- Résolution d'équation d'oscillation par la méthode numérique:

- Méthode Euler modifiée:

La méthode d'Euler modifiée est une méthode simple et efficace de résolution d'équations différentielles (ED).

Considérons d'abord la solution de l'équation différentielle du premier ordre. Plus tard, nous l'étendrons pour résoudre un ensemble de (ED) de premier ordre. L'équation de swing est un (ED) du second ordre qui peut être écrit comme deux (ED) du premier ordre et la solution peut être obtenue en utilisant la méthode d'Euler modifiée.

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Où t est la variable indépendante et x est la variable dépendante.

Soit (t_0, x_0) la solution initiale et Δt est l'incrément en t.

$$t_1 = t_0 + \Delta t;\ \ t_2 = t_1 + \Delta t; \dots; t_n = t_{n-1} + \Delta t.$$

La première estimation de x_1 (valeur de x au tempst_1) est notée $x_1^{(0)}$.

Où $x_1^{(0)} = x_0 + \frac{dx}{dt}|_{x_0} \Delta t$

Donc $(t_1, x_1^{(0)})$ est le premier point estimé de (t_1, x_1). La deuxième estimation finale de x_1 est calculée comme suit:

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}|_{x_0} + \frac{dx}{dt}|_{x_1^{(0)}}\right)\Delta t$$

Où $\frac{dx}{dt}|_{x_1^{(0)}}$ est la valeur de $\frac{dx}{dt}$ calculée en $(t_1, x_1^{(0)})$.

Alors le point (t_1, x_1) est maintenant connu.

Donc La même procédure peut être suivie pour obtenir (t_2, x_2) et elle peut être répétée pour obtenir des points (t_3, x_3) , (t_4, x_4) ……

En général :

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t$$

$$x_n^{(0)} = x_{n-1} + \frac{dx}{dt}|_{x_{n-1}} \Delta t$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}|_{x_{n-1}} + \frac{dx}{dt}|_{x_n^{(0)}}\right)\Delta t$$

Où $\frac{dx}{dt}|_{x_n^{(0)}}$ est la valeur de $\frac{dx}{dt}$ calculée en $(t_1, x_n^{(0)})$.

La même procédure peut être étendue pour résoudre un ensemble de deux (ED) du premier ordre donné par :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y)$$

Si le point $(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1})$ connu, le point suivant (t_n, x_n, y_n) peut être calculé comme suit:

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t$$

$$x_n^{(0)} = x_{n-1} + \frac{dx}{dt}|_{x_{n-1}} \Delta t$$

$$y_n^{(0)} = y_{n-1} + \frac{dy}{dt}|_{x_{n-1}} \Delta t$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}|_{x_{n-1}} + \frac{dx}{dt}|_{x_n^{(0)}}\right) \Delta t$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}|_{y_{n-1}} + \frac{dy}{dt}|_{y_n^{(0)}}\right) \Delta t$$

Où $\frac{dx}{dt}|_{x_n^{(0)}}$ et $\frac{dy}{dt}|_{y_n^{(0)}}$ sont les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ calculée en $(t_1, x_n^{(0)}, y_n^{(0)})$.

Application la méthode Euler modifiée à l'équation d'oscillation :

$$\frac{H}{\pi f_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e = P_a$$

Alors :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\pi f_0}{H}(P_m - P_e)$$

L'équation d'oscillation du second ordre ci-dessus peut s'écrire sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre comme suit :

$$\frac{d\delta}{dt} = w - w_{syn}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\pi f_0}{H}(P_m - P_e)$$

Notons que $\frac{d\delta}{dt}$ se présente généralement sous la forme $\frac{d\delta}{dt} = f_1(t, \delta, w)$. Cependant, maintenant c'est en fonction de ω seul. De même, $\frac{dw}{dt}$ se présente généralement sous la forme $\frac{dw}{dt} = f_2(t, \delta, w)$. Cependant, maintenant c'est en fonction de δ seul.

