

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

دروس وتمارين محلولة لمقياس رياضيات 1

سنة اولى جذع مشترك علوم المادة

اعداد : د . بالهادي احفوظه

استاذ محاضر بجامعة الوادي

المحتويات

4	المقدمة
		محتوى التحليل 1
8	1 نظرية المجموعات
	1.1 المنطق الرياضي
	2.1 المجموعات
	3.1 العلاقات
	4.1 التطبيقات ..
		2. الدوال العددية لمتغير حقيقي .
	1.2 مجموعة التعريف
	2.2 الدوال الدورية
	3.2 الدوال الزوجية
	4.2 الدوال الفردية
	5.2 الدوال المحدودة
	6.2 اتجاه تغير دالة
		3. نهايات الدوال
	1.3 نهاية منتهية عند عدد حقيقي
	2.3 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي
	3.3 نهاية منتهية عند اللانهاية
	4.3 نهاية غير منتهية عند اللانهاية

5.3	العمليات الجبرية على النهايات
6.3	نهاية دالة مركبة
7.3	النهايات والمقارنة
4.	الدوال المستمرة
1.4	تعريف الاستمرار عند قيمة
2.4	التمديد بالاستمرار
3.4	نظرية القيم المتوسطة
4.4	الدوال المستمرة والرتبية تماما
5.	الدوال العكسية
15	الدالة العكسية لدالة المستمرة والرتبية تماما
2.5	الدوال المثلثية ودوالها العكسية
3.5	الدوال المثلثية ودوالها العكسية
	محتوى الجبر I
6.	البنى الجبرية
1.6	العملية الداخلية
2.6	الزمرة
3.6	الحلقة
4.6	الحقل
7.	الفضاءات الشعاعية
1.7	تعريف الفضاء الشعاعي
2.7	الاسس والابعاد

..... 8. التطبيقات الخطية

..... 1.8 تعريف التطبيق الخطي

..... 2.8 نواة وصورة تطبيق خطي

..... 3.8 التطبيقات الخطية والفضاءات والفضاءات الشعاعية ذات البعد المنته

..... المراجع

1. نظرية المجموعات

1.1 – المنطق الرياضي

تعريف القضية : نسمي قضية كل جملة يمكن ان تكون صحيحة او خاطئة

نرمز لها بالرمز P, Q, \dots

امثلة

(1) الجزائر بلد افريقي. قضية صحيحة

(2) $6 + 1 = 8$ قضية خاطئة

(3) $x + 1 = 3$ $x \in \mathbb{R}$ ليست قضية

نفي القضية : نفي قضية هو قضية وتكون صحيحة اذا كانت القضية خاطئة

وتكون خاطئة اذا كانت القضية صحيحة

نرمز لنفي القضية بالرمز \bar{P}, \bar{Q}, \dots

جدول الحقيقة : اذا كانت القضية صحيحة نرملها بالرمز 1 اذا كانت خاطئة

نرملها بالرمز 0

القضايا المركبة :

الوصل : لتكن P, Q قضيتان

الوصل بين القضيتين P, Q هو القضية P و Q نرملها بالرمز $P \wedge Q$

وتكون صحيحة الا اذا كان P و Q صحيحتان معا

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الفصل : لتكن P, Q قضيتان

الفصل بين القضيتين P, Q هو القضية P او Q نرملها بالرمز $P \vee Q$

وتكون خاطئة الا اذا كان P و Q خاطئتان معا

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الاستلزام : لتكن P, Q قضيتان

الاستلزام بين القضيتين P, Q هو القضية $\bar{P} \vee Q$ نرملها بالرمز $P \Rightarrow Q$

وتكون خاطئة الا اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
-----	-----	-------------------

1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ : لتكن P, Q قضيتان

التكافؤ بين القضيتين P, Q هو القضية $(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

نرمز لها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

وتكون خاطئة الا اذا كان احدهما صحيحة والاخرى خاطئة

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ملاحظات :

$$\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P \quad (1)$$

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q} \quad (1)$$

$$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q} \quad (2)$$

$$S \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (S \wedge P) \vee (S \wedge Q) \quad (3)$$

$$S \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (S \vee P) \wedge (S \vee Q) \quad (4)$$

المكتمات :

الجملة المفتوحة :

نسمي جملة مفتوحة معرفة على المجموعة E كل جملة تحوي على متغير او اكثر وتصبح

قضية اذا استبدل المتغير بعنصر من E نرمز لها بالرمز $P(x), Q(x), \dots$

المكتم الكلي

العبارة : من اجل كل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\forall x \in E$
الرمز \forall يسمى الكمم الكلي اذا ادخل على جملة مفتوحة اصبحت قضية

العبارة : يوجد على الاقل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\exists x \in E$
الرمز \exists يسمى الكمم الوجودي اذا ادخل على جملة مفتوحة اصبحت قضية
امثلة

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad \text{قضية صحيحة}$$

$$(2) \quad \exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5 \quad \text{قضية صحيحة}$$

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y \quad \text{قضية صحيحة}$$

$$(3) \quad \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}, x < y \quad \text{قضية خاطئة}$$

ملاحظة : ترتيب الكممات مهم

نفي الكممات : نفي الكمم الوجودي هو الكمم الكلي والعكس
نفي قضية مكمة هو نفي الكمم ونفي الجملة التي تلي الكمم

امثلة

$$(1) \quad \overline{\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 5$$

$$(2) \quad \overline{\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$$

$$(3) \quad \overline{\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}, x < y$$

انماط البرهان :

(1) الاستنتاج : يعتمد على القاعدة التالية

اذا كانت P قضية صحيحة و القضية $Q \Rightarrow P$ صحيحة فان Q قضية صحيحة

(2) البرهان بالخلف : لاثبات صحة قضية P نفرض ان \bar{P} صحيحة ونبين ان

هذا يؤدي الي تناقض عندئذ نستنتج ان P صحيحة

مثال : اثبت ان $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

لنفرض ان $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ معناه $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ كسر غير قابل للاختزال

ينتج ان $a^2 = 2b^2$ اي a^2 زوجي وبالتالي a زوجي

$a = 2k$, $b^2 = 2k^2$ زوجي وبالتالي b زوجي

ومنه $\frac{a}{b}$ كسر قابل للاختزال وهذا تناقض مع الفرض

ومنه $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) البرهان بفصل الحالات : اذا كانت القضية $(P \Rightarrow Q \wedge \bar{P} \Rightarrow Q)$ صحيحة

نستنتج ان القضية Q صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ مضاعف للعدد 2

(1) n زوجي نضع $n = 2k$

$$n(n+1) = 2k(2k+1)$$

(2) n فردي نضع $n = 2k+1$

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+2)$$

$$= 2(2k+1)(k+1)$$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ زوجي

(4) البرهان بعكس النقيض : يعتمد على التكافؤ $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$

فلكي نثبت صحة الاستلزام $P \Rightarrow Q$ يكفي اثبات صحة الاستلزام $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

مثال : اثبت ان n زوجي $\Rightarrow n^2$ زوجي $\forall n \in \mathbb{N}$

يكفي اثبات ان n^2 فردي $\Rightarrow n$ فردي

n فردي نضع $n = 2k+1$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$$

ومنه n^2 فردي

(5) البرهان بمثال مضاد :

يتمثل في اثبات عدم صحة القضية $\forall x \in E, P(x)$ فيكفي ايجاد عنصر x_0

من E لا يحقق القضية

مثال : اثبت عدم صحة القضية $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

يكفي اخذ $n = 3$ $3^2 = 2^3$ خاطئة

(6) البرهان بالتراجع :

$P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$

لاثبات صحة القضية $\forall n \geq n_0 P(n)$ يكفي تحقيق الشرطين

(1) $P(n_0)$ محققة

(2) صحة الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

يتمثل في : نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن ان $P(n+1)$ صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3

(1) من اجل $n = 0$

$0(0+1)(0+2) = 0 = 3 \cdot 0$ محققة

(2) نفرض ان $n(n+1)(n+2) = 3k$

ونبرهن ان $(n+1)(n+2)(n+3) = 3k'$

$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$

$= 3k + 3(n+1)(n+2)$

$= 3[k + (n+1)(n+2)]$

$= 3k'$

حيث $k' = 3 + (n+1)(n+2)$

2.1 المجموعات

المجموعة كائن رياضي يتكون من افراد تسمى عناصر المجموعة

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا من E نقول ان a ينتمي الى E ونكتب $a \in E$

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا ليس من E نقول ان a لا ينتمي الى E ونكتب $a \notin E$

ملاحظة

(1) نرمز ب $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية, الاعداد الصحيحة

, الاعداد الناطقة, الاعداد الحقيقية, الاعداد المركبة على الترتيب

الاحتواء : نقول ان A مجموعة جزئية من B اذا كانت كل عناصر A موجودة في B

ونكتب $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

المساواة : نقول ان المجموعة A تساوي المجموعة B اذا كانت كل عناصر A

موجودة في B والعكس

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A \text{ ونكتب}$$

التقاطع : لتكن A و B مجموعتان من E

مجموعة العناصر المشتركة بين A و B تسمى تقاطع المجموعتين A و B

ونرمز لها بالرمز $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\} \text{ ونكتب}$$

الاتحاد : لتكن A و B مجموعتان من E

نسمى اتحاد المجموعتين A و B مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة

بين A و B نرمز لها بالرمز $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ او } x \in B\} \text{ ونكتب}$$

متممة مجموعة : لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E

متمة A هي المجموعة التي نرمل لها بالرمز \bar{A} والمعرفة ب

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

الفرق بين مجموعتين :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

الفرق التناظري لمجموعتين :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

الجمع : لتكن E و F مجموعتين

الجمع بين E و F هو المجموعة $E + F$ والمعرفة ب

$$E + F = \{x + y / x \in E \text{ و } y \in F\}$$

الجداء الديكارتي لمجموعتين : لتكن E و F مجموعتين

الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F هو المجموعة $E \times F$ والمعرفة ب

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ و } y \in F\}$$

ملاحظة :

$$(1) \text{ اذا كان } E = F$$

$$E^2 = E \times E = \{(x, y) / x \in E \text{ و } y \in E\}$$

(2) يصفة عامة

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

$$= \prod_{k=1}^n E_k$$

مثال :

$$F = \{3,4\} \quad E = \{1,2\}$$

$$E \times F = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

تجزئة مجموعة :

لتكن E مجموعة غير خالية

نقول عن جملة اجزاء $(E_i)_{i \in I}$ انها تشكل تجزئة ل E اذا تحقق

$$\forall i \in I, E_i \neq \phi \quad (1)$$

$$\forall i, j \in I, i \neq j \quad E_i \cap E_j = \phi \quad (2)$$

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E \quad (3)$$

$$E = \{1,2,3\}$$

$$E_3 = \{\{1\}\{2\}, \{3\}\} \quad E_2 = \{\{2\}, \{1,3\}\} \quad E_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{2,3\}\}$$

E_1 ليست تجزئة بينما كل من E_2 و E_3 تمثل تجزئة

خواص :

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (2)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (4)$$

$$(5) \text{ اذا كان } A \subset B \text{ فان } A \cup B = B, \quad A \cap B = A$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (6)$$

$$\text{اذا كان } A \subset B \text{ فان } |A| \leq |B|$$

(7) مجموعة اجزاء المجموعة :

المجموعات الجزئية ل E تسمى مجموعة اجزاء المجموعة E ونرمز

لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$. اذا كانت $A \in \mathcal{P}(E)$ فان $A \subset E$

مثال :

$$E = \{a, b\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$$

الدالة المميزة

نسمى الدالة المميزة للمجموعة الجزئية $A \subset E$ الدالة التي نرمز لها

$$\chi_A: A \rightarrow \{0,1\} \quad \text{والمعرفة كما يلي :}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

خواص :

$$A = B \Rightarrow \chi_A = \chi_B \quad (1)$$

$$A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B \quad (2)$$

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A \quad (3)$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \quad (4)$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \quad (5)$$

3.1 العلاقات

العلاقة بين مجموعتين : لتكن E و F مجموعتان غير خاليتين

تعريف : تسمى علاقة بين E و F كل خاصية ترفق بعناصر من E بعناصر من F

ونرمز لها بالرمز \mathfrak{R}

إذا كان $x \in E$ يرفق ب $y \in F$ نكتب $x \mathfrak{R} y$

بيان العلاقة : لتكن \mathfrak{R} علاقة بين E و F

بيان العلاقة \mathfrak{R} هو المجموعة الجزئية من $E \times F$ والمعرفة ب

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(x, y) \in E \times F, \quad x \mathfrak{R} y\}$$

مثال : $E = \{1,3\}, F = \{2,4,6\}$

\mathcal{R} علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

$$E \times F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{R}} &= \{(x, y) \in E \times F, \quad x \mathcal{R} y\} \\ &= \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,6)\} \end{aligned}$$

العلاقة العكسية : لتكن \mathcal{R} علاقة بين E و F

العلاقة العكسية للعلاقة \mathcal{R} هي العلاقة بين F و E والمرموز لها بالرمز \mathcal{R}^{-1}

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad y \mathcal{R}^{-1} x$$

مثال : $E = \{1,3\}, F = \{2,4,6\}$

\mathcal{R} علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

هي \mathcal{R}^{-1} العلاقة بين F و E معرفة ب y مضاعف x

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{R}^{-1}} &= \{(x, y) \in E \times F, \quad y \mathcal{R}^{-1} x\} \\ &= \{(2,1), (4,1), (6,1), (6,3)\} \end{aligned}$$

العلاقة في مجموعة : اذا كانت \mathcal{R} علاقة من E في E نقول ان \mathcal{R} علاقة في E

خواص :

(1) \mathcal{R} علاقة انعكاسية في E اذا فقط اذا كان $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

(2) \mathcal{R} علاقة تناظرية في E اذا فقط اذا كان

$$\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$$

(3) \mathcal{R} علاقة ضد تناظرية في E اذا فقط اذا كان

$$\forall x, y \in E, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{و} \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow x = y$$

(4) \mathcal{R} علاقة متعدية في E اذا فقط اذا كان

$$\forall x, y, z \in E, \begin{cases} x \mathcal{R}y \\ \text{و} \\ y \mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R}z$$

مثال :

\mathcal{R} علاقة \mathbb{Z} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \text{ مضاعف ل } x - y$$

\mathcal{R} علاقة انعكاسية في \mathbb{Z} لان :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x - x = 0 = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, 3 \text{ مضاعف ل } x - x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R}x$$

ومنه \mathcal{R} علاقة انعكاسية في \mathbb{Z}

(2) \mathcal{R} علاقة تناظرية في \mathbb{Z} لان

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R}y \Rightarrow 3 \text{ مضاعف ل } x - y$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x - y = 3k \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad y - x = 3(-k) \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, y \mathcal{R}x$$

