2022/2021

ثانية ماطاك

حلول تمارين السلسلة

الأستاذ: شامي محمد

التمرين الأول: التدوير لأربعة أرقام معنوية دقيقة.

الخطأ	التدوير	العدد
$0,5 \times 10^{-1}$	$456,9$	$456,872$
$0,5 \times 10^{-3}$	$-5,358$	$-5,357500$
$0,5 \times 10^{-6}$	$0,002342$	$0,0023417$

التمرين الثاني:

الخطأ المطلق للعدد $a=476,6$ هو $\Delta a = 0,05$

الخطأ المطلق للعدد $b=3,11918$ هو $\Delta b = 0,00005$

إذن: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

الخطأ المطلق للمجموع هو: $\Delta_{(a+b)} = 0,050005$

الخطأ النسبي للمجموع هو: $\dfrac{\Delta_{(a+b)}}{|a+b|}$

أي: $\dfrac{0,050005}{479,71918} = 0,0001$

التمرين الثالث:

تقريب الدالة: $f(x)=e^{x}\sin x$ على المجال $[0,1]$

نشر تايلور من المرتبة الثالثة:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

نقوم بحساب المشتقات: $f(0)=0$

$f'(x) = e^{x}(\sin x + \cos x)$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = 2e^{x}\cos x$; $f''(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = 2e^{x}(\cos x - \sin x)$; $f^{(3)}(0) = 2$

إذن: كثير حدود تايلور يكون من الشكل:

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

* الخطأ المرتكب في هذا التقريب يعطى على الشكل:

$$\forall x \in [0,1] ;\ |f(x) - P_3(x)| \leq M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذن: $|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M}{24}$

حيث: $|f^{(4)}(x)| \leq M.$

التمرين الرابع :

حتى تكون كثيرات الحدود $(P_i(x))_{i=0,1,2}$ متعامدة
يجب تحقق :

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_j(x)\,dx = 0 \qquad i \neq j$$

$w(x) = 1$

و

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_i(x)\,dx \neq 0$$

لدينا :

* $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$
* $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = 0$
* $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$

و

* $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_0(x)\,dx = 2$
* $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_1(x)\,dx = \frac{2}{3}$
* $\int_{-1}^{1} P_2(x)\, P_2(x)\,dx = \frac{2}{5}$

ومنه كثيرات الحدود P_0 ، P_1 ، P_2 متعامدة .

التمرين الخامس

لدينا:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} y_i L_i(x)$$

حيث:

$$y_0 L_0(x) = \frac{(-2)(x-2)(x-6)(x-8)}{35}$$

$$y_1 L_1(x) = \frac{(5)(x-1)(x-6)(x-8)}{24}$$

$$y_2 L_2(x) = \frac{(-7)(x-1)(x-2)(x-8)}{40}$$

$$y_3 L_3(x) = \frac{(5)(x-1)(x-2)(x-6)}{84}$$

و منه:

$$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x).$$

حساب $P_3(3)$: نعوض قيم x بالعدد 3

نجد:

$$P_3(3) = \frac{-30}{35} + \frac{150}{24} + \frac{70}{40} - \frac{30}{84}$$

ومنه:

$$P_3(3) = -\frac{6}{7} + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} - \frac{5}{14}$$

إذن $P_3(3) \simeq 6,7$

بما أن قيم الجدول مأخوذة للعدد واحد

دقيق معبر ولدينا: $P_3(6)=7$ و $P_3(2)=5$

نأخذ: $P_3(3) \simeq 6$.