A $t = 0$

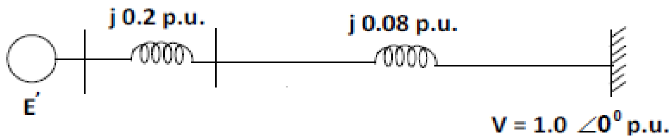
$$\begin{cases} P_m - P_e = 0 \\ w = w_{syn} \end{cases}$$

Donc le point initial est $(0, \delta(0), w(0))$

Dès qu'une perturbation se produit, le réseau électrique change et l'expression de la puissance électrique P_e en termes d'angle de rotor δ peut être obtenue. Pendant la condition de défaut, P_e doit être calculée par l'équation décrite. Par l'utilisant de la méthode d'Euler modifiée, le point de solution (t_1, δ_1, w_1) peut être calculé. La procédure peut être répétée pour obtenir les points de solution suivants jusqu'au prochain changement de réseau électrique. L'ensemble de la procédure peut être effectué jusqu'à t atteigne (temps requis pour l'analyse de stabilité).

- Application numérique:

Un alternateur de 100 MVA fournit 100 MW à un bus infini à partir une ligne de réactance 0,08 pu. La machine a une réactance transitoire de 0,2 pu. et constante d'inertie est de 4,0 sec. Le courant fourni par l'alternateur est (1,0 - j 0,6375) pu. Si un défaut triphasé aux bornes de la machine d'une période 0,1 sec



1. Calculer l'angle de puissance et la vitesse de l'alternateur pour une période de 0,14 sec avec incrément de temps de 0,02 sec

<u>Solution:</u>

$E' = (1.0 + j0) + j\,0.28\,(1.0 - j\,0.6375) = 1.1785 + j\,0.28$

$E' = 1.2113 \lfloor 13.36° \, pu$

<u>- Avant C.C:</u>

$Pm = 100\,MW = 1.0\,p.u.$

$\omega s = 2\,\pi\,x\,50 = 314.1593\,rad./\,sec.$

Donc $\delta(0) = 13.36° = 0.2333\,rad.$ Et $\omega(0) = 314.1593\,rad./\,sec.$

<u>- Pendant C.C:</u>

$Pe = 0$

$$\frac{d^2\delta}{d^2t} = \frac{\pi f}{H}(Pm - Pe) = \frac{\pi 50}{4}(1 - Pe) = 39.2699(1 - Pe)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699(1 - Pe)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - 314.1593$$

Calcul δ(0.02) et ω(0.02)

Première estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 314.1593 - 314.1593 = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699(1 - 0) = 39.2699$$

$\delta \;=\; 0.2333 \;+\; (\,0\;x\;0.02\,) \;=\; 0.2333\;rad.$

$\omega \;=\; 314.1593 \;+\; (\,39.2699\;x\;0.02\,) \;=\; 314.9447\;rad./\;sec.$

Deuxième estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 314.9447 - 314.1593 \;=\; 0.7854$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699(1 - 0) = 39.2699$$

$\delta(0.02) \;=\; 0.2333 \;+\; 1/2(\,0 \;+\; 0.7854\,)\;x\;0.02 \;=\; 0.24115\;rad.$

$\omega(0.02) \;=\; 314.1593 \;+\; 1/2\,(\,39.2699 \;+\; 39.2699\,)\;x\;0.02 \;=\; 314.9447\;rad./\;sec.$

Calcul δ(0.04) and ω(0.04)

Première estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 314.9447 - 314.1593 \;=\; 0.7854$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699(1 - 0) = 39.2699$$

$\delta \;=\; 0.24115 \;+\; (\,0.7854\;x\;0.02\,) \;=\; 0.2569\;rad.$

$\omega \;=\; 314.9447 \;+\; (\,39.2699\;x\;0.02\,) \;=\; 315.7301\;rad./\;sec.$

Deuxième estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 315.7301 - 314.1593 \;=\; 1.5708$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699(1 - 0) = 39.2699$$

$\delta(0.04) \;=\; 0.24115 \;+\; 1/2(\,0.7854 \;+\; 1.5708\,)\;x\;0.02 \;=\; 0.2647\;rad.$

$\omega(0.04) \;=\; 314.9447 \;+\; 1/2(\,39.2699 \;+\; 39.2699\,)\;x\;0.02 \;=\; 315.7301\;rad./\;sec.$

Le calcul peut être répété jusqu'à t = 0,1 $\delta(0.1) \;=\; 0.4297\;rad.\,et\;\omega(0.1)\;318.0869\;rad./sec.$

- Après C.C:

$$Pe = \frac{1.2113x1}{0.28} sin(\delta) = 4.3261 sin(\delta)$$

Calcul δ(0.12) et ω(0.*12*)