ومنه \mathcal{R} علاقة تناظرية في \mathbb{Z}

(4) \mathcal{R} علاقة متعدية في \mathbb{Z} لان

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x \mathcal{R}y \\ \text{و} \\ y \mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3k \\ \text{و} \\ y - z = 3k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - z = 3(k + k')/k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \mathcal{R}z$$

ومنه \mathcal{R} علاقة متعدية في \mathbb{Z}

علاقة التكافؤ : \mathcal{R} علاقة لتكافؤ في E اذ فقط اذا كان

\mathcal{R} علاقة انعكاسية تناظرية و متعدية

اصناف التكافؤ : \mathcal{R} علاقة لتكافؤ في E و $x \in E$

صنف تكافؤ العنصر x هي مجموعة العناصر من E التي تحقق العلاقة \mathcal{R} مع x والتي نرمز لها بالرمز \dot{x} والمعرفة كمايلي

$$\dot{x} = \{ y \in E / x \mathcal{R} y \}$$

مثال :

\mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{Z} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \text{ مضاعف ل } 3$$

$$\dot{0} = \{ y \in E / 0 \mathcal{R} y \}$$

$$= \{ y \in E / y - 0 = 3k \}$$

$$= \{ \dots - 9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \dots \}$$

$$\dot{1} = \{ y \in E / 1 \mathcal{R} y \}$$

$$= \{ y \in E / y - 1 = 3k \}$$

$$= \{ \dots - 10, -7, -4, 0, 4, 7, 10 \dots \}$$

علاقة الترتيب : \mathcal{R} علاقة ترتيب في E اذ فقط اذا كان

\mathcal{R} علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية

علاقة الترتيب الكلي : \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في E اذ فقط اذا كان

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathcal{R} y \text{ او } y \mathcal{R} x$$

اذا كانت \mathcal{R} ليست علاقة ترتيب كلي في E فانها علاقة ترتيب جزئي

علاقة الترتيب في \mathbb{R} :

نعرف في \mathbb{R} العلاقة " $\dots \leq \dots$ " وهي علاقة ترتيب كلي في \mathbb{R}

مثال :

\mathcal{R} علاقة في \mathbb{R} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$$

\mathfrak{R} علاقة انعكاسية لان $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} x$$

ومنه \mathfrak{R} علاقة انعكاسية

(2) \mathfrak{R} علاقة ضد تناظرية في \mathbb{R} لان

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \mathfrak{R} y \\ \text{و} \\ y \mathfrak{R} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq x \end{cases} \\ \Rightarrow x = y$$

ومنه \mathfrak{R} علاقة ضد تناظرية في \mathbb{R}

(4) \mathfrak{R} علاقة متعدية في \mathbb{Z} لان

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x \mathfrak{R} y \\ \text{و} \\ y \mathfrak{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq z \end{cases} \\ \Rightarrow x \leq z \\ \Rightarrow x \mathfrak{R} z$$

ومنه \mathfrak{R} علاقة متعدية في \mathbb{R}

بمان \mathfrak{R} علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية اذا فهي علاقة ترتيب في \mathbb{R}

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ او } y \leq x$$

اذا \mathfrak{R} علاقة ترتيب كلي في \mathbb{R}

خواص علاقة الترتيب في \mathbb{R} :

(1) الجزء الصحيح :

من اجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح $[x]$ او $E(x)$ يحقق

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$ يسمى الجوء الصحيح للعدد x

امثلة :

إذا $x = 2,6$ و $2 \leq 2,6 < 3$ ويكون $[2,6] = 2$

إذا $x = -2,6$ و $-3 \leq -2,6 < -1$ ويكون $[-2,6] = -3$

(2) كثافة \mathbb{Q} في \mathbb{R} :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} ; x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \quad x < r < y$$

(3) الحواد العليا و السفلى :

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من \mathbb{R}

نقول عن A انه محدود من الاعلى اذا وجد العدد M بحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

نقول عن A انه محدود من الاسفل اذا وجد العدد m بحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \geq m$$

نقول عندئذ ان M حاد اعلى ل A (علوي) و m حاد ادنى (سفلي) ل A

نقول عن A انه محدود اذا كان محدود من الاعلى و من الاسفل اي

$$\forall x \in A, \exists M, m \quad m \leq x \leq M$$

(4) الحد الاعلى - الحد الادنى

ليكن A جزء غير خال من \mathbb{R} ومحدود من الاعلى (من الاسفل من)

نسمي اصغر الحواد العليا بالحد الاعلى ونرمز له بالرمز $\sup A$

نسمي الاكبر الحواد الدنيا بالحد الادنى ونرمز له بالرمز $\inf A$

امثلة :

$$A =]-1,3]$$

$$\sup A = 3, \quad \inf A = -1$$

(5) الحد الاكبر والحد الاصغر

اذا كان $\sup A \in A$ فانه في هذه الحالة يسمى بالحد الاكبر ونرمز له بالرمز $\max A$

إذا كان $inf A \in A$ فإنه في هذه الحالة يسمى بالحد الأصغر ونرمز له بالرمز $min A$
 مثال :

$$A =]-1,3]$$

$max A = sup A = 3 \in A$, $inf A = -1 \notin A$ إذا $min A$ غير موجود
 تمرين (1) :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{R}^* \right\}$$

عين $min A$ و $max A$, $inf A$ و $sup A$

الحل

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3 \Rightarrow 2 < A \leq 3$$

$$max A = sup A = 3 \in A$$

$inf A = 2 \notin A$ إذا $min A$ غير موجود

تمرين (2) :

(1) اوجد $sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0\}$

(2) $inf\left\{x + \frac{1}{x}; x > 0\right\}$

(3)* $inf\left\{2^x + 2^{\frac{1}{2}}; x > 0\right\}$

الحل :

$$(1) \Delta = -7 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0$$

$sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0\} = +\infty$ ومنه انه غير موجود

(2) نضع $f(x) = x + \frac{1}{x}; x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\forall x > 0 \quad f(x) \geq f(1) = 2$$

$$\inf \left\{ x + \frac{1}{x}; \quad x > 0 \right\} = 2$$

الخاصية المميزة للحد الاعلى (الادنى) :

ليكن $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \end{cases}$$

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon \end{cases}$$

الاثبات

لنفرض $\sup A = M$ وليكن $\varepsilon > 0$ نضع $M_0 = M - \varepsilon$

نجد $M_0 < M$ وبما أن M اصغر الحواد العليا وبالتالي M_0 ليس حاداً من الاعلى

اذا يوجد $x \in A$ بحيث $M_0 < x$ ومن جهة اخرى $x \leq M$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$$

4.1 التطبيقات

4.1.1 التطبيق : نقول عن f انه تطبيق من E نحو F اذا كان كل عنصر x

من E يرفق بعنصر وحيد y من F ونكتب :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

تسمى E مجموعة السوابق او (البدء) و F مجموعة الصور او (الوصول)

x يسمى سابقة y و y صورة x

التطبيق المطابق : نسمي التطبيق المطابق كل تطبيق I_E من E في E المعرف كمايلي

$$I_E: E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow I_E(x) = x$$

اقتصار وتمديد تطبيق : ليكن f تطبيق من E في F و g تطبيق من G في H

بحيث $G \subset E$ و $H \subset F$ نقول ان g اقتصار f على G و f امتداد g على E

تركيب تطبيقات : ليكن f تطبيق من E في F و g تطبيق من F في G

التطبيق من E نحو G المرموز له بالرمز $g \circ f$ والمعرف كمايلي

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

يسمى مركب التطبيقين $g \circ f$

الصورة المباشرة والصورة العكسية : ليكن f تطبيق من E في F

الصورة المباشرة : ليكن f تطبيق من E في F و $A \subset E$ الصورة المباشرة ل A

هي مجموعة صور عناصر A وفق f نرسم لها $f(A)$ والمعروفة كمايلي

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

الصورة العكسية : ليكن $B \subset F$

مجموعة عناصر E صورها وفق f في B نرسم لها $f^{-1}(B)$ والمعروفة كمايلي

والمعروفة كمايلي

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E$$

خواص : ليكن f تطبيق من E في F

ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من E و C, D مجموعتين جزئيتين من F

يكون لدينا عندئذ

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) . f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1)$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad (2)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) , f(f^{-1}(C)) \subset C \quad (3)$$

$$f^{-1}(C \cap F) = C \cap E \quad (f^{-1}(C))$$

مثال : ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2$

$$f(A) \text{ عين } A = [-3:3] \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f^{-1}(B) \text{ عين } B = [0,4] \subset \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

الحل :

$$f(A) = \{f(x) = x^2 / x \in [-3:3]\} = [0,9] \quad (1)$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = x^2 \in [0:4]\} \quad (2)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x^2 \leq 4\} = [-2,2]$$

التطبيقات المتباينة - الغامرة - المتقابلة :

ليكن f تطبيق من E في F

التطبيق المتباين :

$$f \text{ تطبيق متباين من } E \text{ في } F \Leftrightarrow \forall x, x' \in E / x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E / f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

التطبيق الغامر :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x) \Leftrightarrow f \text{ تطبيق غامر من } E \text{ في } F$$

التطبيق التقابلي :

$\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x) \Leftrightarrow f$ تطبيق تقابلي من E في F

f تطبيق تقابلي من E في $F \Leftrightarrow f$ متباين وغامر من E في F

مثال :

ليكن تطبيق من $\mathbb{R} - \{-2\}$ في $\mathbb{R} - \{3\}$ المعروف كمايلي

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

بين f متباين وغامر

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} - \{3\} : f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\frac{2x + 4}{x - 3} = \frac{2x' + 4}{x' - 3} \Leftrightarrow (2x + 4)(x' - 3) = (2x' + 4)(x - 3)$$

$$\Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{2\} \exists x \in \mathbb{R} - \{3\} / y = f(x)$$

$$y = \frac{2x + 4}{x - 3} \Rightarrow x = \frac{3y + 4}{y - 2}$$

ومنه f غامر

تمارين محلولة

التمرين الاول :

(1) هل القضايا التالية صحيحة ؟

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \text{ او } 1 - 1 = 0 \quad (\text{ ا })$$

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in E \quad (\text{ ب })$$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

الحل :

(1) حسب جدول الحقيقة فان القضيتين (ا) و (ب) صحيحتين

$$(2) \text{ نفي القضية (ا) هو } 1 - 1 \neq 0 \text{ و } \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

نفي القضية (ا) $x \notin E$ و $x \in \emptyset$ لان $x \in E$ او $x \notin \emptyset$ هو

$$\overline{x \in \emptyset \Rightarrow x \in E} \Leftrightarrow \overline{x \notin \emptyset \text{ او } x \in E} \\ \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ و } x \notin E$$

كتابة القضية (ا) على شكل استلزام

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \text{ او } 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow x \in E$$

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجزاء للمجموعة E اثبت ان

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B \quad (1)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \quad (2)$$

$$A \subset B \text{ و } C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D \quad (3)^*$$

الحل :

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B \quad (1)$$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

$$\text{لنبرهن ان } A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E^B$$

$$\text{لنفرض ان } A \cap B = \emptyset \text{ ونبرهن ان } A \subset C_E^B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \notin B \quad (\text{لان } A \cap B = \emptyset)$$

$$\Rightarrow x \in C_E^B$$

$$\text{ومنه } A \subset C_E^B$$

$$\text{لنبرهن ان } A \subset C_E^B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

لنفرض ان $A \subset C_E^B$ ونبرهن ان $A \cap B = \emptyset$

نستعمل البرهان بالخلف لنفرض ان $A \cap B \neq \emptyset$

$$\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ و } x \in B$$

$$\Rightarrow x \notin B \text{ و } x \in B \text{ (لان } A \subset C_E^B \text{)}$$

وهذا تناقض ومنه $A \cap B = \emptyset$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B \text{ ومنه ان}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \quad (2)$$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

$$A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A \text{ لنبرهن ان}$$

$$C_E^B \subset C_E^A \text{ لنفرض ان } A \subset B \text{ ونبرهن ان}$$

$$\forall x \in C_E^B \Rightarrow x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ (لان } A \subset B \text{)}$$

$$\Rightarrow x \in C_E^A$$

$$C_E^B \subset C_E^A \text{ ومنه}$$

$$C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow A \subset B \text{ نبرهن ان بنفس الطريقة}$$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجزاء للمجموعة E اثبت ان

$$A \cup B = A \cup C \text{ و } A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C \quad (1)$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \quad (2)^*$$

الحل :

لنفرض ان $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$ ونبرهن ان $B = C$

$$B = B \cap (A \cup B)$$

$$\begin{aligned}
&= B \cap (A \cup C) \quad (\text{لان } A \cup B = (A \cup C)) \\
&= (B \cap A) \cup (B \cap C) \quad (\text{لان } \cap \text{ توزيعي على } \cup) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \\
&= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
&= (A \cup B) \cap C \\
&= (A \cup C) \cap C = C
\end{aligned}$$

التمرين الرابع :

لتكن A و B و C مجموعات جزئية للمجموعة E اثبت ان

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B \quad (1)$$

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B \quad (2)^*$$

$$A - B = A \cap C_E^{A \cap B} = A \cap C_E^B \quad (3)$$

$$(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) = E \quad \text{و} \quad (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \bar{A}}) = \phi \quad (4)^*$$

الحل :

$$(1) \text{ البرهان على } C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

للبرهان على $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ يكفي البرهان على $C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

$$C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A \cap B}$$

البرهان على $C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

$$\forall x \in C_E^{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B$$

$$\Rightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B$$

$$C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B \text{ ومنه}$$

$$C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A \cap B} \text{ بنغس الطريقة نبرهن ان}$$

$$(3) \text{ البرهان على } A - B = A \cap C_E^{A \cap B} = A \cap C_E^B \text{ يكفي البرهان}$$

الاحتواء من الجهتين

$$A - B \subset A \cap C_E^{A \cap B} \text{ البرهان على}$$

$$\forall x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in C_E^B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap C_E^B$$

$$A - B \subset A \cap C_E^{A \cap B} \text{ ومنه}$$

$$A \cap C_E^{A \cap B} \subset A - B \text{ بنغس الطريقة نبرهن ان}$$

التمرين الخامس :

لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ في $\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \cap B = \phi \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

$$(1) \text{ اثبت ان } f(\phi) = 0$$

$$(2) \text{ اثبت انه اذا كان } A \cap B \neq \phi \text{ فان}$$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

$$(3)^* \text{ احسب } f(A \cup B \cup C) \text{ حيث } A, B, C \in \mathcal{P}(E)$$

