Résumé du chapitre 1 et chapitre 2 sur l'analyse numérique (Master 1)

Chapitre 1: Rappels

1.1 Rappel sur l'analyse fonctionnelle

Ici on va rappeller la formule de Taylor et quelques opérateurs différentiels.

1.1.1 Formule de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors pour tout $a, x \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta_{x,a})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \zeta_{x,a} \in I.$$

Le polynôme $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ s'appelle **le développement limité** d'ordre n au voisinage de a à la fonction f.
Pour $I \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2$ sur I, alors pour tout $(x, y), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right] + \\ &\quad \frac{1}{2!}\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|^2\right). \end{aligned}$$

1.1.2 Opérateurs différentiels

-Le gradient: Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté ∇f ou $\overrightarrow{grad f}$ défini comme suit:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

-La divergence: La divergence d'une fonction vectorielle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un scalaire de $\mathbb{R}$ noté $div(f)$ où $\nabla . f$ définie par:

$$div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \text{ où } f = (f_1, f_2, ..., f_n)^t.$$

-Le Laplacien: Le Laplacien d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un scalaire de $\mathbb{R}$ noté Δf ou $\nabla^2 f$ défini par:

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

1.2 Rappel sur l'analyse matricielle

1.2.1 Matrices particulières

Définition 1.1. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** si et seulement si $A^t = A$.
Exemple 1.1: Considérons la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

dans ce cas,

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A,$$

donc A est symétrique.
Exemple 1.2: Soit B est définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

on a

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B,$$

la matrice B est symétrique.
Propriété: Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles.
Définition 1.2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **monotone** si et seulement si A vérifie l'une de conditions suivantes:
1. A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.
2. $\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.
Définition 1.3. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique définie positive** si et seulement si A est symétrique et:

$$\forall X \neq 0,\ X^t A X > 0$$

Exemple 1.3: La matrice tridiagonale suivante est monotone et aussi symétrique définie positive.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$\det(A) = 5 \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \geq 0,$$

donc A est monotone.
On peut utiliser la deuxième condition pour montrer que A est monotone comme suit:

$$AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0.$$

Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, alors

$$\begin{aligned} AX \geq 0 \;\; &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 & \geq 0......(1) \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq 0......(2) \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & \geq 0......(3) \\ -x_3 + 2x_4 & \geq 0......(4) \end{cases}. \end{aligned}$$

On multiplie l'inégalité (2) par 2 et on fait la somme avec l'inégalité (1), on obtient alors $3x_2 - 2x_3 \geq 0......(5)$
On multiplie aussi l'inégalité (3) par 2 et on fait la somme avec l'inégalité (4), on obtient $3x_3 - 2x_2 \geq 0.....(6)$
On multiplie maintenant l'inégalité (5) par 2 et l'inégalité (6) par 3 et on fait la somme, on obtient $x_3 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ et $x_1 \geq 0$.
D'où $X \geq 0$, alors A est monotone.
Il est clair que A est symétrique, de plus

$$\begin{aligned} \forall X \neq 0,\ X^t A X &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2 > 0. \end{aligned}$$

Donc, A est symétrique définie positive.
Exemple 1.4: On peut généraliser la matrice d'exemple précédent comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & ... & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

La matrice A est monotone et symétrique définie positive.
Preuve
Il est clair que A est symétrique, d'autre part

$$\forall X \neq 0,\ X^t A X = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 > 0.$$

donc, A est symétrique définie positive.

Maintenant, on va montrer par récurrence que A est monotone:
Pour $n = 2, 3, A$ est monotone. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone et on montre que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est aussi monotone.
En fait, soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \geq 0,$$

on sait que la dernière inégalité dans le système de $n \times n$ de la matrice monotone d'ordre n s'écrit par

$$-x_{n-1} + 2x_n \geq 0,$$

alors, si on obtient une telle inégalité à partir du système de $(n+1) \times (n+1)$ de la matrice monotone d'ordre $(n+1)$, on trouvera que $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.
D'après le système de $(n+1) \times (n+1)$ de la matrice monotone d'ordre $(n+1)$, on a les deux inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} -x_{n-1} + 2x_n - x_{n+1} &\geq 0......(n) \\ -x_n + 2x_{n+1} &\geq 0......(n+1) \end{aligned}$$

on multiplie l'inégalité (n) par (2) et on fait la somme avec l'inégalité $(n+1)$, on trouve

$$3x_n - 2x_{n-1} \geq 0,$$

il vient

$$x_n \geq \frac{2}{3}x_{n-1} \geq \frac{1}{2}x_{n-1},$$

ça implique que $-x_{n-1} + 2x_n \geq 0$.
Donc, $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ et à partir l'inégalité $(n+1)$, on a $x_{n+1} \geq \frac{1}{2}x_n \geq 0$, alors $x_{n+1} \geq 0$.
Enfin, la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est monotone.
Propriétés:
- Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont réelles strictement positives.
- La matrice symétrique définie positive toujours est inversible et son déterminant est strictement positif.
- Si toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles strictement positives, alors cette matrice devient symétrique définie positive.