التمرين السادس:

"سيعطى لاحقا عن طريق البرمجة

بالماتلاب"

التمرين السابع:

1) طريقة شبه المنحرف البسيطة:

$$\int_{1,1}^{1,5} f(x)\,dx \simeq \frac{1,5-1,1}{2}\left(f(1,5)+f(1,1)\right)$$

$$\simeq \frac{0,4}{2}\left(3,0042+4,4817\right)$$

$$\simeq 1,4972.$$

ج) طريقة سمبسون البسيطة:

$$\int_{1,1}^{1,5} f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

$$\simeq \frac{0,4}{6}\left(f(1,1)+4f(1,3)+f(1,5)\right)$$

$$\simeq \frac{0,2}{3}\left(3,0042+4\times(3,6693)+4,4817\right)$$

$$\simeq \dots\dots\dots$$

التمرين الثامن:

بما أن عدد النقاط زوجي (ستة) فإنه لا يمكننا استخدام القانون: $\frac{1}{3}$ لسمبسون وحده، فيتم استخدام قانون $3/8$ لسمبسون في النقاط الأربع الأولى ثم قانون $1/3$ للنقاط الثلاث المتبقية.

قانون $\frac{3}{8}$ لسمبسون:

إذا كانت: x_0, x_1, x_2, x_3 أربع نقاط

حيث: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$ فإن:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

ومنه نجد:

$$\int_0^{2,5} f(x)\,dx = \int_0^{1,5} f(x)\,dx + \int_{1,5}^{2,5} f(x)\,dx.$$

إذن بتطبيق قانون $\frac{3}{8}$ نجد:

$$\int_0^{1,5} f(x)\,dx \simeq \frac{3\times 0,5}{8}\left[f(0) + 3f(0,5) + 3f(1) + f(1,5)\right]$$

$$\simeq \frac{1,5}{8}(1,5 + 6 + 6 + 1,6364]$$

وبتطبيق قانون $\frac{1}{3}$ نجد:

$$\int_{1,5}^{2,5} f(x)\,dx \simeq \frac{0,5}{3}(1,6364 + 4\times 1,25 + 0,9565)$$

ومنه:

$$\int_0^{2,5} f(x)\,dx \simeq 4,1036.$$

التمرين التاسع :

1) حساب القيمة الحقيقية للتكامل :

$$I = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2$$

$$= e^2 - 1 \simeq 6,389$$

2) تقريب التكامل من أجل $h = 2$

$$\int_0^2 e^x dx \simeq \frac{2-0}{6}(e^0 + 4e^1 + e^2)$$

$$\simeq 6,421$$

3) تقريب التكامل من أجل $h = 1$

نقوم أولاً بتقسيم المجال إلى مجالين

جزئيين $[0,1] \cup [1,2]$ ومنه :

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx$$

$$\simeq \frac{1-0}{6}(e^0 + 4e^{0,5} + e^1) + \frac{2-1}{6}(e^1 + 4e^{1,5} + e^2)$$

$$\simeq 6,391$$

4) تقريب التكامل من أجل $h=0,5$ نجد :

$$\int_0^2 e^x\,dx = \int_0^{0,5} e^x\,dx + \int_{0,5}^{1} e^x\,dx + \int_{1}^{1,5} e^x\,dx + \int_{1,5}^{2} e^x\,dx$$

$$\simeq 6,38919.$$

نلاحظ أن أدق قيمة تقريبية للتكامل هي الأخيرة (4) أي من أجل $h=0,5$ وبالتالي كلما كانت الخطوة h أصغر زادت الدقة.
لكن مع صعوبة الحساب اليدوي أو استحالته وهنا تكمن أهمية البرمجة في الكومبيوتر فمن خلالها يمكننا حل مسائل معقدة في ظرف وجيز.

حل التمارين المقترحة

الحل التقريبي لمعادلات غير الخطية

التمرين الأول:

$*\quad h(x) = x^3 - 1$

أ)

نلاحظ أن: $h(2) = 7 \notin [1, 2]$

ومنه الدالة h لا تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة.

$*\quad g(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}$

من أجل $1 \leq x \leq 2$ فإن $2^{1/3} \leq g(x) \leq 3^{1/3}$

حيث: $g(2) \simeq 1,25$ و $g(3) \simeq 1,44$

ومنه: $\forall x \in [1, 2] : g(x) \in [1, 2]$

المشتق:

$$\max_{[1,2]} |g'(x)| = \max_{[1,2]} \left|\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}\right|$$

$$= |g'(x)| \leq \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{4}} = 0,21 < 1$$

أي $K = 0,21$

ومنه الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة.