الحل :

$$(1) \text{ اثبات ان } f(\phi) = 0$$

$$\phi \cap \phi = \phi \Rightarrow f(\phi \cup \phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Rightarrow f(\phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Rightarrow f(\phi) = 0$$

(2) اثبات انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

على الترتيب $\{A - B, B\}$ تجزئة لـ $A \cup B$,

$$(A - B) \cap B = \phi, \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \phi$$

$$(A - B) \cup B = A \cup B \quad \text{و} \quad (A - B) \cup (A \cap B) = A$$

ومنه حسب (1) نجد

$$f(A \cup B) = f((A - B) \cup B) = f(A - B) + f(B)$$

$$f(A) = f(A - B) + f(A \cap B)$$

ب طرح العبارتين طرف لطرف

$$f(A \cup B) - f(A) = f(B) - f(A \cap B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E في F و A, B مجموعتين جزئيتين من E و C, D من F

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \quad \text{اثبت ان (1)}$$

$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \quad \text{و}$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{اثبت ان (2)}$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad \text{و}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{اثبت ان (3)}$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad \text{و}$$

الحل :

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \quad \text{اثبات ان (1)}$$

نفرض ال $A \subset B$ ونبرهن ان $f(A) \subset f(B)$

$$\forall y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A / y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in B / y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(B)$$

ومنه $f(A) \subset f(B)$

$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \quad (1) \text{ اثبات ان}$$

نفرض ال $C \subset D$ ونبرهن ان $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

$$\forall x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C \subset D$$

$$\Rightarrow f(x) \in D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \quad \text{ومنه}$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (2) \text{ اثبات ان}$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad \text{و}$$

للبرهان على $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ان نبرهن على

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad \text{و} \quad f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

للبرهان على $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$\forall y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in (A \cup B) / y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \vee x \in B / y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in A / y = f(x) \vee x \in B / y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

$$(1) \quad \dots \quad f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad \text{اذا} \quad (A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad (A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

للبرهان على $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

$$A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$$

وعليه فان (2) ... $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

من (1) و (2) نجد ان $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

البرهان على $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

$$\forall x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \vee f(x) \in f^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

(3) اثبات ان $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \text{ و}$$

البرهان على $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

البرهان على $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$\forall x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge f(x) \in f^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E في F و A, B مجموعتين جزئيتين من E و C, D من F

$$(1) \text{ اثبت ان } f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$$

$$(2) \text{ اثبت ان } f^{-1}(C_F^B) = C_F^{f^{-1}(B)}$$

اكتب المعادلة هنا

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ؟

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R} - \{2\}$ في $\mathbb{R} - \{a\}$ $g(x) = f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غامر في هذه الحالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

$$x \rightarrow 2x + 3$$

عين $h \circ g$ و $g \circ h$ عين مجموعة تعريف كلا من $h \circ g$ و $g \circ h$

الحل :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} - \{2\} : f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x'+1}{x'-2} \Leftrightarrow (x+1)(x'-2) = (x'+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} - \{3\} / y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

اذا كان $y = 1$ فان x غير موجود ومنه غير غامر

$$g(x) = f(x) \quad \mathbb{R} - \{a\} \text{ في}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R} - \{3\} / y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

حتى يكون غامر يجب ان يكون $y \neq 1$ بمعنى $y \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} = g^{-1}(y)$$

$$g^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \quad \text{ومنه}$$

$$x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

$$x \rightarrow 2x+3$$

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = 2g(x) + 3 = 2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3 = \frac{5x-4}{x-2}$$

$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = \frac{(2x+3)+1}{(2x+3)-2} = \frac{2x+4}{2x-1}$$

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f, g حيث f من E في F و g من F في G

بين ان :

$$(1) \quad f \text{ متباين} \Rightarrow g \circ f \text{ متباين}$$

$$(2) \quad g \text{ متباين} \Rightarrow f \text{ غامر و } g \circ f \text{ متباين}$$

$$(3)^* \quad g \text{ غامر} \Rightarrow g \circ f \text{ غامر}$$

$$(4)^* \quad f \text{ غامر} \Rightarrow g \text{ متباين و } g \circ f \text{ غامر}$$

الحل :

$$(1) \quad \text{اثبات } f \text{ متباين} \Rightarrow g \circ f \text{ متباين}$$

لنفرض ان $g \circ f$ متباين ونثبت ان f متباين

$$\forall x, x' \in E: f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Leftrightarrow x = x' \text{ (لان } g \text{ تطبيق)}$$

وعليه فانه اذا كان $g \circ f$ متباين فان f متباين

$$(2) \quad g \text{ متباين} \Rightarrow f \text{ غامر و } g \circ f \text{ متباين}$$

$g \circ f$ متباين فان f متباين ومنه f تقابلي وعليه فان التطبيق f^{-1} موجود

$$[\forall x, x' \in E (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, [(g \circ f) \circ f^{-1}](x) = [(g \circ f) \circ f^{-1}](x') \Rightarrow x = x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, [g \circ (f \circ f^{-1})](x) = [g \circ (f \circ f^{-1})](x') \Rightarrow x = x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$$

$$\Leftrightarrow g \text{ متباين}$$

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من \mathbb{R} في \mathbb{R} معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) ليكن $I = [0, \infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$$

الحل :

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

$$x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+|x'|}$$

$$\Rightarrow |x| = |x'|$$

$$\Rightarrow x = x' \vee x = -x'$$

ومنه f ليس متباين

التمرين الحادي عشر :

\mathcal{R} علاقة في \mathbb{Z} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \text{ مضاعف ل } 7$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{Z}

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ \mathbb{Z} / \mathcal{R}

التمرين الثاني عشر :

\mathcal{R} علاقة في \mathbb{R} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{R}

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموعة E

ولتكن \mathcal{R} علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة ترتيب في \mathbb{R}

(2) هل \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في \mathbb{R} ?

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموعة E

ولتكن \mathcal{R} علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة ترتيب في $\mathcal{P}(E)$

(2) هل \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في $\mathcal{P}(E)$?

التمرين الخامس عشر :

عين $\min A, \max A, \inf A, \sup A$ في كل حالة

$$A = \{-x^2 + 2x, x \in]1,2[\} \quad (1)$$

$$A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (2)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (3)$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} ; x^3 > 8\} \quad (4)^*$$

الحل

$$A = \{-x^2 + 2x, x \in]1,2[\} \quad (1)$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -2x + 2$$

اذا كان $x \in]1,2[$ فان $f'(x) < 0$

$$\sup A = f(1) = 1 \notin A, \inf A = f(2) = 0 \notin A$$

ومنه $\max A, \min A$ غير موجود

$$A = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \} \quad (2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - 1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{(-1)^n}{n} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} < 2$$

$$\sup A = 2 \notin A, \inf A = 0 \in A$$

ومنه $\min A = 0$ و $\max A$ غير موجود

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{4n+2}$$

$$n > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{4n+2} < 1$$

$$\sup A = 1 \notin A, \inf A = \frac{1}{2} \notin A$$

ومنه $\max A, \min A$ غير موجود

التمرين السادس عشر :

لتكن المجموعة

$$A = \left\{ \frac{n+2}{n-1}; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

$$(1) \text{ بين ان } \inf A = 1, \sup A = 4$$

$$(2) \text{ هل } \max A, \min A \text{ موجودة ?}$$

$$(3)$$

$$B = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{n+2}{n-1}; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

عين $\inf B, \sup B$

$$C = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

عين $\sup C$

الحل

$$\frac{n+2}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1}$$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{n-1} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{n-1} \leq 4$$

ومنه $\sup A = 4$

وبما $4 \in A$ إذا $\max A = 4$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{n-1} > 1$$

ومنه $\inf A = 1$ وبما $1 \notin A$ إذا $\min A$ غير موجود

$$B = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{n+2}{n-1} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\} = \underbrace{\left\{ \frac{n+2}{n-1} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}}_A + \underbrace{\left\{ \frac{1}{4} \right\}}_D$$

$$\sup B = \sup A + \sup D = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\inf B = \inf A + \inf D = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\} = \underbrace{\left\{ \frac{n+2}{n-1} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}}_A \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{4} \right\}}_D$$

$$\sup C = \sup(A \cup D) = \max(\sup A, \sup D) = \max\left(4, \frac{1}{4}\right) = 4$$

سلسلة تمارين رقم 1 (المنطق الرياضي – المجموعات – العلاقات – التطبيقات)

التمرين الاول :

(1) هل القضايا التالية صحيحة ؟

$$(ا) \quad 1 - 1 = 0 \text{ او } \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$$

$$(ب) \quad x \in \emptyset \Rightarrow x \in E$$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجزاء للمجموعة E اثبت ان

$$(1) \quad A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B$$

$$(2) \quad A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$$

$$(3) \quad A \subset B \quad C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجزاء للمجموعة E اثبت ان

$$(1) \quad A \cup B = A \cup C \quad A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$$

$$(2) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

التمرين الرابع :

لتكن A و B اجزاء للمجموعة E اثبت ان

$$(1) \quad C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B \quad (2) \quad C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

$$(3) \quad A - B = A \cap C_E^B$$

$$(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap A}) = E \quad \text{و} \quad (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup A}) = \phi \quad (4)^*$$

التمرين الخامس :

لتكن مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ في $\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \cap B = \phi \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

$$(1) \quad \text{اثبت ان } f(\phi) = 0$$

$$(2) \quad \text{اثبت انه اذا كان } A \cap B \neq \phi \text{ فان}$$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

$$(3) \quad \text{احسب } f(A \cup B \cup C) \text{ حيث } A, B, C \in \mathcal{P}(E)$$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E في F و A, B مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

$$(1) \quad \text{اثبت ان } A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

$$\text{و } C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

$$(2) \quad \text{اثبت ان } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\text{و } f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$(3) \quad \text{اثبت ان } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$\text{و } f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E في F و A, B مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

$$(1) \quad \text{اثبت ان } f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$(2) \quad \text{اثبت ان } f^{-1}(C_F^B) = C_F^{f^{-1}(C)}$$

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ?

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R} - \{2\}$ في $\mathbb{R} - \{a\}$ $g(x) = f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غام في هذه الحالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3)$$

$$x \rightarrow 2x + 3$$

عين $h \circ g$ هل يمكن تعيين $g \circ h$ علل

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f, g حيث f من E في F و g من F في G

بين ان :

$$(1) f \text{ متباين} \Rightarrow f \circ g \text{ متباين}$$

$$(2) g \text{ متباين} \Rightarrow f \text{ غاثر و } f \circ g \text{ متباين}$$

$$(3) g \text{ غامر} \Rightarrow f \circ g \text{ غامر}$$

$$(4) f \text{ غامر} \Rightarrow g \text{ متباين و } g \circ f \text{ غاثر}$$

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من \mathbb{R} في \mathbb{R} معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

(1) هل f متباين ? هل f غامر ?

(2) ليكن $I = [0, \infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$$

التمرين الحادي عشر :

\mathcal{R} علاقة في \mathbb{Z} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \text{ مضاعف ل } 7$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{Z}

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ \mathbb{Z} / \mathcal{R}

التمرين الثاني عشر :

\mathcal{R} علاقة في \mathbb{R} معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{R}

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموعة E

ولتكن \mathcal{R} علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة ترتيب في \mathbb{R}

(2) هل \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في \mathbb{R} ?

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموعة E

ولتكن \mathcal{R} علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$$

(1) بين ان \mathcal{R} علاقة ترتيب في $\mathcal{P}(E)$

(2) هل \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في $\mathcal{P}(E)$?

التمرين الخامس عشر :

عين $\min A, \max A, \inf A, \sup A$ في كل حالة

$$A = \{-x^2 + 2x, x \in]1, 2[\} \quad (1)$$

$$A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (2)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (3)$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} ; x^3 > 8\} \quad (4)^*$$

الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 - - عموميات

1 - 1 تعريف : نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة من $E \subseteq \mathbb{R}$ في \mathbb{R} ترفق

بكل عنصر من E بعنصر على الاكثر من \mathbb{R} ونرمز لها بالرمز f, g, h, \dots

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

1 - 2 مجموعة تعريف دالة : هي مجموعة الاعداد الحقيقية التي لها صورة بالدالة f

ونرم لها بالرمز D_f

امثلة

$$D_f = \mathbb{R} \text{ ومنه } f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ (1)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 3} \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{3\} \text{ (2)}$$

$$D_f = [-1,1] \text{ ومنه } f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ معرفة على المجال } [-1,1] \text{ (3)}$$

ملاحظات :

(1) دوال كثيرات الحدود معرفة على \mathbb{R}

(2) الدوال الناطقة معرفة اذا كان المقام غير معدوم

(3) دالة الجذر معرفة اذا كان ما داخل الجذر موجب

(4) الدوال $x \rightarrow \sin(x)$ $x \rightarrow \cos(x)$ معرفة على \mathbb{R}

1 - 3 بيان دالة :

تعريف : نسمي بيان الدالة f مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث

$\{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$ ونرمز لها بالرمز Γ ونكتب

$$\Gamma = \{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$$

2 - الدوال الزوجية - الفردية - الدورية

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f ; f(-x) = f(x) \Leftrightarrow \text{زوجية } f$$

$$\forall x \in D_f : -x \in D_f ; f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \text{فردية } f$$

$$\forall x \in D_f : x + r \in D_f ; f(x + r) = f(x) \Leftrightarrow \text{دورية } f$$

ملاحظة : اذا كانت f زوجية (فردية على التوالي) فان بيانها متناظر بالنسبة

لمحور الترتيب (للمبدأ على التوالي) يكفي دراسة دالة زوجية او فردية على D_f

$D_f \cap \mathbb{R}_+$ ثم اتمام بيان f بالتناظر

ملاحظة : (1) اذا كانت f دورية يكفي دراستها مجال طولها الدور

(2) توجد دوال دوؤية (غير ثابتة) ليس لها دور

مثلا

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الدوال الرتيبة - الدوال المحدودة :

$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow \text{f متزايدة}$$

$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow \text{f متزايدة}$$

$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow \text{f ثابتة}$$

f رتيبة $\Leftrightarrow f$ متزايدة او f مناقصة

$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow \text{f ثابتة}$$

$$\forall x \in E \exists \alpha \in \mathbb{R} f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \text{f محدودة من الاعلى}$$

$$\forall x \in E \exists \beta \in \mathbb{R} f(x) \geq \beta \Leftrightarrow \text{f محدودة من الاسفل}$$

$$\forall x \in E \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \beta \leq f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \text{f محدودة}$$

ملاحظة :

$$M = \sup_{x \in E} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

$$\inf_{x \in E} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, f(x) < m + \varepsilon \end{cases}$$

مثلا

$$f(x) = \sin x$$

$$f(\mathbb{R}) = [0,1] \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$$

عمليات على الدوال :

