelle condition de C.F.L(Courant, Friedrichs, Lewy, 1928).

Démonstration. poson : $r = \dfrac{\Delta t}{h^2}$ □

Le problème(P_h)

$$u_i^{n+1} = (1-2r)u_i^n + u_{i+1}^n + r u_{i-1}^n$$

le membre à droite de cette équation est une combinaison convexe (car $r \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2r \leqslant 1$)

.

On en déduit :

$$|U_i^{n+1}| = |(1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + ru_{i-1}^n| \leqslant (1-2r)|u_i^n| + r|u_{i+1}^n| + r|u_{i-1}^n|$$

passant en$\| \bullet \|_\infty$:

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leqslant (1-2r+r+r)\|U^n\|_\infty$$
$$Donc : \|U^{n+1}\|_\infty \leqslant \|U^n\|_\infty.$$

par récurrence on obtient : $\|U^n\|_\infty \leqslant \|U^0\|_\infty$, u^0 : donnée

c'est le principe du maximum discret.

5.1.4 Convergence

Théorème 5.2. *Sous la condition* $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$*, le schéma explicite de*(P_h) *est convergente en norme* $\|_\infty$

Étude matricielle de la stabilité

on a :

$$U_i^{n+1} = (1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + ru_{i-1}^n$$

on obtient la forme matricielle suivant :

$$U^{n+1} = [I - rA]U^n$$
$$U^{n+1} = CU^n$$

stabilité pour : $\|c\| \leqslant 1$. ou A est la matrice tridiagonale symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.0}$$

les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_K = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)} \qquad K = 1,...,M \tag{5.0}$$

$M+1$: le nombre d'intervalles de discrétisation

Poson : $C = I - rA$ les valeurs propres de C sont

$\mu_k = 1 - r\lambda_k$ Au lieu de la norme $\| \bullet \|_\infty$, on va utiliser la norme euclidienne, car :

La norme euclidienne d'une matrice symétrique est égale à son rayon spectral.

Donc :

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\| &\leqslant \|I - rA\|.\|U^n\|_2 \\ &\rho(I - rA).|u^n\|_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho(I - rA) = \max|1 - 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)}|$$

La condition de stabilité

$\|c\| \leqslant 1$ se traduit donc par :

$$\max|1 - 4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)}| \leqslant 1$$

d'où :

$$4\sin^2\frac{k\pi}{2(M+1)} \leqslant 2$$

alors :

$$r \leqslant \frac{1}{2} : \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

5.1.5 Convergence

Théorème 5.3. *Sous la condition* $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$, *le schéma explicite de* $(P_h) estconvergenteennorme \|_\infty$.

Conclusion

Le schéma d'Euler explicite es simple (pas de système linéaire à résoudre) mais il y a une condition de stabilité à respecter, ce qui limite le pas de tempe pour un pas h donné .

5.2 Schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad i = 1, ..., M+1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \qquad n = 1, ..., N \end{cases}$$

ce schéma est dit implicite car le calcule de la solution au pas de temps $(n+1)$ nécessite la résolution d'un système linéaire.

consistance :(fait)

5.2.1 Stabilité du schéma

de la même manière, on a :

$$u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n$$

peson : $r = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, on obtient :

$$(1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} - ru_{i-1}^{n+1}) = u_i^n$$

La même analyse matricielle conduit au résultat suivant :

$$[I + rA]U^{n+1} = U^n$$

ou : la matrice d'itération c égale à : $c = (I + \frac{\Delta t}{h^2}A)^{-1}$ ses valeurs propres sont : $\mu_k = \frac{1}{1 + r\lambda_k}$ passant au norme :

$$\|U^{n+1}\|_2 \leqslant \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{h^2}\lambda_k}\|U^n\|_2$$

avec :

$$\lambda_1 = 4\sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}$$

on a :

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{h^2}\lambda_k} < 1, \forall k,$$

ce qui entraine la stabilité inconditionnelle du schéma implicite.

5.2.2 Convergence

Soit $\exp^{(n)}$ l'erreur de discrétisation, définie par

$$\exp^{(n)} = U^n_{ex} - U^n_{app} \qquad c'estdire$$
$$\exp^{(n)}_i = u(ih, n\exp^{(n)}) - U^n,$$

Théorème 5.4. *Le schéma implicite est convergente (d'ordre 1 en tempe et 2 en espace), tell que :*

$$\|\exp^{n+1}\|_\infty \leqslant \|\exp^0\|_\infty + TC(\Delta t + h^2),$$

Démonstration. sous condition sur le pas de temps et d'espace. □

Conclusion

Le schéma d'Euler implicite nécessite la résolution d'un système linéaire, mais il es inconditionnellement stable :

Il n'y a pas de restriction sur les pas de temps et d'espace.On peut prendre des pas de tempes assez grands.