Première estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 318.0869 - 314.1593 = 3.9276$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699\ (1 - 4.3261\ sin\ 0.4297\ rad.) = -31.5041$$

$$\delta = 0.4297 + (3.9276\ x\ 0.02) = 0.50825\ rad.$$

$$\omega = 318.0869 + (-31.5041\ x\ 0.02) = 317.4568\ rad./\ sec.$$

Deuxième estimation :

$$\frac{d\delta}{dt} = 3317.4568 - 314.1593 = 3.2975$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 39.2699\ (1 - 4.3261\ sin\ 0.50825\ rad.) = -43.4047$$

$$\delta(0.12) = 0.4297 + 1/2(3.9276 + 3.2975)\ x\ 0.02 = 0.50195\ rad.$$

$$\omega(0.12) = 318.0869 + 21(-31.5041 - 43.4047)\ x\ 0.02 = 317.3378\ rad./\ sec.$$

Les calculs complets sont indiqués dans le tableau ci- dessous

t sec.	δ rad.	ω rad/sec	First Estimate				Second Estimate			
			dδ/dt	dω/dt	δ rad.	ω rad/sec	dδ/dt	dω/dt	δ rad.	ω rad/sec
0^-	0.2333	314.1593								
0^+	0.2333	314.1593	0	39.2699	0.2333	314.9447	0.7854	39.2699	0.2412	314.9447
0.02	0.2412	314.9447	0.7854	39.2699	0.2569	315.7301	1.5708	39.2699	0.2647	315.7301
0.04	0.2647	315.7301	1.5708	39.2699	0.2961	316.5155	2.3562	39.2699	0.304	316.5155
0.06	0.304	316.5155	2.3562	39.2699	0.3511	317.3009	3.1416	39.2699	0.359	317.3009
0.08	0.359	317.3009	3.1416	39.2699	0.4218	318.0863	3.927	39.2699	0.4297	318.0869
0.10^-	0.4297	318.0869								
0.10^+	0.4297	318.0869	3.9276	-31.504	0.5083	317.4568	3.2975	-43.405	0.502	317.3378
0.12	0.502	317.3378	3.1785	-42.468	0.5655	316.4884	2.3291	-51.761	0.557	316.3955
0.14	0.557	316.3955								

- Stabilité aux petites perturbations :

L'équation d'oscillation avec considération le comportement de puissance d'amortissement P_d devient :

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e$$

Où $P_d = D\frac{d\delta}{dt}$ et D coefficient d'amortissement.

Si une petite déviation $\Delta\delta$ au point de fonctionnement initiale δ_0 : $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$

Donc on peut écrire

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\delta_0+\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\delta_0+\Delta\delta)}{dt} = P_m - P_{max}.\sin(\delta_0 + \Delta\delta)$$

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\delta_0)}{dt^2} + \frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\delta_0)}{dt} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} = P_m - P_{max}.\sin(\delta_0 + \Delta\delta)$$

Pour petite déviation on a :

$$\begin{cases} \sin(\delta_0 + \Delta\delta) = \sin(\delta_0).\cos(\Delta\delta) + \cos(\delta_0).\sin(\Delta\delta) \\ \cos(\Delta\delta) \approx 1 \\ \sin(\Delta\delta) \approx \Delta\delta \end{cases}$$

Alors : $\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\delta_0)}{dt^2} + \frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\delta_0)}{dt} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} = P_m - P_{max}.\left(\sin(\delta_0).\cos(\Delta\delta) + \cos(\delta_0).\sin(\Delta\delta)\right)$

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\delta_0)}{dt^2} + \frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\delta_0)}{dt} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} = P_m - P_{max}.(\sin(\delta_0) + \cos(\delta_0).\Delta\delta)$$

Dans le fonctionnement initial on a : $\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2\delta_0}{dt^2} + D\frac{d\delta_0}{dt} = P_m - P_{max}.\sin(\delta_0)$

Donc : $\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} = -P_{max}.\cos(\delta_0).\Delta\delta$

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + P_{max}.\cos(\delta_0).\Delta\delta = 0$$

La quantité $P_{max}.\cos(\delta_0)$ est la pente de la courbe d'angle de puissance à δ_0 est connu par le coefficient de synchronisation

$$P_s = \frac{dp}{d\delta}|_{\delta_0} = P_{max}.\cos(\delta_0)$$

Alors

$$\frac{H}{\pi f_0}\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + D\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + P_s.\Delta\delta = 0$$

$$\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + \frac{\pi f_0 D}{H}\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + \frac{\pi f_0 P_s}{H}.\Delta\delta = 0$$

$$\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + \frac{\pi f_0 D}{H}\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + \frac{\pi f_0 P_s}{H}.\Delta\delta = 0$$

$$\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + 2\xi w_n\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + w_n^2.\Delta\delta = 0$$