نشيرب $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ الى مجموعة الدوال من \mathbb{R} في E

من اجل كل $f, g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ من اجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

ملاحظة : $x \in E \subset \mathbb{R} \quad f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

تمرين 1 : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1) f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad (2)^* f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1}}$$

الحل

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \text{معرفة } f(x) = \sqrt{4 - x^2},$$

$$x \in [-2, 2] \Leftrightarrow$$

$$D_f = [-2, 2]$$

تمرين 2 : بين ان f دورية وعين دوؤها في حالة

$$(1) f(x) = \cos 2x - 4 \cos x, \quad (2) f(x) = \frac{1}{3} \sin \left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(3) f(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

تمرين 3 : ادرس زوجية او فردية الدوال التالية

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad f(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos 3x}{x^2} = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$, \quad f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right), \quad f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

النهايات

النهاية المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 1 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f عند a ونرمز لها بالرمز $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 2 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يمين a ونرمز لها بالرمز $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ اكان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 3 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يسار a ونرمز لها بالرمز $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ اكان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \quad \text{اثبت ان}$$

من اجل $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2||x + 2| < \varepsilon$$

من اجل $x \in]1,3[$ لدينا $1 < x < 3$

$$|x - 2| < 1 \text{ و } |x + 2| < 5 \quad \text{ومنه}$$

$$|x + 2| < 5 \Leftrightarrow |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5\alpha$$

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{يكفي اختيار } 5\alpha < \varepsilon \text{ يعني}$$

$$\text{ومنه اذا اخذنا } \alpha < \frac{\varepsilon}{5} \text{ نحصل على}$$

$$|x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0 \quad \text{اثبت ان}$$

ل اثبات ان $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$ نتحقق من صحة مايلي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - 1 < \alpha \Rightarrow |\sqrt{x-1}| < \varepsilon$$

لدينا

$$|\sqrt{x-1}| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x - 1 < \varepsilon^2$$

ومنه

$$0 < x - 1 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x-1}| < \varepsilon$$

اذا اخذنا

$$\alpha \leq \varepsilon^2 \text{ نحصل على الاستلزام التالي}$$

$$0 < x - 1 < \alpha \Rightarrow |\sqrt{x-1}| < \varepsilon$$

النهايات غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 4 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0, x_0 + a[$

تكون نهاية f عند x_0 على يمين هي $+\infty$ اذا فقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = +\infty$$

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $], x_0 - a, x_0]$

تكون نهاية f عند x_0 على اليسار هي $+\infty$ اذا فقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = +\infty$$

تعريف 6 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0

تكون نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ اذا فقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

النهايات عند $+\infty$ او $-\infty$:

تعريف 7 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b > 0 : x > b \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x > b \Rightarrow f(x) > a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x < -b \Rightarrow f(x) < -a$$

نظريات الاولية على النهايات :

لتكن f و g دالتان عدديتان l, x_0, l' اعداد حقيقية

نقبل بدون برهان النظريات التالية

نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية جداء دالتين :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	ح ع ت	ح ع ت

حالات عدم التعيين : هناك اربع حالات عدم التعيين و هي

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, +\infty - \infty$$

نهاية دالة كثير حدود او دالة ناطقة عند $+\infty$ او $-\infty$:

النهاية عند $+\infty$ او $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية الحد درجة الاكبر عند

$+\infty$ او $-\infty$

النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الاكبر درجة

عند $+\infty$ او $-\infty$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x^2 + 2x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

نهاية دالة مركبة : f, g دالتان عدديتان a, b, c اعداد حقيقية او $+\infty$

أو $-\infty$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$

فان $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

مثال

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4} \quad h(x) = \tan\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{نضع} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \quad g(x) = \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

النهايات والمقارنة: f, g, h ثلاث دوال معرفة على مجال I من \mathbb{R}

(1) إذا كانت $\forall x \in I, g(x) \leq f(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

(2) إذا كانت $\forall x \in I, g(x) \geq f(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ فان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

(3) إذا كانت $\forall x \in I, h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ وكانت

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

ملاحظة: تبقى هذه القواعد صحيحة من اجل $+\infty$ و $-\infty$

امثلة: (1) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب $f(x) = x + \sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

$$\text{بمان} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{بمان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* ب $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - 1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[\quad \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{بمان}$$

تمرين 1 : بين ان

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

(1) باستعمال التعريف

(2) باستعمال النظريات على النهايات

الحل

(1) باستعمال التعريف

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow \left| \frac{1}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{1+x} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \varepsilon \Rightarrow 1+x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

اذا اخذنا $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > \alpha > 0$ نحصل على الاستبزام التالي

$$x > A \Rightarrow \left| \frac{1}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1},$$

$$(3)^* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$$

الحل

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{3}{4}$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$$

$$(3)^* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

$$(4)^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

الحل

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x + 1} - 2)(\sqrt{x + 1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x + 1} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x + 2} - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)((\sqrt{x + 7} + 3))}{(\sqrt{x + 7} - 3)(\sqrt{x + 2} + 2)((\sqrt{x + 7} + 3))} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)((\sqrt{x + 7} + 3))}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{((\sqrt{x + 7} + 3))}{(\sqrt{x + 2} + 2)} = \frac{3}{2}$$

تمرين 4 : احسب النهايات التالية*

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + 1 \quad (2)^* \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} \quad (4)^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \quad (6)^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - (x - 1))(\sqrt{x^2 + x} + (x - 1))}{(\sqrt{x^2 + x} + (x - 1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right)} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}} \right)} = 0$$

تمرين 5 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$$

$$(2)^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

$$(4)^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sin x - \sin 2x}$$

الحل

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos x - 1]}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left[-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right]}{x^3 \cos x}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} \times \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$$

الاستمرار

الاستمرار عند نقطة x_0

تعريف 1 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ يشمل x_0

f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن دالة معرفة ب

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$$

ومنه f مستمرة عند 0

الاستمرار على يمين x_0

تعريف 2 : لتكن دالة معرفة على مجال $[x_0, x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ إذا تحقق}$$

مثال : لتكن دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \sqrt{x - 2} = 0 = f(2)$$

الاستمرار على يسار x_0

تعريف 3 : لتكن دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha, x_0]$ حيث $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ إذا تحقق}$$

مثال : لتكن دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \sqrt{1 - x} = 0 = f(1)$$

تعريف 4 : لتكن دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ إذا تحقق}$$

الاستمرار على مجال :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

(1) – دالة مستمرة على المجال $I \subset \mathbb{R}$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة من I

(2) – دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة منه

(3) – دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة على المجال

$]a, b[$ و عند a على اليمين

(4) – دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$

و عند b على اليسار

(5) – دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$

و عند a على اليمين و عند b على اليسار

مثال :

(1) دوال كثيرات الحدود مستمرة على \mathbb{R}

(2) الدوال الناطقة مستمرة على مجموعة تعريفها

(3) الدوال $x \rightarrow \sin x, x \rightarrow \cos x$ مستمرة على \mathbb{R}

التمديد بالاستمرار :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ لا يشمل x_0

اذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ فان الدالة g المعرفة كمايلي

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

تسمى تمديد بالاستمرار ل f عند x_0

مثال : لتكن دالة معرفة ب

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

اوجد g تمديد بالاستمرار ل f عند 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

مثال : لتكن دالة معرفة

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

اوجد g تمديد بالاستمرار ل f عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

نظريات على الدوال المستمرة :

f و g دالتان عدديتان

نظرية 1 : اذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ وكانت g مستمرة عند l فان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l)$$

الاثبات :

g مستمرة عند l حسب تعريف النهاية نجد

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |y - l| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

وبما l نهاية f عند x_0 فانه يوجد $\alpha' > 0$ بحيث

$$|x - x_0| < \alpha' \Rightarrow |f(x) - l| < \alpha$$

وبالتالي يكون

$$|x - x_0| < \alpha' \Rightarrow |f(x) - l| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

اذا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' > 0 |x - x_0| < \alpha' \Rightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l) \quad \text{ومنه}$$

استمرار دالة مركبة :

نظرية 2 : اذا كانت f مستمرة عند x_0 وكانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فان

$g \circ f$ مستمرة عند x_0

الاثبات :

لدينا

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{من جهة } f \text{ دالة مستمرة عند } x_0 \text{ اذا تحقق}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) \quad \text{من جهة اخرى}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) \quad \text{وحسب النظرية 1 نجد}$$

اذا الدالة $g \circ f$ مستمرة عند x_0

نظرية 2 : اذا كانت f و g مستمرتان عند x_0 و k عدد حقيقي فان

$$kf, f \times g, f + g \quad \text{دوال مستمرة عند } x_0 \text{ واذا كانت } g(x_0) \neq 0$$

$$\frac{f}{g}, \frac{1}{g} \quad \text{مستمرتان عند } x_0$$

نظرية القيم المتوسطة : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وكان

$$f(a) \times f(b) < 0 \quad \text{فانه يوجد على الاقل } c \in]a, b[\text{ بحيث } f(c) = 0$$

مثال :

$$\text{بين ان المعادلة } x^3 + x + 1 = 0 \text{ تقبل حلا على المجال } [-1, 0]$$

الحل :

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

f دالة كثير حدود مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة على المجال $[-1, 0]$

$$f(-1) = -1^3 - 1 + 1 = -1,$$

$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) \times f(0) = -1 < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

نظرية : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وكان k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فانه يوجد على الاقل $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = k$
الاثبات :

من اجل $k = f(a)$ يكفي اخذ $c = a$

من اجل $k = f(b)$ يكفي اخذ $c = b$

من اجل $f(a) < k < f(b)$ نضع

$$g(x) = f(x) - k$$

g مستمرة على المجال $[a, b]$ لانها مجموع دالتين مستمرتين على $[a, b]$

$$g(a) \times g(b) < 0 \text{ و}$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فانه يوجد على الاقل

$$g(a) = f(c) - k = 0 \text{ بحيث } c \in [a, b]$$

بمعنى ان $f(c) = k$

مثال : بين ان المعادلة $4x \cos x = 1$ تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

f دالة مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$$f(x) = 4x \cos x - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 1 = 2 \frac{\pi}{3} - 1 > 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $4x \cos x - 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

نتيجة : اذا كانت f دالة مستمرة ورتبية على المجال $[a, b]$ وكان k

عدد حقيقيا محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فانه يوجد $c \in [a, b]$ وحيد

$$f(c) = k \text{ بحيث}$$

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة :

لتكن الدالة f معرفة ومستمرة المجال $I \subset \mathbb{R}$ محدود او غير محدود

صورة المجال I بالدالة f المجال هو $f(I)$ المعروف كمايلي

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I : y = f(x)\}$$

نظرية : اذا كانت f مستمرة على مجال I فان صورة I بالدالة f هو مجال من \mathbb{R}

تمرين محلول

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

f مستمرة على كل مجال I حيث $I \subset]-\infty, 1[$ او $I \subset]1, +\infty[$

اذا كان $I =]0, 1[$ فان $f(I) =]-\infty, -1[$

اذا كان $I = [-1, 0]$ فان $f(I) = [-1, 0]$

اذا كان $I = [2, +\infty[$ فان $f(I) =]1, 3]$

تمارين محلولة

تمرين 1 : α عدد حقيقي f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x + \alpha, & x < 0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة على \mathbb{R}

الحل

اذا كان $x \geq 0$ فان $f(x) = x^2$ مستمرة لانها دالة مربع

اذا كان $x < 0$ فان $f(x) = x + \alpha$ مستمرة لانها دالة تالفية

حتى تكون f مستمرة على \mathbb{R} يجب ان تكون مستمرة عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \alpha = \alpha = f(0)$$

حتى تكون f مستمرة على \mathbb{R} يجب ان تكون $\alpha = 0$

تمرين 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 1$

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 3)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 3 = -1 \end{aligned}$$

ومنه f تقبل الدالة g تمديد بالاستمرار عند $x_0 = 1$ والمعرفة كمايلي

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

*تمرين 3 : لتكن f العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 4 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \pi \frac{\cos^2(x) - \cos x}{2\cos^2(x) - 3\cos x + 1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 5 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x - \alpha , & x \geq 0 \\ \frac{e^x - 1}{\sin x} , & x < 0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$

الدوال العكسية

الدالة العكسية لدالة مستمرة ورتبية :

نظرية : اذا كانت f مستمرة ووثيية تماما على مجال I فان f تقبل دالة عكسية
 f^{-1} لها الخواص التالية :

الدالة f^{-1} معرفة على المجال $f(I)$ وتأخذ قيمها في المجال I
الدالة f^{-1} مستمرة ووثيية تماما على المجال $f(I)$ ولها نفس اتجاه
تغير الدالة f
الاثبات :

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f \text{ رتيبة تماما على } I$$

$$f \text{ متباين على } I \Leftrightarrow$$

(2) اذا كانت f دالة مستمرة على I من \mathbb{R} عندئذ f غامر من I في $f(I)$

بالفعل . حسب تعريف $f(I)$ صورة المجال I بواسطة الدالة المستمرة f

$$\forall y \in f(I) , \exists x \in I : y = f(x)$$

مما يعني ان f غامر من I في $f(I)$

ومنه اذا كانت f مستمرة ورتيية تماما على مجال I

فان f تطبيق تقابلي من I في $f(I)$ وعليه فهي تقبل تطبيق عكسي f^{-1}

معرفة $f(I)$ نحو I

الدالة f^{-1} تطبيق تقابلي من $f(I)$ في I اذن فهي مستمرة ووثيية تماما على

مجال $f(I)$

$$\forall y_1, y_2 \in f(I) \text{ بحيث } y_1 \neq y_2 \exists x_1, x_2 \in I : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

وهذا يكافي ايضا

$$x_1 \neq x_2 \text{ فيكون لدينا مع ملاحظة } x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$$

$$\frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

مما يعني ان f^{-1} لها نفس اتجاه تغير f

مثال : دالة معرفة على \mathbb{R} ب

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

عين $f([0, +\infty[$ صورة المجال $[0, +\infty[$ بالدالة f

بين ان f تقبل دالة عكسية على المجال $[0, +\infty[$ يطلب تعيينها

الحل :

تعيين $f([0, +\infty[$

$$f(0) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$f([0, +\infty[) = [-1, 1[\quad \text{ومنه}$$

f مستمرة على $[0, +\infty[$ لانها دالة ناطقة

f دالة متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ لان

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0$$

بمان f دالة مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0, +\infty[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $[-1, 1[$ نحو المجال $[0, +\infty[$

$$\forall y \in [-1, 1[\exists x \in [0, +\infty[: y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \vee x = -\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

بمان $x \in [0, +\infty[$ فان $x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$ فالدالة العكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$f^{-1}: [-1, 1[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

الدوال المثلثية ودوالها العكسية :