5.3 Autres schémas

5.3.1 Schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Big[\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}\Big] \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \text{donnée : C.I} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \qquad \forall n \text{ C. au l} \end{cases}$$

5.3.2 θ-Schéma

$(\theta \in [0,1])$

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n +}{\Delta t} = \theta \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + (1-\theta) \times \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \text{donnée : C.I} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \qquad \forall n \text{ C. au l} \end{cases}$$

Si$(\theta = 0) \Rightarrow t.exp)$

Si$(\theta = 1) \Rightarrow t.imp)$

si$(\theta = \frac{1}{2}) \Rightarrow t.C - N$

Remarque 5.2. *La condition C.F.L se varie selon l'équation étudier.*

Exercices

Exercice 1

Supposons que $u \in C^{2,4}([0,T],[0,1])$ est solution de l'équation de la chaleur.

1. Montrer que l'erreure de consistance pour le schéma explicite est d'ordre 1 en temps et 2 en espace telque :

$$\|R_h u\| \leq C(\triangle t + \triangle x^2)$$

2. Notons que $e^n(u)$ le vecteur de l'erreur au temps t^n, avec : $e_i^n(u) = u_i^n - u(t^n, x_i)$

   Supposons que la condition C.F.L est verifiée montrer que :

$$\|e^n(u)\|_\infty \leq CT(\triangle t + \triangle x^2)$$

textbfExercice 2

Etudier la stabilité du schéma de Crank-Niclson pour l'équation de la chaleur.

Exercice 3 (le problème de transport)

Soit le problème (P) pour une fonction $u(t,x)$ définie sur $[0,T] \times [0,L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Et $u(0,x) = u_0(x)$

1. Montrer que le problème (P_h), en différences finies progressive en temps et régressive en espace est stable sous la condition C.F.L.

2. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle.

3. Trouver l'erreure de consistance.

4. Montrer qu'il existe une constante C tel que : $\|e^n\| \leq Cn\triangle t(\triangle t + \triangle x)$.

Exercice 4

On considère l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial u}{\partial t} - (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0.$

sur un domaine $[0, T] \times \Omega$, On suppose que sur la frontière, la fonction vaut : $u(t, x, y) = 0$, avec la condition initiale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

1. Exprimer le schéma explicite .

2. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle.

3. Etudier la stabilité.

Exercice 5

Soit le problème (P)suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \;\; c > 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad x \leq 0 \\ u(x, 0) = 1 \quad x > 0 \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution unique u suffisamment régulière, pour approcher la solution u de (P), on considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c(\alpha \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \times \triangle x} + \beta \frac{u_{i+2}^n + u_{i-2}^n}{4 \times \Delta x}) = 0,$$

où $\;\; x_i = i\triangle x,\; i \in \mathbb{Z} \;\;$ et $\;\; t^n = n\triangle t,\; n \in \mathbb{N}.$

1. Déterminez α et β pour que le schéma soit d'ordre un en temps et 4 en espace.

2. On pose : $\alpha = 1 \;\;$ et $\;\; \beta = 0$

   Etudier la stabilité du schéma, en utilisant le principe du maximum.

Exercice 6 Soit le problème (P) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\quad a > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

On suppose que (P) admet une solution unique $u \in C^{2,4}([0,T],[0,1])$.

Pour approcher la solution u de (P),on considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\times\triangle x} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad i = 0,...,M \\ \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad n = 1,...,N \end{cases}$$

1. Déterminer l'erreure de consistance du schéma .

2. Etudier la stabilité en norme L^∞.

3. Notons que $e^n(u)$ le vecteur de l'erreur au temps t^n, avec : $e_i^n(u) = u_i^n - u(t^n, x_i)$

   Montrer que :

   $$\|e^n(u)\|_\infty \leq C_2(\triangle t + \triangle x^2)$$

4. Exprimer le problème (P_h) sous forme matricielle, en déduire la matrice d'itération.

Bibliographie

[1] G. Allaire, S.M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices,* Editions Ellipses, Paris (2002).

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications,* Masson, Paris (1983).

[3] P.G. Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'opti-misation.*, Masson (1982).

[4] N.Champagnat , *Différences fnies et analyse numérique matricielle.* Master, France.2010, pp.51.

[5] I.Danaila, Joly, S.M. Kaber, M. Postel *Introduction au calcul scientifique par la pratique,* Dunod, Paris (2005).

[6] R.Herbin,*Cours d'analyse numérique Licence de mathématiques : Université Aix Marseille.* 20 août 2010.

[7] P. Laurent-Gengoux, *Analyse des équations aux dérivées partielles.* École Centrale Paris,2007-2008.

[8] B. Lucquin, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations,* Ellipse (2004).

[9] B. Mohammadi, J-H.Saiac, *Pratique de la simulation numérique,* Dunod, Paris(2003).

[10] M. Picasso AND J. Rappaz , *Introduction a l'analyse numérique. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes,* Lausanne, 1998.

[11] P.A. Raviart and J.M. Thomas , *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.*

[12] J.F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides.*Université de Lorraine, 2011-2012.

[13] E.G. Silva, *Méthodes et Analyse Numériques.* Engineering school, Institut Polytechnique de Grenoble , 2007, pp.99.

[14] M.Zitouni, *Elements D'algebre.*O.P.U 1993.