Où w_n la fréquence naturelle d'oscillation $w_n = \sqrt{\frac{\pi f_0 P_s}{H}}$

ξ le taux d'amortissement $\xi = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\pi f_0}{HP_s}}$

Donc l'équation caractéristique : $r^2 + 2\xi w_n r + w_n^2 = 0$

La condition de fonctionnement normale : $\xi = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\pi f_0}{HP_s}} < 1$

La résolution de l'équation précédente :

$$\Delta = (2\xi w_n)^2 - 4.1.w_n^2 = 4\xi^2 w_n^2 - 4w_n^2 = 4\left(\xi^2 w_n^2 - w_n^2\right) < 0$$

On a deux racines complexes :

$$r_{1,2} = \frac{-2\xi w_n \mp j\sqrt{4\left(\xi^2 w_n^2 - w_n^2\right)}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-2\xi w_n \mp j2w_n\sqrt{1-\xi^2}}{2}$$

$$r_{1,2} = -\xi w_n \mp jw_n\sqrt{1-\xi^2}\ ;\quad r_{1,2} = -\xi w_n \mp jw_d$$

Où w_d fréquence d'amortissement d'oscillation $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$

<u>Variable d'état :</u>

$$\begin{cases} x_1 = \Delta\delta \\ x_2 = \Delta w = \Delta\dot{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w_n^2 x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{cases}$$

La forme matricielle : $\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\xi w_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

Où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\xi w_n \end{pmatrix}$

On a : $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$

La transformation de la place :

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

$I\dot{x}(t) = Ax(t)$

Où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L\{I\dot{x}(t)\} = L\{Ax(t)\}$

$IL\{\dot{x}(t)\} = AL\{x(t)\}$

$I\big(SL\{x(t)\} - x(0)\big) = AL\{x(t)\}$

$ISL\{x(t)\} - Ix(0) = AL\{x(t)\}$

$ISL\{x(t)\} - AL\{x(t)\} = Ix(0)$

$L\{x(t)\}(IS - A) = Ix(0)$

Donc : $L\{x(t)\} = (IS - A)^{-1} . Ix(0)$

Où $(IS - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . S - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\xi w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\xi w_n \end{pmatrix}$

$(IS - A) = \begin{pmatrix} S & -1 \\ w_n^2 & S + 2\xi w_n \end{pmatrix}$

$(IS - A)^1 = \frac{1}{(S)(S+2\xi w_n) - (w_n^2)(-1)} \begin{pmatrix} S + 2\xi w_n & 1 \\ -w_n^2 & S \end{pmatrix}$

$(IS - A)^1 = \frac{\begin{pmatrix} S+2\xi w_n & 1 \\ -w_n^2 & S \end{pmatrix}}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2}$

Donc $L\{x(t)\} = \frac{\begin{pmatrix} S+2\xi w_n & 1 \\ -w_n^2 & S \end{pmatrix}}{S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2} . Ix(0)$

La condition initiale : $Ix(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1(0) = \Delta\delta_0 \\ x_2(0) = \Delta w_0 = 0 \end{cases}$

Alors

$$\Delta\delta(S) = \frac{(S+2\xi w_n)\Delta\delta_0}{S^2+2\xi w_n S+w_n^2}$$

$$\Delta w(S) = \frac{(-w_n^2)\Delta\delta_0}{S^2+2\xi w_n S+w_n^2}$$

La transformation inverse de Laplace :

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_d t + \theta)$$

$$\Delta w = \frac{-w_n\Delta\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_d t)$$

Où $\theta = \cos^{-1}(\xi)$

Donc :

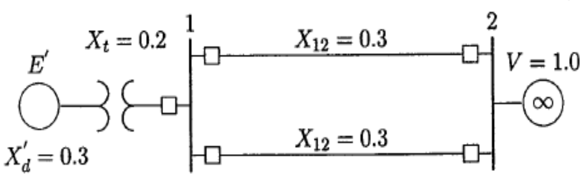
$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta = \delta_0 + \frac{\Delta\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_d t + \theta)$$

$$w = w_0 + \Delta w = w_0 - \frac{w_n\Delta\delta_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \sin(w_d t)$$