الجيب وقوس الجيب ($Arcsin, sin$) :

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow f(x) = \sin x$$

بمان f دالة مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $[-1, 1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arcsinx$ فهي مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $[-1, 1]$

وتأخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1] y = \sin x \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

الجيب التمام وقوس الجيب التمام ($Arccos, cos$) :

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

بمان f دالة مستمرة ورتبية تماما (متناقصة تماما) على المجال $[0, \pi]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $[-1, 1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arccosx$ فهي مستمرة ورتبية تماما (متناقصة تماما) على المجال $[-1, 1]$

وتأخذ قيمها في المجال $[0, \pi]$ حيث

$$\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1] y = \cos x \Leftrightarrow x = Arccosy$$

الظل وقوس الظل ($Arctan, tan$)

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \rightarrow f(x) = \tan x$$

بمان f دالة مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $]-\infty, \infty[$ ونرمز لها بالرمز

$Arctanx$ فهي مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty, \infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ حيث

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in]-\infty, \infty[y = \tan x \Leftrightarrow x = Arctany$$

نتائج :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{Arcsin}(\sin x) = x \quad (1)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \text{Arccos}(\cos x) = x \quad (2)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{Arctan}(\tan x) = x \quad (3)$$

$$\forall x \in [-1, 1] \sin(\text{Arcsin} x) = x \quad (4)$$

$$\forall x \in [-1, 1] \cos(\text{Arccos} x) = x \quad (5)$$

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[\tan(\text{Arctan} x) = x \quad (6)$$

$$\forall x \in [-1, 1] (\text{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall x \in [-1, 1] (\text{Arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$\forall x \in]-1, 1[(\text{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

الاثبات :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \forall y \in [-1, 1] y = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arcsin} y \quad (1)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsiny} = x$$

$$\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1] y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccosy} \quad (2)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \text{Arccos}(\sin x) = \text{Arccosy} = x$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty, \infty[y = \tan x \Leftrightarrow x = \text{Arctany} \quad (3)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctany} = x$$

$$\forall y \in [-1, 1] \sin(\text{Arcsiny}) = y \quad (4)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \forall y \in [-1, 1] y = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arcsiny}$$

$$\forall y \in [-1, 1] \sin(\text{Arcsiny}) = \sin x = y$$

$$\forall x \in [-1, 1] (\text{Arcsinx})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \forall x \in [-1, 1] y = \text{Arcsinx} \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$\Leftrightarrow 1 = (\sin y)' = y' \cos y$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1, 1] (\text{Arcsinx})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تمرين : احسب Arcsinx و Arccosx لكل من $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}$

احسب Arctanx لكل من $0, 1, \sqrt{3}$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \forall y \in [-1, 1] y = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arcsiny}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] x = \text{Arcsin}0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0, \pi] , \forall y \in [-1,1] y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos}y$$

$$x = \text{Arccos}0 \Leftrightarrow 0 = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty, \infty[y = \tan x \Leftrightarrow x = \text{Arctan}y$$

$$x = \text{Arctan}0 \Leftrightarrow 0 = \tan x \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \forall y \in [-1,1] y = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}y$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] x = \text{Arcsin}1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0, \pi] , \forall y \in [-1,1] y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos}y$$

$$x = \text{Arccos}1 \Leftrightarrow 1 = \cos x \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty, \infty[y = \tan x \Leftrightarrow x = \text{Arctan}y$$

$$x = \text{Arctan}1 \Leftrightarrow 1 = \tan x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1] y = \sin x \Leftrightarrow x = \text{Arcsin} y$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] x = \text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1,1] y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos} y$$

$$x = \text{Arccos} \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty, \infty[y = \tan x \Leftrightarrow x = \text{Arctan} y$$

$$x = \text{Arctan} \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \tan x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

الدوال الزائدية ودوالها العكسية :

دالة الجيب الزائدي :

$$sh(x) \text{ الدالة } x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ تسمى دالة الجيب الزائدي ونرمز لها بالرمز } sh(x)$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

دالة الجيب التمام الزائدي :

$$ch(x) \text{ الدالة } x \rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ تسمى دالة الجيب التمام الزائدي ونرمز لها بالرمز } ch(x)$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

دالة الظل الزائدي :

$$th(x) \text{ الدالة } x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ تسمى دالة الظل الزائدي ونرمز لها بالرمز } th(x)$$

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

نتائج :

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \quad (1)$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad ch(x+y) = chxchy + shxshy \quad (2)$$

$$sh(x+y) = shxchy + shychx$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ch2x = ch^2(x) - sh^2(x), \quad sh2x = 2shxchx \quad (3)$$

$$ch2x = 2ch^2(x) - 1, \quad ch2x = 2sh^2(x) + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ch(-x) = ch(x) \quad \text{الجيب التمام الزائدي دالة زوجية لان} \quad (4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad sh(-x) = -sh(x) \quad \text{الجيب الزائدي دالة فردية لان}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (shx)' = chx, \quad (chx)' = shx \quad (5)$$

$$(thx)' = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$

الدوال العكسية للدوال الزائدية :

عمدة الجيب الزائدي ($Argsh$) :

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (shx)' = chx > 0$$

وبالتالي

$$sh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow shx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على \mathbb{R} فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argsh$ حيث

$$Argsh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \text{Argsh}x$$

وهي مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على \mathbb{R} وتأخذ قيمها في \mathbb{R} وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; y = \text{sh}x \Leftrightarrow x = \text{Argsh}x$$

عمدة جيب التمام الزائدي (Argch):

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ch}x)' = \text{sh}x > 0$$

وبالتالي

$$\forall x \in [0, \infty[\quad (\text{ch}x)' = \text{sh}x > 0$$

$$\text{ch}: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$$

$$x \rightarrow \text{ch}x$$

مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على $[0, \infty[$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز Argch حيث

$$\text{Argch}: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$x \rightarrow \text{Argch}x$$

وهي مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على $[1, \infty[$ وتأخذ قيمها في $[0, \infty[$ وتحقق

$$\forall x \in [0, \infty[, \forall y \in [1, \infty[; y = \text{ch}x \Leftrightarrow x = \text{Argch}x$$

عمدة الظل الزائدي (Argth):

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{th}x)' > 0$$

$$\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$$

$$x \rightarrow \text{th}x$$

مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على \mathbb{R} فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argch$ حيث

$$Argth:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow Argthx$$

وهي مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على $]-1,1[$ وتأخذ قيمها في \mathbb{R} وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1,1[; y = thx \Leftrightarrow x = Argthx$$

نتائج :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; y = Argshx \Leftrightarrow x = shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \quad e^y = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2)$$

$$\forall x \in [1, \infty[, \forall y \in [0, \infty[; y = Argchx \Leftrightarrow x = chy$$

$$x = chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \quad \vee \quad e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0 \quad \vee \quad y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \leq 0$$

$$\forall x \in [1, \infty[\quad Argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \text{Argtnx} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (3)$$

$$\forall x \in]-1,1[, \forall y \in \mathbb{R} ; y = \text{Argthx} \Leftrightarrow x = \text{thy}$$

$$x = \text{chy} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\Leftrightarrow e^y - e^{-y} = x(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1+x$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \text{Argtnx} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{ومنه}$$

تمارين محلولة

تمرين (1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$f(x) = \text{argch} \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$f(x) = \text{arcsin}(2-x)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

$$f(x) = \operatorname{arccos}\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

: الحل

$$\text{معرفة } f(x) = \operatorname{arcsin}(2-x) \Leftrightarrow -1 \leq 2-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$D_f = [1,3]$$

$$\text{معرفة } f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\text{معرفة } f(x) = \operatorname{arccos}\left(\frac{1+x}{x}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right|^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x}{x} - 1\right)\left(\frac{1+x}{x} + 1\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1+2x}{x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

تمرين 2 :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \text{arctg}x + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{بين ان}$$

الحل

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \text{arctg}x + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = c$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) &= f(1) = 2 \text{arctg}1 \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \text{arctg}x + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه}$$

تمرين 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال من $[01]$ نحو $[01]$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

بين ان f تقابل من المجال $[01]$ نحو $[01]$ ثم عين دالتها العكسية

الحل

f مستمرة على المجال $[01]$ لانها دالة ناطقة

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} > 0, \forall x \in [01]$$

f رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[01]$

f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$\forall x \in [01], \forall y \in [01] \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{1-y^2} < 1 \vee y = 1 + \sqrt{1-y^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

ومنه

$$f^{-1}: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

سلسلة تمارين رقم (2) حول (الدوال العددية

- الاستمرار - لدوال العكسية)

التمرين (1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1) f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \quad (2) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4}} \quad (4) f(x) = \sqrt{E(x) - x}$$

$$(5) f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^* f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$$

$$(7)^* f(x) = \frac{1}{E(x) - x} \quad (8) f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$$

$$(9) f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين (2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذلك

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (2) f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$$

$$(3) f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad (4) f(x) = |x|(1-3x)(1+3x)$$

$$(5)^* f(x) = \frac{\sin^2(x) - \cos 3x}{x^2}$$

التمرين (3) :

احسب النهايات التالية

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right) \quad (1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} - (x - 1) \quad (4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$$

$$(5)^* \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \quad (6)^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} - (4x - 1)$$

التمرين (4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0 = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{2x+2} - 2}, & x \neq 1 \\ \frac{2}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

(2) هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad f(x) = 3x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

التمرين (5) :

بين ان المعادلة $x^4 - 5x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

*التمرين (6) :

بين ان المعادلة $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور

بين عددين صحيحين متتاليين

التمرين (7) : (1) احسب $Arccos, Arcsin$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) احسب $Arccotan, Arctan$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \sqrt{3}$

* (3) احسب $Arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), Arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), Arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

التمرين (8) : اثبت ان

$$(1) \quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi, \quad x \in [-1,1]$$

$$(2) \quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1,1]$$

$$(3) \quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

$$(4) \quad \cos(Arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

$$(5) \quad \sin(Arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(6) \quad \sin(Arctan(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1,1] - \{0\}$$

التمرين (9) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = Arccos\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}} \quad \text{بين ان (2)}$$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

التمرين (10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + 1} \quad \text{بين ان (2)}$$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

*التمرين (11) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \text{Arccos}(x)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) ادرس استمرارية f

(3) عين $f'(x)$

*التمرين (12) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{x-1}\right) + \text{Arctan}\left(x \frac{\sqrt{3}}{4-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) حسب $f(0), f(2), f(5)$

(3) عين $f'(x)$ ثم اوجد عبارة بسيطة ل f

التمرين 13 : اثبت ان

$$y = \text{Argch}(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \forall x \in [1, +\infty[\quad (1)$$

$$y = \text{Argsh}(x) \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\quad (2)$$

$$y = \text{Argth}(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in]-1, 1[\quad (3)$$

$$y = \text{Argcoth}(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad (4)$$

$$\text{Argth}(x) + \text{Argth}(y) = \text{Argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad \forall x, y \in]-1, 1[\quad (5)$$

$$\text{Argch}(\sqrt{1+x^2}) = \text{Argsh}(x) \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\quad (6)$$

$$\text{Argsh}(\sqrt{x^2-1}) = \text{Argch}(x) \quad \forall x \in [1, +\infty[\quad (7)$$

$$\forall \theta \in]-\infty, +\infty[\quad \text{sh}(3\theta) = 3\text{sh}\theta + 4\text{sh}^3\theta \quad (8)$$

$$\text{Argsh}(3x + 4x^2) = 3\text{Argsh}x \quad \text{استنتج ان}$$

$$\text{Argsh}\left[\sqrt{\frac{1+\text{ch}(x)}{2}}\right] - \frac{x}{2} = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

التمرين 14 : بسط العبارات التالية

$$\text{Argth}\left(\frac{\sqrt{\text{ch}x-1}}{\sqrt{\text{ch}x+1}}\right), \text{Argsh}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right), \text{Argth}\left(\frac{3x+x^2}{1+3x^2}\right)$$

التمرين (15) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = \text{Argth}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f احسب النهايات على اطراف D_f

(2) عين $f'(x)$ شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحلول

التمرين (1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية التالي

$$(1) f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \quad (2) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4}} \quad (4) f(x) = \sqrt{E(x) - x}$$

$$(5) f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^* f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$$

$$(7)^* f(x) = \frac{1}{E(x) - x} \quad (8)^* f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$(9) f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(1) \text{ معرفة } f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[\\ D_f =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$$

$$(2) \text{ معرفة } f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0 \\ \wedge \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} & x \in]1, \infty[\\ \wedge \\]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow]4, +\infty[$$

$$D_f =]4, +\infty[$$

$$(3) \text{ معرفة } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-5x+4} \geq 0 \\ \wedge \\ x^2-5x+4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]4, +\infty[$$

$$D_f =]4, +\infty[$$

$$(4) \text{ معرفة } f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow E(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq E(x)$$

لكن نعلم ان $\forall x \in \mathbb{R} E(x) \geq x$ و عليه

$$\text{معرفة } f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{Z}$$

$$(5) \text{ معرفة } f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

$$D_f =]-1, 1[$$

$$(9) \text{ معرفة } f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow 1+x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

التمرين (2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذلك

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (2) f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$$

$$(3) f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (4) f(x) = |x|(1-3x)(1+3x)$$

$$(5)^* \quad f(x) = \frac{\sin^2(x) - \cos 3x}{x^2}$$

$$(1) \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = \frac{-x}{1+|x|} = -f(x)$$

ومنه f فردية

$$(2) \forall x \geq 0 f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - x} = \sqrt[3]{-x^5 - x} = -\sqrt[3]{x^5 + x} \\ = -f(x)$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - x} = \sqrt[3]{-x^5 - x} \Leftrightarrow f(-x)^3 = -x^5 - x \\ \Leftrightarrow [-f(-x)]^3 = x^5 + x \\ \Leftrightarrow -f(-x) = \sqrt[3]{x^5 + x} = f(x)$$

ومنه f فردية

$$(3) \forall x \in]-1,1[f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$$

ومنه f زوجية

$$(4) \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = |-x|(1+3x)(1-3x) = |x|(1+3x)(1-3x) \\ = f(x)$$

ومنه f زوجية

التمرين (3) :

احسب النهايات التالية

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right) \quad (1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} - (x^2 - 1)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} - (x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - (x - 1))(\sqrt{x^2 + x - 2} + (x - 1))}{\sqrt{x^2 + x - 2} + (x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x - 2} + (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(z + \pi)}{z^2} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 z}{z^2} = 2 \end{cases}$$

التمرين (4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{2x+2} - 2}, & x \neq 1 \\ \frac{2}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

