Correction de la Serie 2

Exo 1

1/ Il est claire que T_a est linéaire ssi $a=0$

pour $a=0$, soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ (K compact dans $\mathbb{R}$). Alors

$$|\langle T_0, \varphi\rangle| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt \leq \sup_{t\in K} |\varphi(t)| \cdot \int_0^1 dt$$

$$= 1 . \sup_{t\in K} |\varphi(t)| \quad (C_K = 1,\ k_K = 0)$$

Donc T_0 est une distribution d'ordre 0.

<u>Conclusion</u> T_a est une distribution ssi $a=0$

2/ Comme dans la partie 1/, on montre que T_b est une distribution ssi $b=1$, et dans ce cas, T_1 est une distribution d'ordre 0.

3/ Soit $f(x) = H(x) \operatorname{Ln}|x|$. On va montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

En effet:

Il est claire que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^*$, f est continue sur K et par suite $f \in L^1(K)$.

Examinons maintenant l'intégrabilité de f au voisinage de zéro. Soit $[a,b] \subset]-1,1[$, alors:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{-\varepsilon} |f(x)|\,dx + \int_\varepsilon^b |f(x)|\,dx\right]$$

Puisque $H(x)=0$ pour $x<0$, alors:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^b |\operatorname{Ln}|x||\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^b \operatorname{Ln}(x)\,dx$$

Une intégration par partie de l'intégrale précédent, donne

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-b\ln(b) - \varepsilon \ln(\varepsilon) + b\right] = b - b\ln(b) < +\infty$$

Donc $f \in L^1([a,b])$. En conclusion : $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Ainsi T est la distribution régulière associé à f ($T = T_f$), donc c'est une distribution d'ordre 0.

4/ $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, \varphi(n)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists\, n_0 \geq 1$, $\forall n \geq n_0$: $\varphi(n) = 0$

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{n_0} n!\, \varphi(n) < \infty$ et par suite

T est bien défini

<u>Linéarité</u>: Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\langle T, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \sum_{n=1}^{n_0} n!\,(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{n_0} n!\left[\alpha_1\varphi_1(n) + \alpha_2\varphi_2(n)\right] = \alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} n!\,\varphi_1(n) + \alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} n!\,\varphi_2(n)$$

$$= \alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$$

Donc T est linéaire.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, alors :

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left|\sum_{n=1}^{n_0} n!\,\varphi(n)\right| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \sum_{n=1}^{n_0} n!$$

$$= C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \quad \text{avec } C_K = \sum_{n=1}^{n_0} n! < \infty, \text{ et } k_K = 0$$

Donc T est une distribution d'ordre 0.

Exo 2

Notons que $\frac{1}{n} \in]0,1] \ \forall n \geq 1$.

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq: $\varphi_0(x) = 1 \ \forall x \in [0,1]$. Alors

$$\langle T, \varphi_0 \rangle = \sum_{n\geq 1} a_n \varphi_0\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} a_n$$

Donc, une condition nécessaire pour que T soit bien défini est $\sum_{n\geq 1} a_n < +\infty$.

il est facile de verifier que si T est bien defini, il est linéaire.

Examinons maintenant la continuité de T:

Soit K un compact dans $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. On a:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{n\geq 1} a_n \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n| \left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n| \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

si $\sum_{n\geq 1} |a_n| = C < +\infty$, alors:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

et par suite T est une distribution

Puisque $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n < \infty$,

donc une condition suffisante pour que T soit une distribution est $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$.

(la serie de terme général a_n est absolument convergente)

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\geq 1} a_n \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exo 3

1/ f est continue sur $\mathbb{R}$ (avec $f(0)=0$), donc

$$(T_f)' = T_{f'} \quad : \quad f' = 1 + \ln|x|$$

2/ $$f(x) = \begin{cases} \cos x : & x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\\ -\cos x : & x \in \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[\end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $(T_f)' = T_{f'}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x : & x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\\ \sin x : & x \in \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[\end{cases}$$

3/ $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (on peut le vérifier facilement)

il est claire que f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et on a:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Donc f est discontinue en 0 avec un saut:

$$\sigma_0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

Ainsi: $(T_f)' = T_{f'} + 2\delta_0$

avec $f' = (-2\sin x - x\cos x)\chi_{]0,+\infty[} + (2\sin x + x\cos x)\chi_{]-\infty,0[}$

4/ Il est claire que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -2 \quad \Rightarrow \sigma_1 = 4$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = -2 \quad \Rightarrow \sigma_3 = 4$$

$(T_f)' = T_{f'} + 4\delta_1 + 4\delta_3$ avec $f' = -2\chi_{]1,3[} + 2\chi_{]-\infty,1[\cup]3,+\infty[}$

Exo 4

1/ pour $x \leq 0$: $\forall n \geqslant 1$: $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

pour $x > 0$: $\exists n_0 \geqslant 1$: $\frac{1}{n_0} < x \Rightarrow \forall n \geqslant n_0 : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

2/ Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ c.à.d

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$|\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_0^{1/n} n\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \right|$$

$$= \left| \int_0^{1/n} n(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \leq n \int_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx$$

Le théorème des accroissement finis permet d'écrire :

$\exists \xi \in]0, 1/2[$: $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi)$

Donc ;

$$|\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \delta_0, \varphi\rangle| \leq n \int_0^{1/n} |x\varphi'(\xi)|\,dx \leq n \sup|\varphi'(x)| \int_0^{1/n} x\,dx$$

$$= \frac{C}{2}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad (C = \sup_{x \in \operatorname{Supp}\varphi'} |\varphi'(x)|)$$

Montrons maintenant que $\{f_n^2\}_{n\geqslant 1}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq : $\varphi(0) \neq 0$. On a ;

$$\langle f_n^2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2\varphi(x)\,dx = n\int_{-\infty}^{+\infty} n\varphi(x)\,dx$$

$= n\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0) < +\infty$

Exo 5

1/ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \varphi(x)\, dx$

Déterminons la limite suivante: $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle$:

On pose $y = nx$ (changement de variable), on obtient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, dy$$

où $g_n(y) = \frac{1}{1+y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)$.