Le temps de réponse $t_s = 4\tau$ où $\tau = \frac{1}{\xi w_n} = \frac{2H}{\pi f_0 D}$

- Application numérique:

Une machine synchrone 60 Hz ayant une constante d'inertie H=9.94s est connectée à un bus infini à travers un circuit purement réactif comme le montre la figure ci-dessous. Le générateur délivre une puissance active de 0,6 pu, avec facteur de puissance 0,8 au bus infini. Supposons que la machine soumis à une petite perturbation de $\Delta\delta = 10° = 0.1745\,rad$ et le coefficient de puissance d'amortissement D=0,138.



1. Obtenir des équations décrivant le mouvement de l'angle du rotor et la fréquence du générateur.

Solution

La réactance de transfert $X = 0.3 + 0.2 + \frac{0.3}{2} = 0.65\ p.u$

$$S = \frac{0.6}{0.8} \lfloor cos^{-1}(0.8) = 0.75\lfloor 36.87° p.u \quad \rightarrow \quad I = \frac{S^*}{V^*} = 0.75\lfloor -36.87° p.u$$

$E' = V + jX.I = 1.0\lfloor 0° + j\,0.65\,(0.75\lfloor -36.87°) = 1.35\lfloor 16.79° p.u$

Le coefficient de synchronisation P_s

$$P_s = P_{max}.\cos(\delta_0) = \frac{1.35x1}{0.65}\cos(16.79°) = 1.9884$$

La fréquence naturelle d'oscillation $w_n = \sqrt{\frac{\pi f_0 P_s}{H}} = \sqrt{\frac{\pi.60.1,9884}{9.94}} = 6.1405\, rad/sec$

Le taux d'amortissement $\xi = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\pi f_0}{HP_s}} = \frac{0.138}{2}\sqrt{\frac{\pi.60}{9.94\ 1.9884}} = 0.2131$

L'équation linéarisée qui détermine le mode d'oscillation est

$$\frac{d^2(\Delta\delta)}{dt^2} + 2.62\frac{d(\Delta\delta)}{dt} + 37.7\Delta\delta = 0$$

La fréquence angulaire d'amortissement d'oscillation

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 6.1405\sqrt{1-(0.2131)^2} = 6\, rad/s$$

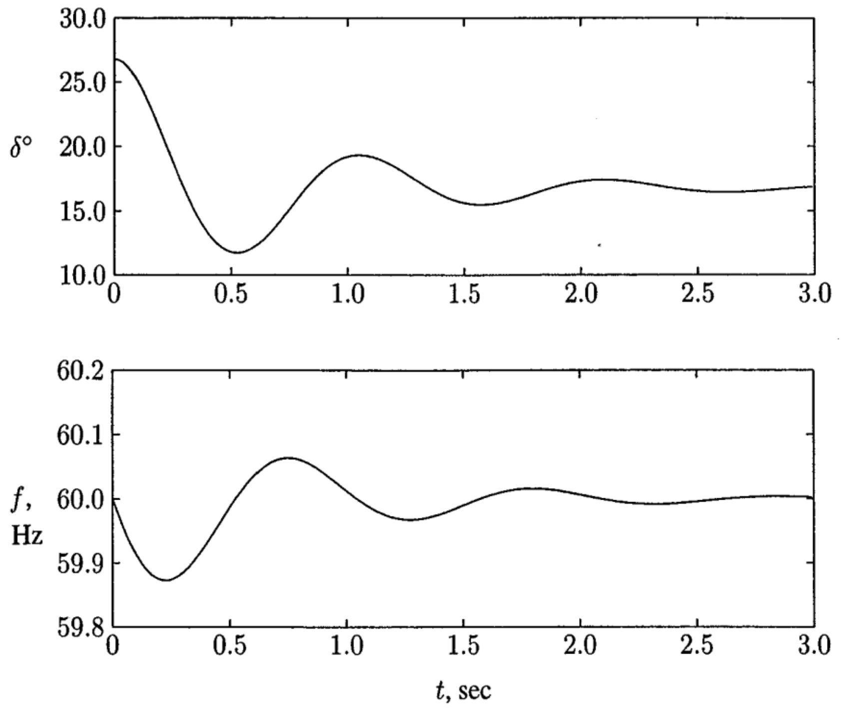
La fréquence d'amortissement d'oscillation $f_d = \frac{w_d}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = 0.9549\, Hz$