(2)* هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4}, f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1}, f(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{2x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+7} - 3)(\sqrt{2x+7} + 3)(\sqrt{2x+2} + 2)}{(\sqrt{2x+2} - 2)(\sqrt{2x+2} + 2)(\sqrt{2x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{2x+2} + 2)}{(2x-2)(\sqrt{2x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x+2} + 2)}{(\sqrt{2x+7} + 3)} = \frac{2}{3} = f(1) \end{aligned}$$

ومنه ان f مستمرة عند 1

التمرين (5):

بين ان المعادلة $x^5 - 5x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

f متزايدة تماما على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $] -1, 1[$

f - مستموة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty, -1[$

و $0 < f(-2) \times f(-1)$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\infty, -1[$

f - مستموة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]1, +\infty[$

و $0 < f(2) \times f(1)$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

تقبل حلا وحيدا على المجال $]1, +\infty[$

f - مستموة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $] -1, 1[$

و $f(-1) \times f(1) < 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$$x^5 - 5x + 1 = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا على المجال }]-1,1[$$

التمرين (7) : (1) احسب $Arccos, Arcsin$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) احسب $Arccotan, Arctan$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \sqrt{3}$

$$Arcsin(-1) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin(0) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arcsin(1) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

$$Arccos(-1) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = -1 \Leftrightarrow y = \pi$$

$$Arccos(0) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$Arccos(1) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = 1 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$Arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$$Arctan(-1) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(0) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arctan(1) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = y \Leftrightarrow y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \tan y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

التمرين (8) : اثبت ان

$$(1) \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi , \quad x \in [-1,1]$$

$$(2) \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} , \quad x \in [-1,1]$$

$$(3) \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} , \quad x > 0$$

$$(4) \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} , \quad x \in [-1,1]$$

$$(5) \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} , \quad x \in [-1,1]$$

$$(6) \tan(\text{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} , \quad x \in [-1,1] - \{0\}$$

الحل

نعلم ان

$$(\text{Arccos}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} , x \in]-1,1[$$

$$(\text{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , x \in]-1,1[$$

$$(\text{Arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2} , x \in]-\infty, +\infty[$$

$$(1) \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi , \quad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = 2 \text{ Arccos}(x) = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\forall x \in [-1,1] \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi \quad \text{ومنه}$$

$$(2) \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه}$$

$$(3) \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad x < 0$$

$$f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in]-\infty, 0[\quad f(x) = c = f(-1)$$

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{Arctan}(-1) + \text{Arctan}(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[\quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ومنہ}$$

$$(4) \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

$$\text{Arcsin}(x) = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{نضع}$$

$$x = \sin t = \sin(\text{Arcsin}(x)) \quad \text{اذ}$$

$$\cos^2(\text{Arcsin}(x)) + \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 \quad \text{نعلم ان}$$

$$\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$$

$$\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1] \quad \text{ومنہ}$$

$$(5) \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\text{Arctan}(x) = t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{نضع}$$

$$\sin(\text{Arctan}(x)) = \sin t \quad \text{و} \quad x = \tan t \quad \text{اذن}$$

$$\cos t > 0 \quad \text{فان} \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{نعلم انه اذا كان}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{1 + \tan^2 t}$$

$$\Rightarrow \cos t = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 t}}$$

$$\Rightarrow \sin t = \tan t \times \cos t = \tan t \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\text{Arctan}(x)) = \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

$$(6) \tan(\text{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

$$x \in [-1,1] \setminus \{0\} \text{ Arccos}(x) = t \Rightarrow x = \cos t, t \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$t \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \text{ sint} > 0, \text{ tan}(\text{Arccos}(x)) = \text{tant} \text{ اذن}$$

$$\text{tan}(\text{Arccos}(x)) = \text{tant} = \frac{\text{sint}}{\text{cost}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

التمرين (9) : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}} \quad \text{بين ان (2)}$$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

$$2-x \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{2x}{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow \text{معرفة } f$$

$$2-x \neq 0 \wedge \frac{2x}{2-x} + 1 \geq 0 \wedge \frac{2x}{2-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0 \wedge \frac{2+x}{2-x} \geq 0 \wedge \frac{3x-2}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0 \wedge x \in [-2,2] \wedge x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty[\Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow$$

$$D_f = \left[-2, \frac{2}{3}\right]$$

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{-\left(\frac{2x}{2-x}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{2-x}\right)^2}} = \frac{\frac{-4}{(2-x)^2}}{\sqrt{\frac{4-4x-3x^2}{(2-x)^2}}}$$

$$= \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}} < 0 \quad j$$

التمرين (10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتالي

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

$$(2) \text{ بين ان } \forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + 1}$$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

$$1-x \neq 0 \Leftrightarrow \text{معرفة } f$$

$$x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-x}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \text{Arctan}(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Arctan} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} \right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Arctan} \left(\frac{1}{1-x} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \text{Arctan}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 0$$

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x} \right)'}{1 + \left(\frac{1}{1-x} \right)^2} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{(x-1)^2 + 1}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2 + 1} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على D_f

البنى الجبرية

العملية الداخلية : لتكن E مجموعة غير خالية

كل تطبيق للمجموعة $E \times E$ نحو E يسمى عملية داخلية في E ونرمز لها بالرمز

$\dots, +, \times, \Delta, \nabla, \star$

إذا كانت \star عملية داخلية في E نكتب

$$\star : E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow x \star y$$

مثلا : $+, \times$ عمليتان داخليتان في \mathbb{R}

خواص : Δ, \star عمليتان داخليتان في E

\star تبديلية في E إذا وفقط إذا تحقق

$$\forall x, y \in E: x \star y = y \star x$$

* تجميعية في E اذا فقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E: (x * y) * z = y * (x * z)$$

* توزيعية على Δ في E اذا فقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E: \begin{cases} x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z) \\ (y \Delta z) * x = (y * x) \Delta (z * x) \end{cases} \text{ و}$$

يكون العنصر e من E حيادي للعملية * اذا فقط اذا تحقق

$$\forall x \in E: x * e = e * x = x$$

يكون العنصر x' من E نضير العنصر x من E للعملية * اذا فقط اذا تحقق

$$\forall x \in E: x * x' = x' * x = e$$

نتائج وملاحظات :

(1) العنصر الحيادي ان وجد فهو وحيد

ليكن e, e' عنصران حيايين للعملية * في E لدينا $e' * e = e$ حيث

e' عنصر حيادي من جهة اخرى $e' * e = e'$ فينتج ان $e' = e$

(2) اذا كانت العملية تجميعية فان العنصر النضير ان وجد فهو وحيد

لنفرض ان x' عنصران نضيران ل x من E للعملية التجميعية *

و e عنصر حيادي للعملية * في E

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

امثلة :

الجمع (+) والضرب (x) عمليتان تبدليتان وتجميعيتان في \mathbb{R}

الضرب توزيعي على الجمع في \mathbb{R}

البنى الجبرية

لتكن * و Δ عمليتان داخليتان في المجموعة E

الزمرة : تكون $(E, *, \Delta)$ زمرة اذا فقط اذا تحقق

(1) * تجميعية

(2) يوجد في E عنصر حيادي للعملية *

(3) كل عنصر من E يقبل نضير في E بالنسبة للعملية *

اذا كانت العملية * تبديلية نقول ان الزمرة $(E, *)$ زمرة تبديلية
امثلة :

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديلية بينما $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}', \times)$

ليست زمرة

الزمرة الجزئية : لتكن $(E, *)$ زمرة و H مجموعة جزئية من E
تكون $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E, *)$ اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y \in H, x * y \in H \quad (1)$$

(2) $e \in H$ حيث e العنصر الحيادي للعملية * في E

(3) $\forall x \in H, \forall x' \in H$ حيث x' نضير x للعملية * في E

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$

(\mathbb{Z}^*, \times) زمرة جزئية من (\mathbb{R}^*, \times)

$(2\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}', +)$

الحلقة : تكون $(E, *, \Delta)$ حلقة اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E, *)$ زمرة تبديلية

(2) Δ تجميعية

(3) Δ توزيعية على * في E

اذا كانت العملية Δ تبديلية نقول ان الحلقة $(E, *, \Delta)$ حلقة تبديلية

اذا كانت العملية Δ عنصر حيادي نقول ان الحلقة $(E, *, \Delta)$ حلقة واحدة

امثلة

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}^*, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

الحلقة الجزئية : لتكن $(E, *, \Delta)$ حلقة و H مجموعة جزئية من E

تكون $(H, *, \Delta)$ حلقة جزئية من الحلقة $(E, *, \Delta)$ اذا وفقط اذا تحقق

$$(1) (H, *) \text{ زمرة جزئية من الزمرة } (E, *)$$

$$(2) \forall x, y \in H, x \Delta y \in H$$

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R}, +, \times)$

$(\mathbb{N}, +, \times)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \times)$

الجسم : تكون $(E, *, \Delta)$ جسما اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E, *, \Delta)$ حلقة تبديلية و واحدية

(2) كل عنصر من المجموعة غير لبخالية $E \setminus \{e\}$ يقبل نضير بالنسبة للعملية Δ

اذا كانت العملية Δ تبديلية نقول ان الجسم $(E, *, \Delta)$ جسم تبديلي

امثلة

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{R}, +, \times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{R}^*, +, \times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ ليس جسم

تمرين تطبيقي :

* عملية داخلية في \mathbb{Q} معرفة كمايلي :

$$x * y = x + y + xy$$

($\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \star$) زمرة تبديلية

اثبات ان \star داخلية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

اي نبرهن $x + y + xy \neq -1$ نستعمل البرهان بالخلف

$$\text{لنفرض ان } x + y + xy = -1 \text{ اي } x + y + xy + 1 = 0$$

بمعنى $0 = (x + 1)(y + 1)$ اي $y = -1$ او $x = -1$ وهذا تناقض مع

$$\text{كون } x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \text{ و } y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

$$\text{اذن } x \star y = x + y + xy \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \text{ فالعملية } \star \text{ داخلية في } \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

اثبات ان \star تبديلية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star y = y \star x$$

$$x \star y = x + y + xy = y + x + yx = y \star x$$

اثبات ان \star تجميعية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= (x + y + xy) \star z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star (y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \dots (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد ان $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ ومنه

ومن ان \star تجميعية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

العنصر الحيادي للعملية \star في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن e العنصر الحيادي للعملية \star في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star e = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x + e + xe = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : e + xe = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : (1 + x)e = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : e = 0$$

ومنه ان 0 هو العنصر الحيادي للعملية \star في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

لكل عنصر من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ نضير بالنسبة للعملية \star في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن x' نضير x من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ بالنسبة للعملية \star فيتحقق مايلي

$$x' \star x = 0 \Rightarrow x' + x + x'x = 0$$

$$\Rightarrow x'(1 + x) = -x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

وبالتالي ($\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \star$) زمرة تبديلية

تمرين محلول

لتكن \star عملية في $I =]-1, 1[$ معرفة كمايلي

$$x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

(1) بين ان \star عملية داخلية في $I =]-1, 1[$

(2) بين ان ($\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \star$) زمرة تبديلية

الحل

(1) اثبات ان \star عملية داخلية في $I =]-1, 1[$

$$x, y \in]-1, 1[\Rightarrow -1 < x < 1 \text{ و } -1 < y < 1$$

$$\Rightarrow |x| < 1, |y| < 1$$

$$\Rightarrow |xy| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < xy < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 + xy < 2$$

$$\Rightarrow 1 + xy > 0$$

الفضاءات الشعاعية

تعريف الفضاء الشعاعي : لنعتبر $(\mathbb{K}, +, \times)$ حقل تبديلي ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ او $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

لتكن E مجموعة. نسمي $(E, +, *)$ فضاء شعاعيا على الحقل \mathbb{K}

(او \mathbb{K} - فضاء شعاعي) اذا كانت

$$(1) (E, +) \text{ زمرة تبديلية}$$

$$(2) E \text{ مزودة بقانون تركيب خارجي } *$$

$$\mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

من اجل كل x, y من E ومن اجل كل λ, μ من \mathbb{K} لدينا

$$(1) (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$(2) \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(3) \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$$

$$(4) I_E \cdot x = x \text{ حيث } I_E \text{ العنصر المحايد للعملية } (.) \text{ في } \mathbb{K}$$

ملاحظات :

$$(1) \text{ عناصر } E \text{ تسمى اشعة وعناصر } \mathbb{K} \text{ تسمى سلمبات}$$

$$(2) \text{ نسمي الكتابة } \lambda \cdot x \text{ بضرب الشعاع } x \text{ بالسلمي } \lambda \text{ ونكتب } \lambda x \text{ بدلا من } \lambda \cdot x$$

$$(3) \forall \lambda \in \mathbb{K} \lambda 0 = 0 \text{ وذلك لان } \lambda x = \lambda(x + 0) = \lambda x + \lambda 0 \text{ نجد } \lambda 0 = 0$$

$$(4) \forall x \in E 0x = 0 \text{ وذلك لان } 0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \text{ نجد } 0x = 0$$

$$(5) \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee x = 0$$

امثلة :

$$(1) \text{ كل حقل تبديلي } \mathbb{K} \text{ هو فضاء شعاعي على } \mathbb{K}$$

$$(2) (V, +, ..) \text{ فضاء شعاعي على } \mathbb{R} \text{ وذلك لان } \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V \Rightarrow \lambda \vec{u} \in V$ (جمع الاشعة عملية داخلية في V)

(ضرب شعاع بعدد حقيقي عملية خارجية في V)

(3) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على \mathbb{R} حيث

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

(4) $(E, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على \mathbb{R} حيث $E = \mathfrak{S}(I, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة

من I نحو \mathbb{R} و

$$\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

الفضاء الشعاعي الجزئي :

تعريف : ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على \mathbb{K} نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$$F \neq \emptyset \quad (1)$$

$$\forall x, y \in F \Rightarrow x + y \in F \quad (2)$$

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in F \quad (3)$$

نتيجة : ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على \mathbb{K} نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$$F \neq \emptyset \quad (1)$$

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in F \quad (2)$$

امثلة :

$$\{0_E\} \text{ و } E \text{ فضاءان جزئيان من } E \quad (1)$$

$$\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \text{ حيث } \mathbb{R}^2 \text{ جزئي من } \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

وذلك لان $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ وبالتالي $\mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$ و

$$\forall (x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$\lambda(x, 0) + \mu(y, 0) = (\lambda x + \mu y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$$

الاسس والابعاد : لنفرض في كل ما يلي ان E فضاء شعاعي على \mathbb{K}

المزج الخطي :

تعريف : نسمي مزجا خطيا للاشعة x_1, x_2, \dots, x_n من الفضاء الشعاعي E

كل شعاع من الشكل : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ حيث

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

مثال : ليكن $E = \mathbb{R}^2$ وليكن الشعاع $(2,1)$ من E

لدينا الكتابة التالية $(2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$

الشعاع $(2,1)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1,0), (0,1)$

العائلة المولدة :