Exemple 1.5: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R},$$

on admet que les valeurs propres de A sont données par: $\lambda_k = a + 2b\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, ..., n$. Dans ce cas, $\lambda_k = a + 2b - 4b\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$, $k = 1, ..., n$, et pour obtenir une matrice symétrique définie positive, on choisit a, b tels que $\lambda_k > 0$, $\forall k = 1, ..., n$.

1.2.2 Normes matricielles

Définition 1.4. Une norme matricielle est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}_+$ notée $\|.\|$ vérifiant les propriétés suivantes:
a) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$.
c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
d) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.
Définition 1.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le rayon spectral de A noté $\rho(A)$ est défini par:

$$\rho(A) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|\lambda_i|,\ \lambda_i \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

Exemple 1.6: On définit pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les normes $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ et $\|A\|_F$ suivantes:
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$.
Propriété: Si A est symétrique, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.
Définition 1.6. Soient $\|.\|_V$, $\|.\|_M$ deux normes pour les vecteurs, pour les matrices respectivement, alors on dit que $\|.\|_V$ et $\|.\|_M$ sont compatibles si et seulement si:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \|AX\|_V \leq \|A\|_M \|X\|_V\ .$$

Exemple 1.7: Les normes suivantes sont compatibles:
1) La norme $\|.\|_1$ de vecteurs et la norme $\|.\|_1$ de matrice, i.e

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \|AX\|_1 \leq \|A\|_1 \|X\|_1\ ,\ \ \text{où } \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ .$$

2) La norme $\|.\|_2$ de vecteurs et la norme $\|.\|_2$ de matrice, i.e

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \|AX\|_2 \leq \|A\|_2 \|X\|_2\ ,\ \ \text{où } \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\ .$$

3) La norme $\|.\|_2$ de vecteurs et la norme $\|.\|_F$ de matrice, i.e

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \|AX\|_2 \leq \|A\|_F \|X\|_2\ .$$

4) La norme $\|.\|_\infty$ de vecteurs et la norme $\|.\|_\infty$ de matrice, i.e

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|X\|_\infty\ ,\ \ \text{où } \|X\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\ .$$

Chapitre 2: Généralités sur les EDPs linéaires du second ordre

2.1 EDP linéaires d'ordre 2 en dimension n

2.1.1 La forme générale en dimension n

Définition 2.1. Une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n d'inconnue $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) est une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + g(X)u = h(X), \ X \in \Omega \ ,$$

où $A = (a_{i,j}(X))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1.2 Classification

Définition 2.2. Une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n est dite **elliptique** si la matrice A n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe.
Exemple 2.1: L'EDP de Laplace en dimension n telle que

$$\triangle u = 0,$$

dans ce cas toutes les valeurs propres sont 1.
Définition 2.3. Une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n est dite **hyperbolique** si la matrice A n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.
Exemple 2.2: L'EDP de ondes en dimension n telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = 0, \ c > 0, \ t > 0 \text{ et } u = u(x_1, ..., x_n, t),$$

ici $X = (x_1, ..., x_n)$ s'appelle la variable d'espace et t c'est la variable du temps.
Dans cet exemple, on a $(n-1)$ valeurs propres sont $-c^2$ et une valeur propre est 1.
Définition 2.4. Une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n est dite **parabolique** si la matrice A admet $(n-1)$ valeurs propres non nulles de même signe et une valeur propre nulle.
Exemple 2.3: L'EDP de la chaleur en dimension n telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = f.$$

Dans cet exemple, on a $(n-1)$ valeurs propres sont -1 et une valeur propre est nulle.

2.1.3 La forme générale en dimension 2 et classification

La forme générale d'une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension 2 s'écrit par:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u=g(x,y),\ \ a(x,y)\neq 0.$$

Dans ce cas, la matrice symétrique A s'écrit comme:

$$A=\begin{pmatrix} a\left(x,y\right) & \frac{b(x,y)}{2} \\ \frac{b(x,y)}{2} & c(x,y) \end{pmatrix}.$$

Pour classifier cette EDP, il suffit de connaitre le signe de $\triangle = b^2\left(x,y\right)-4a(x,y)c(x,y)$.
Si $\triangle < 0$, l'EDP est elliptique.
Si $\triangle > 0$, l'EDP est hyperbolique.
Si $\triangle = 0$, l'EDP est parabolique.

2.1.4 Problème aux limite

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n, on a trois types de conditions au bord ou à la frontière,
Si on impose des valeurs de u sur ∂u, c'est la condition de **Dirichlet**.
Si on impose des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur ∂u, c'est la condition de **Neumann**.
Si on impose les conditions de Dirichlet et de Neumann, on parle alors de condition de **Fourier Robin**.
Si on a un problème d'évolution (il y a la variable du temps t) et on impose la valeur de u pour $t=0$, on parle alors de la condition initiale.

2.2 Résolution numérique d'une EDP linéaire d'ordre 2

La méthode de différences finies est l'une de méthodes numériques de résolution des EDPs, qui consiste à résoudre un système liant les valeurs de la fonction inconnue en certains points suffisamment proches les uns des l'autres.