Les équations décrivant le mouvement de l'angle du rotor et la fréquence du générateur sont :

$$\delta = 16.79° + 10.234e^{-1.3t}sin(6t + 77.69)$$

$$f = 60 - 0.1746e^{-1.3t}sin(6t)$$

Les équations ci-dessus sont écrites dans MATLAB pour tracer ses courbes:



Analyse de la stabilité cas multi-machines :

Soit le système à deux JDB :

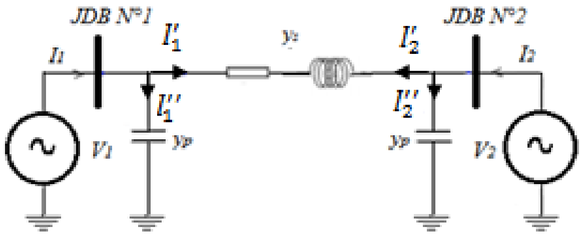


***Figure 1**: Système à deux JDB*

Au niveau de JDB1

$$I_1 = I_1' + I_1'' = (V_1 - V_2)y_s + y_pV_1 = (y_p + y_s)V_1 - y_sV_2$$

Au niveau de JDB2

$$I_2 = I_2' + I_2'' = (V_2 - V_1)y_s + y_pV_2 = -y_sV_2 + (y_p + y_s)V_2$$

Alors on peut écrire

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

Où $\quad Y_{11} = Y_{22} = y_p + y_s$

$\quad\quad Y_{12} = Y_{21} = -y_s$

Donc

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Où $\quad Y_{bus} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

On peut généraliser la méthode de formulation comme suit pour le système à « n » J.d.B connectés entre eux.

$$I_1 = \left(\sum_{i=1,j\neq 1}^{n} y_{1i}\right)V_1 + (-y_{12})V_2 + \cdots + (-y_{1n})V_n$$

:

:

.

$$I_n = (-y_{n1})V_1 + (-y_{n2})V_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1,j\neq n}^{n} y_{ni}\right)V_n$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1,j\neq 1}^{n} y_{1i} & \cdots & (-y_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-y_{n1}) & \cdots & \sum_{i=1,j\neq n}^{n} y_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Calcul de la puissance au niveau de JDB:

On a:

$$S_i = (P_{Gi} - P_{Di}) + j(Q_{Gi} - Q_{Di}) = P_i + jQ_i$$

Alors:

$$S_i^* = P_i - jQ_i = V_i^*.I_i$$

$$S_i^* = V_i^*.\sum_{j=1}^{n} y_{ij}.V_j$$

En coordonnées polaires:

$$V_i = |V_i|\lfloor\delta_i$$

$$Y_{ij} = |Y_{ij}|\lfloor\gamma_{ij}$$

$$S_i^* = P_i - jQ_i = V_i^*.\sum_{j=1}^{n} y_{ij}.V_j = \sum|Y_{ij}|.|V_i|.|V_j|e^{j(\delta_j-\delta_i+\gamma_{ij})}$$

Donc

$$P_i = \sum|y_{ij}||V_i||V_j|\cos(\delta_j - \delta_i + \gamma_{ij})$$

$$Q_i = -\sum|y_{ij}||V_i||V_j|\sin(\delta_j - \delta_i + \gamma_{ij})$$

Le premier phase pour l'analyse de la stabilité multi-machines est la résolution la répartition de charge (load flow). Le courant de machines avant la perturbation déterminer par:

$$I_i = \frac{S_i^*}{V_i^*} = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Où

m : nombre de générateurs.

P_i et Q_i : la puissance active et réactive de générateur

La tension d'excitation est:

$$E_i = V_i + jX'_d I_i$$

D'autre par toutes les charges sont convertir au admittance équivalente par:

$$y_{io} = \frac{S_i^*}{|V_i|^2} = \frac{P_i - jQ_i}{|V_i|^2}$$

Les nœuds $(n+1), (n+2), \ldots (n+m)$ sont des buses interne de la machine.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ I_{n+1} \\ I_{n+2} \\ \vdots \\ I_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} & Y_{1(n+1)} & \cdots & Y_{1(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} & Y_{n(n+1)} & \cdots & Y_{n(n+m)} \\ Y_{(n+1)1} & \cdots & Y_{(n+1)n} & Y_{(n+1)(n+1)} & \cdots & Y_{(n+1)(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{(n+m)1} & \cdots & Y_{(n+m)n} & Y_{(n+m)(n+1)} & \cdots & Y_{(n+m)(n+m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ E_{n+1} \\ E_{n+2} \\ \vdots \\ E_{n+m} \end{bmatrix}$$