تعريف : نقول ان العائلة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E اذا كتب

كل شعاع من E كمزج خطي لهذه العائلة بمعنى

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} :$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

$$E = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \text{ ونكتب}$$

امثلة :

$$(1) \quad E = \mathbb{R}^2 \text{ الشعاعان } (1,1), (1,0) \text{ يولدان الفضاء الشعاعي } \mathbb{R}^2$$

ليكن $u = (x, y)$ من \mathbb{R}^2 يوجد α, β من \mathbb{R} بحيث

$$u = (x, y) = \alpha (1,1) + \beta (1,0) = (\alpha + \beta, \alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = x - y \\ \alpha = y \end{cases}$$

$$u = (x, y) = (x - y)(1,1) + y(1,0)$$

$$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad E = \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$u = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (y, 0, 0) + (z, 0, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$= x e_1 + y e_2 + z e_3$$

\mathbb{R}^3 اشعة مولدة للفضاء $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

وبالتالي $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

الارتباط الخطي - الاستقلال الخطي :

(1) نقول عن الأشعة x_1, x_2, \dots, x_n من E انها مرتبطة خطيا اذا فقط اذا وجدت

الاعداد $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ليست كلها معدومة بحيث يكون

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

(2) نقول عن الأشعة x_1, x_2, \dots, x_n من E انها مستقلة خطيا اذا فقط اذا

وجدت الاعداد $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ بحيث تحقق

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

امثلة : في \mathbb{R}^4 الأشعة $u = (0,1,0,0), v = (0,0,1,0), w = (0,1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $u + v - w = 0$

لتكن اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\alpha (0,1,0,0) + \beta (0,0,1,0) + \gamma (0,1,1,0) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = -\gamma$$

$$\alpha(u + v - w) = 0$$

اذا كان $\alpha \neq 0$ فان $u + v - w = 0$ ومنه ان الأشعة u, v, w مرتبطة خطيا

u, v, w مرتبطة خطيا

امثلة : في \mathbb{R}^4 الأشعة $u = (0,1,0,0), v = (0,0,1,0), w = (0,1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $u + v - w = 0$

لتكن اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

(2) في \mathbb{R}^3 الأشعة $u = (6,2,4), v = (2,0,2), w = (1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $u - 2v - 2w = 0$

لتكن α, β, γ اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\alpha (6,2,4) + \beta (2,0,2) + \gamma (1,1,0) = 0$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha = -\gamma \\ 2\alpha = -\beta \end{cases}$$

$$\alpha u - 2\alpha v - 2\alpha w = 0$$

$$\alpha(u - 2v - 2w) = 0$$

لنفرض ان $\alpha \neq 0$ نجد $u - 2v - 2w = 0$ ومنه الاشعة

u, v, w مرتبطة خطيا

$$(3) \text{ في } \mathbb{R}^3 \text{ الاشعة } e_3 = (0,0,1), e_2 = (0,1,0), e_1 = (1,0,0)$$

الاشعة e_1, e_2, e_3 مستقلة خطيا لانه من اجل α, β, γ اعداد حقيقية

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \Rightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

اساس الفضاء الشعاعي :

تعريف : ليكن E فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{K} مجموعة الاشعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

تشكل اساسا للفضاء الشعاعي E اذا كانت

$$(1) \text{ الاشعة } \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ مولدة لـ } E$$

$$(2) \text{ الاشعة } \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ مستقلة خطيا في } E$$

امثلة :

$$(1) \text{ في } \mathbb{R}^n \text{ الاشعة } e_1 = (1,0,0, \dots, 0), e_2 = (0,1,0, \dots, 0),$$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$ الشعاع e_1, e_2, \dots, e_n تشكل اساس ل \mathbb{R}^n

لانه : اذا كانت

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ومنه الشعاع e_1, e_2, \dots, e_n تشكل مستقلة خطيا

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$$

(2) في \mathbb{R}^2 الشعاعان $u = (1, 2)$ $v = (3, 1)$ يشكلان اساس ل \mathbb{R}^2

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ومنه الشعاعان u, v مستقلان خطيا

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$x = \lambda_1 u + \lambda_2 v \Rightarrow (x_1, x_2) = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3x_2 - x_1}{5} \\ \lambda_2 = \frac{2x_1 - x_2}{5} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle$$

نظرية : تكون مجموعة الشعاع u_1, u_2, \dots, u_n اساس ل E اذا فقط اذا كان كل

شعاع من E يكتب بصورة وحيدة كمزج خطي للشعاع u_1, u_2, \dots, u_n

الاثبات :

لنفرض ان الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n اساس ل E وليكن x شعاع من E

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \quad (1)$$

لنفرض عبارة اخرى ل x

$$x = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \dots + \lambda'_n u_n \quad (2)$$

من (1) و (2) ينتج

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)u_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)u_2 + \dots + \lambda_1(\lambda_n - \lambda'_n)u_n = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda'_1) = (\lambda_2 - \lambda'_2) = \dots = (\lambda_n - \lambda'_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$$

لنفرض ان الشعاع x له كتابة وحيدة $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$

ولنبين ان الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n اساس ل E

من الفرض لدينا $E = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ فيكفي اثبات ان الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n

مستقلة خطيا

ليكن

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ومنه الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n مستقلة خطيا اذا الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n

تشكل اساس ل E

ملاحظات:

(1) اذا الاشعة u_1, u_2, \dots, u_n تشكل اساس ل E وكان x شعاع من E فان

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

والسلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تسمى مركبات الشعاع x بالنسبة للاساس

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

(2) في \mathbb{R}^2 اذا مثلنا هندسيا الشعاع $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ باختيار

معلما للمستوي (o, i, j) فان الشعاعين $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$

يمثلان بشعاعي اساس المعلم \vec{i}, \vec{j}

اذا كان الشعاع $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ يرفق بالنقطة A فان

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j}$$

: نقول عن فضاء شعاعي E انه ذو بعد منته اذا كان مولد بعدد منته بعد الفضاء الشعاعي :

تعريف 1

من الاشعة

امثلة : $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ذو بعد منته

$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ذو بعد منته

تعريف 2 : اذا كان E فضاء شعاعي بعده منته على الحقل \mathbb{K} فان جميع اسس E

لها نفس عدد الاشعة يسمى هذا العدد ببعد E ونرمز له بالرمز $\dim E$

امثلة : $\dim \mathbb{R}^n = n, \dim \mathbb{R}^3 = 3, \dim \mathbb{R}^2 = 2$

ملاحظات :

$$\dim(0_E) = 0 \quad (1)$$

(2) نسمي الفضاء الشعاعي ذو بعد 1 بالمستقيم الشعاعي

(3) نسمي الفضاء الشعاعي ذو بعد 2 بالمستوي الشعاعي

بعد جداء فضاءين شعاعيين :

نظرية : اذا كان E و F فضاءين شعاعيين ببعدين منتهين علي الحقل \mathbb{K} فان

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

الاثبات :

يمكن التأكد ان $E \times F$ فضاء شعاعي علي الحقل \mathbb{K} بالنسبة للعمليات التاليتين

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F: (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

لنفرض ان $\dim E = n, \dim F = m$ ونبرهن ان $\dim E \times F = n + m$

يكفي ان نبرهن ان $E \times F$ يقبل اساس عدد عناصره $n + m$

لتكن الجملة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ تشكل اساس ل E و الجملة $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

تشكل اساس ل F

$$(x, y) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^{n+m} \text{ حيث}$$

$$(x, y) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, 0) + (0, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m)$$

$$= \lambda_1 (u_1, 0) + \lambda_2 (u_2, 0) + \dots + \lambda_n (u_n, 0) + \alpha_1 (0, v_1) + \alpha_2 (0, v_2) + \dots + \alpha_m (0, v_m)$$

يعني الجملة $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$ مولدة

ل $E \times F$

لنثبت ان $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$ مستقلة خطيا

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

فالجملة $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$

اساس ل $E \times F$ ومنه $\dim E \times F = n + m = \dim E + \dim F$

تمرين محلول 1:

$$u_3 = (0, 0, -1) \quad u_2 = (1, -1, 0) \quad u_1 = (1, 1, 2) \text{ الاشعة في } \mathbb{R}^2$$

$$u = (1, 1, 1)$$

(1) ما هي مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس القانوني ل \mathbb{R}^3

(2) بين ان $\{u_1, u_2, u_3\}$ تشكل اساس ل \mathbb{R}^3

(3) اوجد مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس الجديد

الحل

$$u = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس القانوني ل \mathbb{R}^3 هي $1,1,1$ على الترتيب

(2) اثبات ان $\{u_1, u_2, u_3\}$ تشكل اساس ل \mathbb{R}^3

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \\ 2\alpha - \gamma = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \beta = \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \gamma = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

ومنه $\mathbb{R}^3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه الاشعة u_1, u_2, u_3 مستقلة خطيا

اذا الاشعة u_1, u_2, u_3 تشكل اساس ل \mathbb{R}^3

(3) ايجاد مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس الجديد

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2} u_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} u_2 + (x_1 + x_2 - x_3) u_3$$

$$= 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي $(1,0,1)$

تمرين محلول 2:

نعتبر في \mathbb{R}^3 الاشعة $v_1(1,1,1)$ $v_2(1,2,3)$ $v_3(2,-1,1)$ $v(1,-2,5)$

بين ان v مزج خطي للاشعة v_1, v_2, v_3

الحل

$$\begin{aligned}v &= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(2, -1,1) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, \alpha + 3\beta + \gamma)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -6, \beta = 3, \gamma = 2$$

$$v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3 \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين محلول 3 :

ادرس ان كانت الاشعة التالية مستقلة في كل حالة من الحالات

(1) نعتبر في \mathbb{R}^3 الاشعة $v_2(3,4,5), v_1(1,2,3)$

$$v_3(5,6), v_2(3,4), v_1 \Rightarrow \alpha(1,2,3) + \beta(3,4,5) = 0$$

(2) نعتبر في \mathbb{R}^2 الاشعة

الحل

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow v_2, v_1 \text{ مستقلان خطيا (1)}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(1,2,3) + \beta(3,4,5) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta, 3\alpha + 5\beta) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه الشعاعان v_2, v_1 مستقلان خطيا

$$= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha(1,2) + \beta(3,4) + \gamma(5,6) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 3\beta + 5\gamma, 2\alpha + 4\beta + 6\gamma) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

ومنه الأشعة v_1, v_2, v_3 ليست مستقلة خطيا

التطبيقات الخطية

تعريف : ليكن F, E فضاءان شعاعيان على نفس الحقل \mathbb{K} وليكن f تطبيق من E في F

نقول ان f تطبيق خطي من E في F اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (2)$$

يقال عن f ايضا انه تماثل من E في F

امثلة :

(1) ليكن a ثابت حقيقي و f تطبيق من \mathbb{R} في \mathbb{R} معرف كمايلي

$$f(x) = ax$$

هو تطبيق خطي

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y)$$

$$= \lambda(ax) + \mu(ax)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y)$$

(2) التطبيق f من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R} المعرف كمايلي :

$$f(x, y) = x - y$$

هو تطبيق خطي

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y'$$

$$= \lambda(x - y) + \mu(x' - y')$$

$$= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y')$$

$$E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$f[(x, y, z)] = (x + 2y - 3z, 3x - y + 5z)$$

تعريف 2 : f تطبيق خطي من E في F اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y \in E \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

الاثبات

اذا كان f تطبيق خطي فانه حسب (1) و (2)

$$\forall x, y \in E \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y)$$

إذا كان f تطبيق خطي فإنه

$$\forall x, y \in E \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

بأخذ $\lambda = \mu = 1$ نجد

$$\forall a, b \in E \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

بأخذ $\mu = 0$ نجد

$$\forall x, by \in E \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

ملاحظة

– نرسم لمجموعة التطبيقات الخطية بالرمز $L(E, F)$

تعريف 3 :

– نقول ان f منتشاكل من E في F اذا كان f تطبيق خطي تقابلي

– يقال عن f انه تماثل داخلي اذا كان f تطبيق خطي من E في E

– نسمي كل تشاكل من E في E تشاكلا ذاتيا

نتيجة : ليكن f تطبيق خطي من E في F لدينا

$$f(0_E) = 0_F \quad (1)$$

$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x) \quad (2)$$

الاثبات :

(1) بوضع $\lambda = 0_E$ في العبارة (2) من التعريف 2 نجد

$$f(0_E) = 0_E f(x) = 0_F$$

(2) بوضع $\lambda = -1$ في العبارة (2) من التعريف 2 نجد

$$\forall x \in E, f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x)$$

العمليات على التطبيقات الخطية :

لتكن G, F, E فضاءات شعاعية على الحقل \mathbb{K}

(1) إذا كان f, g تطبيقان خطيان من E في F وكان λ عدد من \mathbb{K} فإن $f + g$ و λf

تطبيقان خطيان من E في F معرفين كمايلي

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in E f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

(2) إذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G فإن $g \circ f$

تطبيقا خطيا من E في G

(3) $(L(E, F), +, \cdot)$ فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{K}

(4) إذا كان f تشاكل من E في F فإن f^{-1} تشاكل من F في E

صورة ونواة تطبيق خطي :

ليكن f تطبيق من الفضاء الشعاعي E في الفضاء الشعاعي F

(1) صورة التطبيق الخطي f هو المجموعة $f(E)$ والتي نرمز لها بالرمز Imf

$$Imf = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = f(E), \quad Imf \subset F$$

(2) نواة f هي مجموعة العناصر x من E بحيث $f(x) = 0_E$ والتي نرمز لها

بالرمز $Kerf$ والمعرفة كمايلي

$$Kerf = \{x \in E / f(x) = 0_F\} \subset E.$$

$$= f^{-1}\{0_F\}$$

امثلة :

(1) ليكن a ثابت حقيقي و f تطبيق من \mathbb{R} في \mathbb{R} معرف كمايلي

$$f(x) = ax$$

إذا كان $a = 0$ فإن $Kerf = \mathbb{R}$ و $Imf = \{0\}$

إذا كان $a \neq 0$ فإن $Kerf = \{0\}$ و $Imf = \mathbb{R}$

(2)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = x - y$$

تعيين $Kerf$

$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \\ &= \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1) \rangle \end{aligned}$$

تعيين Imf

$$\begin{aligned} Imf &= \{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ Imf &= \{(x - y)1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \langle 1 \rangle = \mathbb{R} \end{aligned}$$

نظرية :

