Solution de Serie 3

Exo 1

1) $f_1(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < +\infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$$

on a : $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t)\,dt \qquad \omega \in \mathbb{R}$.

<u>pour $\omega = 0$</u>

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

<u>pour $\omega \neq 0$</u>

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \omega t}\,dt = -\frac{1}{2\pi i \omega} e^{-2\pi i \omega t}\Big|_{t=-1}^{t=1}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i \omega}\Big[\cos(2\pi\omega t) - i\sin(2\pi\omega t)\Big]_{t=-1}^{t=+1} = -\frac{1}{2\pi i \omega}\Big[-2i\sin(2\pi\omega)\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi\omega}\sin(2\pi\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2 & ;\ \omega = 0 \\ \dfrac{1}{\pi\omega}\sin(2\pi\omega) & \omega \neq 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = x e^{-x} \chi_{\mathbb{R}_+}(x) \quad . \quad (f \in L^1(\mathbb{R}))$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\omega t} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\omega t}\; t e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t e^{-(1+2\pi i\omega)t}\, dt$$

Une intégration par parties : donne :

$$\hat{f}(\omega) = \underbrace{\left[-u \cdot \frac{e^{-(1+2\pi i\omega)u}}{(1+2\pi i\omega)} \right]_{u=0}^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+2\pi i\omega)u}}{(1+2\pi i\omega)}\, du$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi i\omega)} \left[-\frac{e^{-(1+2\pi i\omega)u}}{(1+2\pi i\omega)} \right]_{u=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi i\omega)^2} \left[-e^{-(1+2\pi i\omega)u} \right]_{u=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi i\omega)^2}$$

Exo 2

$$f(t) = (1-t^2)\,\chi_{[-1,1]}(t)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-a}^{+a} e^{-2\pi\omega t} f(t)\,dt$$

1/ $\hat{f}(0) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = 4/3$

pour $\omega \neq 0$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i\omega t}(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\cos(2\pi\omega t)\,dt$$

$$-i\int_{-1}^{1}(1-t^2)\sin(2\pi\omega t)\,dt$$

puisque : $x \mapsto \cos(x)$ est paire et $x \mapsto \sin(x)$ est impaire, alors

$$\hat{f}(\omega) = 2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(2\pi\omega t)\,dt$$

l'integration par parties deux fois donne alors :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi^3\omega^3}\sin(2\pi\omega) - \frac{1}{\pi^2\omega^2}\cos(2\pi\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \begin{cases} 4/3 & : \omega = 0 \\ \frac{1}{2\pi^3\omega^3}\sin(2\pi\omega) - \frac{1}{\pi^2\omega^2}\cos(2\pi\omega) & : \omega \neq 0 \end{cases}$$

2/ D'après la question précédente, on a :

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(t)\cos(\pi t)\,dt = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi^3 t^3}\sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi^2 t^2}\cos(2\pi t)\right]\cos(\pi t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\sin(2\pi t) - (\pi t)\cos(2\pi t)}{(\pi t)^3} \cos(\pi t)\, dt$$

puisque $t \mapsto \hat{f}(t)$ est paire, donc on peut écrire :

$$Re \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (t \cdot \frac{1}{2})} \hat{f}(t)\, dt = 2 \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \cos(\pi t)\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \cos(\pi t)\, dt = \frac{1}{2} Re\ \hat{\hat{f}}(1/2)$$

D'après, la formule inverse de Fourier, on a :

$$\hat{\hat{f}}(t) = f(-t) \Rightarrow \hat{\hat{f}}(1/2) = f(-1/2) = 3/4$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \cos(\pi t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot 3/4 = 3/8$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1/2 \sin(2\pi t) - (\pi t)\cos(2\pi t)}{\pi^3 t^3} \cos(\pi t)\, dt = 3/8$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1/2 \sin(2\pi t) - (\pi t)\cos(2\pi t)}{t^3} \cos(\pi t)\, dt = 3\pi^3/8$$

Ex03

1/ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable tq

$|f(x)| \leq |P(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (P polynôme).

Montrons que $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Soit $N > n + \deg P$, alors on a : pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int (1+|x|)^{-N} |P(x)| (1+|x|)^{N} |\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \left[\int (1+|x|)^{-N} |P(x)|\,dx \right] \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N} |\varphi(x)|$$

Puisque $N > n + \deg P$, alors $\int (1+|x|)^{-N} |P(x)|\,dx < \infty$

Soit $\int (1+|x|)^{-N} |P(x)|\,dx \leq C$, donc :

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \cdot \sup (1+|x|)^{N} |\varphi(x)|$$

$$\leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ |\beta| \leq 1}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

$\Rightarrow f \in S'(\mathbb{R}^n)$

2/ f est à croissance lente :

$\exists C > 0, \exists m \in \mathbb{N} : |f(x)| \leq C \|x\|^m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Il suffit donc de prendre $P(x) = C x^m$ dans (1)