Pour simplifier l'analyse on utilise la réduction de KRON pour éliminer tout le bus sans générateur

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{nn} & Y_{nm} \\ Y_{nm}^t & Y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ E_m \end{bmatrix}$$

$$0 = Y_{nn}V_n + Y_{nm}E_m \rightarrow V_n = -Y_{nn}^{-1}Y_{nm}E_m$$

$$I_m = Y_{nm}^t V_n + Y_{mm}E_m$$

Donc

$$I_m = [Y_{mm} - Y_{nm}^t Y_{nn}^{-1} Y_{nm}]E_m$$

$$I_m = Y_{bus}^{red} E_m$$

Où

$$Y_{bus}^{red} = Y_{mm} - Y_{nm}^t Y_{nn}^{-1} Y_{nm}$$

La réduction de la matrice d'admittance est de dimension (m x m) où m est le nombre de générateur. La puissance délivre par chaque générateur est:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ei}}^* = \mathrm{E}_{\mathrm{i}}^* . \mathrm{I}_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{P}_{ei} = \mathrm{IR}[\mathrm{E}_{\mathrm{i}}^* . \mathrm{I}_{\mathrm{i}}]$$

Où $I_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ij}$

En coordonnées polaires:

$$E_i = |E| \lfloor \delta_i$$

$$Y_{ij} = |Y_{ij}| \lfloor \theta_{ij}$$

Donc $P_{ei} = \sum_{j=1}^{m} |y_{ij}| \, |E_i| |E_j| cos(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij})$

<u>Stabilité transitoire de multi-machine:</u>

L'équation d'oscillation pour chaque générateur donner par :

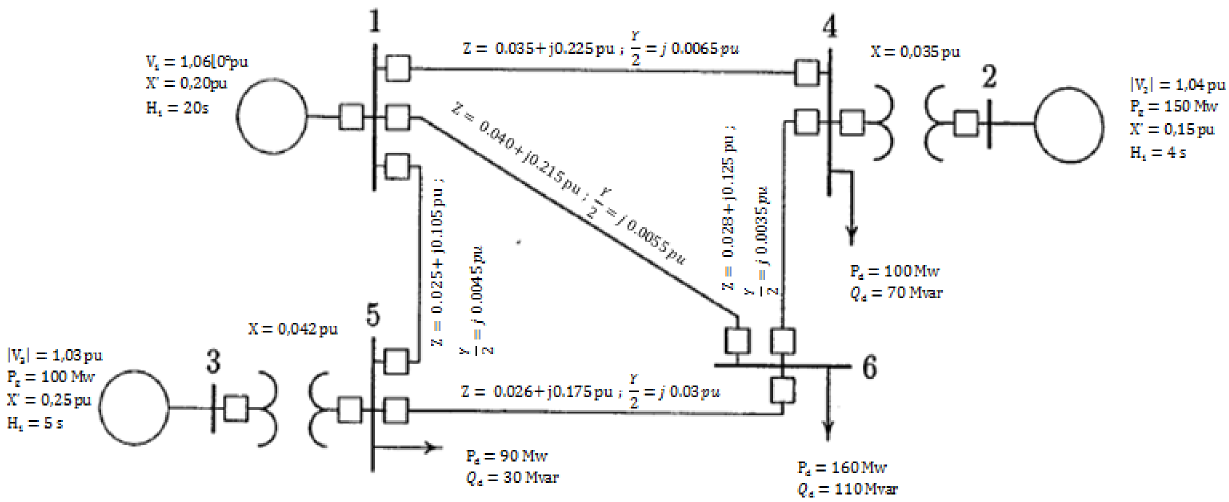
$$\frac{H_i}{\pi f}\frac{d^2\delta_i}{dt^2} = P_{mi} - \sum_{j=1}^{m} |y_{ij}| \, |E_i| |E_j| cos(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij})$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \Delta w_i \qquad i = 1,2, \dots, m$$

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\pi f}{H_i}(P_{mi} - P_e^f)$$

- Application numérique:

Soit le système électrique illustré dans la figure suivante. Les données du bus, de la ligne et de réactance transitoire du générateur par unité présentées dans la même figure ci-dessous.