ب) نحسب أولاً عدد التكرارات اللازمة

من أجل خطأ $\varepsilon = 0,5\times10^{-2}$ نجد:

حسب العلاقة:

$$\frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$x_0 = 1,5$; $x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{2,5} \simeq 1,357$

ومنه:

$$\frac{(0,21)^n |1,357 - 1,500|}{1-0,21} \leq 0,5\times10^{-2}$$

بإدخال الدالة $\ln$ على طرفي المتباينة نجد:

$n \geq 2,992$ ومنه نأخذ $n = 3$;

ج) الحل التقريبي:

$x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{2,357}$
$\simeq 1,331$

$x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{2,331} \simeq 1,326$

إذن الحل التقريبي $\bar{x} \simeq 1,32 \pm 0,01$

التقريب الثاني :

لدينا : $x = g(x) = 0,5\cos x \quad x\in[0,0,5]$:

1) شروط النقطة الثابتة :

* نعلم أن : $\forall x\in[0,0,5] : 0 \leq \cos x \leq 1$

إذن $0 \leq 0,5\cos x \leq 0,5$

ومنه : $\forall x\in[0,0,5] : g(x)\in[0,0,5]$

* $g'(x) = -0,5\sin x$

$|g'(x)| \leq |g'(0,5)| < 0,5 < 1$

إذن الدالة g تحقق شروط النقطة الثابتة.

التقريب الثالث :

$x^4 - 8x + 1 = 0$ على المجال $[1,6,2]$

شروط طريقة نيوتن :

* $f(1,6)\cdot f(2) < 0$: $f(1,6) = -5,246 < 0$
$f(2) = 1 > 0$

$\forall x \in [1,6, 2] : f'(x) = 4x^3 - 8 > 0$ *

$\forall x \in [1,6, 2] : f'' = 12x^2 > 0$ *

2 إذن شروط نظرية نيوتن محققة.

حسب العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_0 = 2$ و $f(2) \cdot f''(2) > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{24} \simeq 1,96$$

$$x_2 \simeq 1,956$$

3 إذن الصيغة المقربة للجذر التقريبي هي:

$$\bar{x} = 1,96 \pm 0,01$$

التمرين الرابع:

$[1, 2]$ على المجال $x^3 + x^2 - 11 = 0$

شروط تطبيق نظرية نيوتن

$f(1)\cdot f(2) = -9\times 1 < 0$ *

$\forall x \in [1, 2] \; : \; f'(x) = 3x^2 + 2x > 0$ *

$\forall x \in [1, 2] \; : \; f''(x) = 6x + 2 > 0$ *

$f'(x)$ و $f''(x)$ مستمرتان على المجال $[1,2]$ ولا تغيران إشارتهما. إذن:

شروط طريقة نيوتن محققة.

نأخذ $x_0 = 2$ $\quad f(2)\cdot f''(2) > 0$

حسب العلاقة فيه:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} \simeq 1,9375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,9375 - \frac{0,065}{15,172} \simeq 1,9362$$

إذن $|x_2 - x_1| < 0,0013 < 0,5\times 10^{-2}$

ومنه: $\bar{x} = 1,936 \pm 0,05$

التمرين الخامس:

باستعمال نشر تايلور من المرتبة الثانية عند النقطة b $(x+h)$ و $(x-h)$ نحصل على:

1) الفروق المنتهية المتقدمة لتقريب المشتق الأول:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

2) الفروق المتقدمة المتأخرة لتقريب المشتق الأول:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

3) الفروق المنتهية المركزة بحيث الوصول نشر تايلور
إلى المرتبة الثالثة (لأن المشتق الثاني يختفي بعملية الطرح)
ومنه:

$$\cancel{f''(x)} = \frac{\cancel{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}}{}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

تقريب الدالة المشتقة الثانية بالفروق المركزة
نحصل على:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

من خلال نشر تايلور إلى المرتبة الرابعة
عند $(x+h)$ و $(x-h)$.