2.2.1 Principe de la méthode de différences finies

Le principe fondamental de la méthode de différences finies consiste à appliquer un maillage au domaine d'étude, puis on fait le développement de Taylor de la fonction à déterminer dans chaque noeuds du maillage pour remplacer les dérivées continues par des dérivées numériques, et enfin on résoud un système algébrique des équations linéaires.

2.2.1.1 Expression des dérivées premières On a trois types.
Différences finies en avant (progressives) en dimension un

$$f'\left(x\right)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{h}{2!}f^{(2)}\left(\zeta\right),$$

donc,

$$\begin{aligned} u'(x_i) &= \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}u^{(2)}(\zeta), \\ u'(x_i) &= \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} + O(h), \\ u_i^1 &= u_i' \simeq \frac{u_{i+1}-u_i}{h}. \end{aligned}$$

Différences finies en avant (progressives) en dimension deux

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} \end{aligned}$$

Différences finies en arrière (dégressives)

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f^{(2)}(\zeta),$$

donc,

$$\begin{aligned} u'(x_i) &= \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h} + \frac{h}{2!}u^{(2)}(\zeta), \\ u'(x_i) &= \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h} + O(h), \\ u_i^1 &= u_i' \simeq \frac{u_i-u_{i-1}}{h}. \end{aligned}$$

Différences finies centrées

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2\times 3!}\left(f^{(3)}(\zeta_1)+f^{(3)}(\zeta_2)\right),$$

donc,

$$\begin{aligned} u'(x_i) &= \frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{2\times 3!}\left(u^{(3)}(\zeta_1)+u^{(3)}(\zeta_2)\right), \\ u'(x_i) &= \frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} + O\left(h^2\right), \\ u_i^1 &= u_i' \simeq \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}. \end{aligned}$$

2.2.1.2 Expression des dérivées secondes On a trois types.

Différences finies en avant (progressives)

$$f''(x) = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} - h\left(\frac{4}{3}f^{(3)}(\zeta_2) - \frac{1}{3}f^{(3)}(\zeta_1)\right),$$

donc,

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{u(x+2h)-2u(x+h)+u(x)}{h^2} - h\left(\frac{4}{3}u^{(3)}(\zeta_2) - \frac{1}{3}u^{(3)}(\zeta_1)\right), \\
u''(x_i) &= \frac{u(x_i+2h)-2u(x_i+h)+u(x_i)}{h^2} + O(h), \\
u_i^2 &= u_i'' \simeq \frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{h^2}.
\end{aligned}$$

<u>Différences finies en arrière (dégressives)</u>

$$f''(x) = \frac{f(x-2h)-2f(x-h)+f(x)}{h^2} - h\left(\frac{1}{3}f^{(3)}(\zeta_1) - \frac{4}{3}f^{(3)}(\zeta_2)\right),$$

donc,

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{u(x-2h)-2u(x-h)+u(x)}{h^2} - h\left(\frac{1}{3}u^{(3)}(\zeta_1) - \frac{4}{3}u^{(3)}(\zeta_2)\right), \\
u''(x_i) &= \frac{u(x_i-2h)-2u(x_i-h)+u(x_i)}{h^2} + O(h), \\
u_i^2 &= u_i'' \simeq \frac{u_{i-2}-2u_{i-1}+u_i}{h^2}.
\end{aligned}$$

<u>Différences finies centrées en dimension un</u>

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}\left(f^{(4)}(\zeta_1) + f^{(4)}(\zeta_2)\right),$$

donc,

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\zeta_1) + u^{(4)}(\zeta_2)\right), \\
u''(x_i) &= \frac{u(x_i+h)-2u(x_i)+u(x_i-h)}{h^2} + O\left(h^2\right), \\
u_i^2 &= u_i'' \simeq \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}.
\end{aligned}$$

<u>Différences finies centrées en dimension deux</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}.
\end{aligned}$$

2.2.2 Consistance, stabilité et la convergence

Définition 2.5. Soit U_h la solution numérique (approchée) du problème discret composée de $(u_1, u_2, ..., u_N)^t$ et $\overline{U}_h$ le vecteur des valeurs exactes de u en x_i, on définit l'erreur de la consistance comme suit:

$$R_h = L\overline{U}_h - L_h U_h,$$

où L c'est l'opérateur différentiel du problème continu et L_h est l'opérateur différentiel du problème discret, alors le schéma est consistant si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} R_h = 0,$$

et il est dit consistant d'ordre p $(p \geq 1)$, si $|R_h| = O(h^p)$.
Définition 2.6. On dit qu'un schéma numérique est stable au sens d'une norme $\|.\|$ si et seulement si:

$$\exists C > 0, \ \forall h > 0, \ \ \|U_h\| \leq C,$$

où U_h est la solution approchée et C est une constante ne dépend pas de h.
Propriété: Si le schéma est consistant et stable, alors il est convergent vers la solution exacte du problème continu.