Un défaut triphasé se produit sur la ligne 5-6 à proximité du bus 6 et éliminé par l'ouverture simultanée des disjoncteurs aux deux extrémités de la ligne. Déterminer la stabilité du système pour

1. le défaut est éliminé en 0,4 seconde
2. le défaut est éliminé en 0,5 seconde

Solution:

```
>> basemva=100; accuracy=0.0001; maxiter=10;
```

Power Flow Solution by Newton-Raphson Method
Maximum Power Mismatch = 1.80187e-007
No. of Iterations = 4

Bus No.	Voltage Mag.	Angle Degree	------Load------ MW	Mvar	---Generation--- MW	Mvar	Injected Mvar
1	1.060	0.000	0.000	0.000	105.287	107.335	0.000
2	1.040	1.470	0.000	0.000	150.000	99.771	0.000
3	1.030	0.800	0.000	0.000	100.000	35.670	0.000
4	1.008	-1.401	100.000	70.000	0.000	0.000	0.000
5	1.016	-1.499	90.000	30.000	0.000	0.000	0.000
6	0.941	-5.607	160.000	110.000	0.000	0.000	0.000
Total			350.000	210.000	355.287	242.776	0.000

- Avant CC

Reduced bus admittance matrix

```
Ybf =    0.3517 - 2.8875i    0.2542 + 1.1491i    0.1925 + 0.9856i
         0.2542 + 1.1491i    0.5435 - 2.8639i    0.1847 + 0.6904i
         0.1925 + 0.9856i    0.1847 + 0.6904i    0.2617 - 2.2835i
```

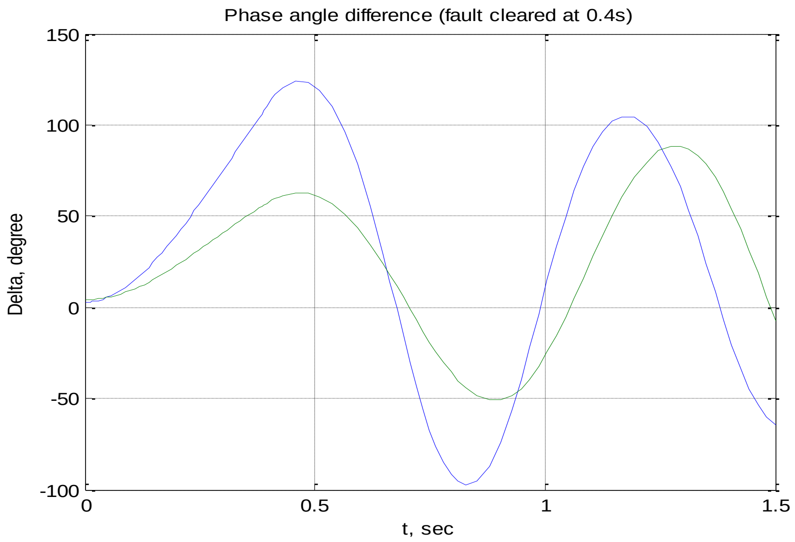
G(i)	E'(i)	d0(i)	Pm(i)
1	1.2781	8.9421	1.0529
2	1.2035	11.8260	1.5000
3	1.1427	13.0644	1.0000

- Pendant CC

```
Postfault reduced bus admittance matrix

Ydf =    0.1913 - 3.5849i   0.0605 + 0.3644i   0.0523 + 0.4821i
         0.0605 + 0.3644i   0.3105 - 3.7467i   0.0173 + 0.1243i
         0.0523 + 0.4821i   0.0173 + 0.1243i   0.1427 - 2.6463i
```

- Après CC

```
Afterfault reduced bus admittance matrix

Yaf =    0.3392 - 2.8879i   0.2622 + 1.1127i   0.1637 + 1.0251i
         0.2622 + 1.1127i   0.6020 - 2.7813i   0.1267 + 0.5401i
         0.1637 + 1.0251i   0.1267 + 0.5401i   0.2859 - 2.0544i

Enter clearing time of fault in sec. tc = 0.4
Enter final simulation time in sec.  tf = 1.5
```




```
Enter clearing time of fault in sec. tc = 0.5
Enter final simulation time in sec.  tf = 1.5
```