On a: $\lim_{n\to\infty} g_n(y)\ \frac{1}{1+y^2} \varphi(0) = g(y)$ (pour y fixé) $\forall y \in \mathbb{R}$

et $\left| \frac{1}{1+y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) \right| = |g_n(y)| \leq \frac{1}{1+y^2} \sup_{y \in \mathrm{Supp}\,\varphi} |\varphi(y)| \in L^1(\mathbb{R})$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^1(\mathbb{R})$, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \varphi(0)\, dy$$

Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi$, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \pi \varphi(0) = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle = \langle \pi \delta_0, \varphi \rangle$$

par suite: $\lim_{n\to\infty} f_n = \pi \delta_0$.

2/ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$.

Une intégration par parties donne:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\, \varphi'(x)\, dx$$

puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\, \varphi'(x)\, dx < \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\, \varphi'(x)\, dx = 0$

et par suite $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Exo 6

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2\}$

$\lim\limits_{x \to \pi/2^{>}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = 1/2 \Rightarrow \sigma_{\pi/2} = -1/2$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2} \chi_{]-\infty, \pi/2[}(x) \quad (f' \text{ est continue})$$

$$f''(x) = -\frac{\sin x}{2} \chi_{]-\infty, \pi/2[}(x) = -f(x)$$

$$(T_f)' = T_{f'} - 1/2\, \delta_{\pi/2}$$

$$(T_f)'' = (T_{f'})' - 1/2\, \delta'_{\pi/2} = T_{f''} - 1/2\, \delta'_{\pi/2} = -T_f - \tfrac{1}{2} \delta'_{\pi/2}$$

Donc T_f est solution de l'équation différentielle:

$$(T_f)'' + T_f = -1/2\, \delta'_{\pi/2}$$

Exo 7

2/ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$: $\langle e^{x^2/2} \delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, e^{x^2/2} \varphi \rangle = 1\, \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow e^{x^2/2} \delta_0 = \delta_0$ dans $D'(\mathbb{R})$

1/ Soit $T \in D(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, En utilisant la définition de la dérivation d'une distribution, la linéarité ainsi que la multiplication d'une distribution par une fonction de classe C^∞, on trouve cette série d'égalité ; pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$\langle (fT)', \varphi \rangle = -\langle f T, \varphi' \rangle = -\langle T, f\varphi' \rangle$$

$$= -\langle T, (f\varphi)' - f'\varphi \rangle = -\langle T, (f\varphi)' \rangle + \langle T, f'\varphi \rangle$$

$$= \langle T', f\varphi \rangle + \langle T, f'\varphi \rangle = \langle fT', \varphi \rangle + \langle f'T, \varphi \rangle$$

$= \langle f.T' + f'T, \varphi \rangle$

Donc $(fT)' = fT + f'T$.

3/ D'une part, en utilisant 1/, on a:

$$\left(e^{x^2/2}\,T\right)' = e^{x^2/2}\left(T' + xT\right)$$

D'autre part, en utilisant 2/, on a:

$$e^{x^2/2}\left(T' + xT\right) = e^{x^2/2}\,\delta_0$$

d'où $T' + xT = \delta_0$

Exo 8

Il est claire que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]-\infty, 0[)$:

$$\langle T, \varphi \rangle = 0$$

Donc $]-\infty, 0[$ est inclu dans l'ouvert d'annulation de T

et par suite $\mathrm{Supp}\,T \subset [0, +\infty[$.

Prouvons maintenant que $[0, +\infty[\subset \mathrm{Supp}\,T$:

Soit $a \in]0, +\infty[\Rightarrow \exists\, \varphi \in \mathcal{D}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)$ tq:

$0 \leq \varphi$ et $\varphi(x) = 1$ pour $x \in]a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2[$. Alors:

$$\langle T, \varphi \rangle \geq \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} \varphi(x)\,dx = \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow a \in \mathrm{Supp}\,T$$

par suite $]0, +\infty[\subset \mathrm{Supp}\,T \Rightarrow [0, +\infty[= \overline{]0, +\infty[} \subset \mathrm{Supp}\,T$

d'où l'égalité: $\mathrm{Supp}\,T = [0, +\infty[$

Exo 9

1/ On suppose que $f\delta_0' = 0$. Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', f\varphi\rangle = -\langle \delta_0, (f\varphi)'\rangle$$

$$= -(f\varphi)'(0) = -\left[f'(0)\,\varphi(0) + f(0)\,\varphi'(0)\right] = 0$$

La quantité précédente ne peut être nulle que si et seulement si $f(0) = f'(0) = 0$

2/ Pour $f(x) = x$, on a :

$f(0) = 0$ mais $f'(0) = 1 \neq 0$

Donc $x\,\delta_0' \neq 0$ (d'après /1)

3/ La réponse est non, et $T = \delta_0'$, $f(x) = x$ est un contre exemple. En effet :

$\mathrm{Supp}(\delta_0') = \{0\}$ et $f(0) = 0$ (donc $\forall x \in \mathrm{Supp}\,\delta_0' : f(x) = 0$)

mais, d'après 2/, on a : $f.T = x\,\delta_0' \neq 0$.