(1) $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E

(2) Imf فضاء شعاعي جزئي من F

الاثبات :

$$Kerf \neq \emptyset \quad \text{ومنه } 0_E \in Kerf \text{ معناه } f(0_E) = 0_F \quad (1)$$

$$\forall x, x' \in Kerf \Rightarrow f(x + x') = f(x) + f(x') = 0_F$$

$$\Rightarrow x + x' \in Kerf$$

$$\forall x \in Kerf \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda x \in Kerf$$

ومنه $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E

$$Imf \neq \emptyset \quad \text{ومنه } 0_f \in Imf \text{ معناه } f(0_E) = 0_F \quad (2)$$

$$\forall y, y' \in \text{Im}f \Rightarrow \exists x, x' \in E : y = f(x), y' = f(x')$$

$$\Rightarrow y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x'), x + x' \in E$$

$$\Rightarrow y + y' \in \text{Im}f$$

$$\forall y \in \text{Im}f \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x), \lambda x \in E$$

$$\Rightarrow \lambda y \in \text{Im}f$$

ومنه $\text{Im}f$ فضاء شعاعي جزئي من F

تمرين :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (2x - 4y, x - 2y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $\text{Im}f$ و $\text{Ker}f$

الحل

$$\forall (x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (2(\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y'))$$

$$= \lambda(2x - 4y, x - 2y) + \mu(2x' - 4y', x' - 2y')$$

$$= \lambda f((x, y)) + \mu f((x', y'))$$

تعيين $\text{Ker}f$

$$\text{Ker}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f((x, y)) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x - 4y, x - 2y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 4y = 0, x - 2y = 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y\}$$

$$= \{(2y, y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1) \rangle$$

المولد بالشعاع (2,1)

تعيين Imf

$$Imf = \{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$Imf = \{(2x - 4y, x - 2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(2x, x) + (-4y, -2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(x(2,1) - 2y(2,1)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(x - 2y)(2,1) : x - 2y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (2,1) \rangle$$

المولد بالشعاع (2,1)

نظرية : ليكن f تطبيقا خطيا من E في F

$$f \text{ متباين} \Leftrightarrow Kerf = \{0_E\} \quad (1)$$

$$f \text{ غامر} \Leftrightarrow Imf = F \quad (2)$$

الاثبات :

$$(1) \text{ لنفرض ان } f \text{ متباين ونعتبر } Kerf = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

لدينا $0_E \in Kerf$ لان $f(0_E) = 0_F$ او لان $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E

$$\text{ومنه } \{0_E\} \subset Kerf$$

$$\forall x \in Kerf \Rightarrow f(x) = 0_F = f(0_E)$$

$$\Rightarrow x = 0_E \quad (\text{لان } f \text{ متباين})$$

$$\Rightarrow x \in \{0_E\}$$

ومنه $Kerf \subset \{0_E\}$ وبالتالي $Kerf = \{0_E\}$

$$\text{وعليه } f \text{ متباين} \Rightarrow Kerf = \{0_E\} \quad (1)$$

عكسيا لنفرض ان $Kerf = \{0_E\}$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x - y) = 0_F \quad (\text{لان } f \text{ خطي}) \\ &\Rightarrow x - y \in \text{Ker}f = \{0_E\} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

وبالتالي f متباين

$$(2) \quad \text{Ker}f = \{0_E\} \Rightarrow \text{وعليه } f \text{ متباين}$$

من (1) و (2) نستنتج ان f متباين $\Leftrightarrow \text{Ker}f = \{0_E\}$

(2) اذا كان f غامر فان $f(E) = F$ اي $\text{Im}f = F$ والعكس صحيح

تمرين:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (x, x, y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

الحل

$$(x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (\lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (\lambda x, \lambda x, \lambda y) + (\mu x', \mu x', \mu y')$$

$$= \lambda f((x, y)) + \mu f((x', y'))$$

ومنه f تطبيق خطي

(2) حتى يكون متباين يكفي ان نبرهن ان $\text{Ker}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0,0)\}$

$$\text{Ker}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = 0_F = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, x, y) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y = 0\}$$

$$= \{(0,0)\}$$

ومنه f تطبيق متباين

– حتى يكون غامر يكفي ان نبرهن ان $Imf = \mathbb{R}^3$

ناخذ مثال مضاد لدينا $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ لكن $(1,2,3) \notin Imf$

ومنه f ليس تطبيق غامر

التطبيقات الخطية والفضاءات الشعاعية ذات البعد المنته :
ليكن E فضاء شعاعي بعده n وليكن

نظرية : اذا كان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل E وكانت v_1, v_2, \dots, v_n اشعة من F

فانه يوجد تطبيق خطي وحيد f من E في F بحيث يكون $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$

الاثبات : ليكن x و y شعاعان من E حيث $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ و

$y = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n$ و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ و $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ سلميات من \mathbb{K}

وليكن f تطبيق من E في F بحيث $f(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ و

$$f(y) = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

ولنبين ان f تطبيق خطي

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E: f(\alpha x + \beta y) =$$

$$= f(\alpha \lambda_1 u_1 + \alpha \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha \lambda_n u_n + \beta \mu_1 u_1 + \beta \mu_2 u_2 + \dots + \beta \mu_n u_n)$$

$$= f((\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1)u_1 + (\alpha \lambda_2 + \beta \mu_2)u_2 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n)u_n)$$

$$= (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1)v_1 + (\alpha \lambda_2 + \beta \mu_2)v_2 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n)v_n$$

$$= \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) + \beta(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n)$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

لاثبات الوحدانية نفرض ان g تطبيق خطي من E في F بحيث يكون

$$g(u_i) = v_i \text{ مع } 1 \leq i \leq n$$

من اخل كل x من E يكون لدينا $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سلميات من \mathbb{K} وبمان g تطبيق خطي من E في F فان

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) \\ &= \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2) + \dots + \lambda_n g(u_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = f(x) \end{aligned}$$

فمن اخل كل x من E يكون $g(x) = f(x)$

نظرية :

اذا كان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل E وكانت v_1, v_2, \dots, v_n اشعة من F

وكان f تطبيقا خطيا من E في F بحيث $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$ فان

(1) يكون التطبيق f متباين اذا فقط اذا كانت الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا

(2) يكون التطبيق f غامر اذا فقط اذا كانت الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة ل F

(3) يكون التطبيق f تقابلا اذا فقط اذا كانت الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n اساسا ل F

الاثبات :

(1) - اذا كانت الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا

$$x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0_F$$

$$\Rightarrow = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_F$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow x = 0_E$$

ومنه $\text{Ker } f = \{0_E\}$ اذن f متباين

- لنفرض ان f متباين وليكن $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_F$

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = 0$$

وبمان f متباين فان $\text{Ker } f = \{0_E\}$ ومنه $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$

وبمان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل E ينتج $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

وبالتالي الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا في F

(2) اذا كانت الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة ل F , فكل شعاع y من F يمكن كتابته

$$y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad \text{على الشكل التالي} :$$

$$y = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) \quad \text{ومنه}$$

معناه $y \in \text{Im}f$ اي f غامر

اذا كان f غامر لنفرض y من F يوجد x من E بحيث $y = f(x)$ ولما كان

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

فيكون

$$y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

معناه ان الاشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة ل F ,

تمرين محلول 1 :

ليكن $\{e_1, e_2\}$, $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ الاساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 على الترتيب

$$\text{عين التطبيق الخطي من في الذي يحقق } f(e_1) = 2e'_2 + e'_3, f(e_2) = e'_2 - e'_1$$

الحل

$$\text{نعلم ان } e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)$$

$$, f(e_1) = 2e'_2 + e'_3 = 2(0,1,0) + (0,0,1) = (0,2,1)$$

$$f(e_2) = e'_2 - e'_1 = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$$

من اجل (x, y) من \mathbb{R}^2 يكون لدينا

$$f((x, y)) = f(xe_1 + e_2y)$$

$$= xf(e_1) + yf(e_2)$$

$$= x(0,2,1) + y(-1,1,0)$$

$$= (-y, 2x + y, x)$$

وبالتالي التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (-y, 2x + y, y)$$

رتبة تطبيق خطي :

ليكن F, E فضاءين شعاعيين ببعديين منتهيين على الحقل \mathbb{K} و f تطبيقا خطيا من E في F

تعريف : نسمي بعد $f(E)$ برتبة التطبيق الخطي f ونرمز له بالرمز $rg(f)$ ونكتب

$$rg(f) = \dim(\text{Im}f)$$

نظرية : اذا كان f تطبيقا خطيا من E في F فان

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}f) + rg(f)$$

الاثبات

اذا كان $\text{Ker}f = \{0_E\}$ فان f متباين وبالتالي f تقابل من E في $f(E)$ ومنه

$$\dim(E) = \dim(f(E)) = rg(f)$$

اذا كان $\text{Ker}f \neq \{0_E\}$. لنفرض ان الاشعة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل $\text{Ker}f$

والاشعة v_1, v_2, \dots, v_p اساس ل $f(E)$. كما نفرض ان $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+p}$ اشعة

من E تحقق $f(u_{n+i}) = v_i$ من اجل $1 \leq i \leq p$

لاجل ذلك نفرض ان (1) $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} u_{n+p} = 0$

وبما f خطي فان (2) $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} u_{n+p}) = 0$

وبما $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ شعاع من $\text{Ker}f$ فان

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = 0 \quad (3)$$

من العلاقتين (2) و (3) وكون f خطي فان $\lambda_{n+1} v_{n+1} + \lambda_{n+2} v_{n+2} + \dots + \lambda_{n+p} v_p = 0$

وبما الاشعة v_1, v_2, \dots, v_p اساس ل $f(E)$ فان $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+p} = 0$

فتصبح العلاقة (1) كمايلي $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$

وبما $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل $\text{Ker}f$ فان $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

وبالتالي اذا تحقق (1) ينتج ان $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+p} = 0$

وهذا يعني ان الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_{n+p}$ مستقلة خطيا

لناخذ الان شعاع كفيي x من E ولنفرض ان $y = f(x)$ وبمان الاشع v_1, v_2, \dots, v_p اساس ل

$f(E)$ فيمكن ان نكتب $y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$ وبفرض

$f(x - x') = 0$ وبالتالي $y = f(x')$ نجد $x' = \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}$

$x - x' \in \text{Ker} f$ فيكتب الشعاع $x - x'$ على الشكل التالي

وهذا يؤدي الى $x - x' = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$

$x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}$

وهذا يعني ان الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_{n+p}$ مولدة ل E فهي تشكلن اساسا ل E مما يعني ان

$$\dim(E) = \dim \text{Ker} f + \text{rg}(f) \text{ اي } \dim(E) = \dim \text{Ker} f + \dim(f(E))$$

نتيجة :

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f)$$

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \dim(F) = \text{rg}(f)$$

الاثبات

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f)$$

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \dim(F) = \text{rg}(f)$$

تمرين محلول 1 :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (3x - 4y, x - y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $\text{Ker} f$ و $\text{Im} f$ ثم $\text{rg}(f)$

الحل :

$$(x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
& = (3(\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y'), \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y') \\
& = \lambda(3x - 4y, x - y) + \mu(3x' - 4y, x' - y') \\
& = \lambda f((x, y)) + \mu f((x', y'))
\end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي

$$\begin{aligned}
\text{Ker}f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = 0_F = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3x - 4y, x - y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y = 0\} \\
&= \{(0, 0)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}f &= \{f((x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(3x - 4y, x - y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(3x, y) + (-4y, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(3, 1) + y(-4, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \langle (3, 1), (-4, 1) \rangle
\end{aligned}$$

$$rg(f) = \dim(\text{Im}f) = 2 \quad \text{ومنه}$$

تمرين محلول 2

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (-y, 2x + y, x)$$

(1) بين ان $\text{Im}f$ مستوي شعاعي يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

(2) هل f متباين ؟ علل

الحل

عين $\text{Im}f$

$$\begin{aligned}
\text{Im}f &= \{f((x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(-y, 2x + y, x) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(0, 2x, x) + (-y, y, 0) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(0, 2, 1) + y(-1, 1, 0) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \langle (0, 2, 1), (-1, 1, 0) \rangle
\end{aligned}$$

ومنه $\dim(\text{Im}f) = 2$ اذن $\text{Im}f$ مستوي شعاعي

تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي الشعاعي $\text{Im}f$

$$f((x, y)) = (X, Y, Z) \Leftrightarrow (-y, 2x + y, x) = (X, Y, Z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -y \\ Y = 2x + y \\ Z = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X + 2Z - Y = 0$$

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim \ker f + \text{rg} f \Rightarrow \dim \ker f = \dim(\mathbb{R}^2) - \text{rg} f = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0, 0)\}$$

$\Rightarrow f$ متباين

سلسلة تمارين رقم 3 حول (العمليات الداخلية –

الفضاء الشعاعي – المطبيقات الخطية ')

(1) العمليات الداخلية

التمرين الاول :

لتكن مجموعة الاعداد الصحيحة \mathbb{Z} المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x * y = x + 2y$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية في \mathbb{Z}

(2) ادرس خصائص هذه العملية

التمرين الثاني :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} المزودة بالعملية التجميعية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

بين ان $(\mathbb{R}, *)$ زمرة تبديلية في \mathbb{R}

التمرين الثالث :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \ln(e^x + e^y)$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية

(2) ادرس خصائص هذه العملية

التمرين الرابع :

لتكن المجموعة $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة ب

$$\forall x, y \in E, \quad x * y = xy - 2x - 2y + 6$$

(1) اثبت انه اذا كان $y \neq 2$ و $x \neq 2$ فان $xy - 2x - 2y + 6 \neq 2$

ماذا تستنتج ؟

(2) بين ان $(E, *)$ زمرة تبديلية

التمرين الخامس :

نعرف على \mathbb{R} العملية الداخلية $*$ كمايلي

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a * b = \frac{1}{2}(ab + a + b - 1)$$

(1) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية

$$x * 5 = 2, \quad (-2) * x = 0, \quad x * x = 2$$

(2) تحقق ان $*$ تبديلية وتجميعية في \mathbb{R}

(3) اوخذ العنصر الحيادي للعتلية $*$ في \mathbb{R}

(4) هل كل عنصر من \mathbb{R} يقبل نضير بالنسبة للعملية $*$ في \mathbb{R}

(5) عين Ω مجموعة العناصر من \mathbb{R} التي تقبل نضير بالنسبة للعملية $*$

(2) الفضاءات الشعاعية

التمرين الاول :

اثبت ان الاشعة $u = (1,1,1)$ $v = (1,2,3)$ $w = (2,-1,1)$ تولد \mathbb{R}^3

التمرين الثاني :

لتكن الاشعة $u = (0,-1,1)$ $v = (-1,0,1)$ $w = (1,-1,0)$ من \mathbb{R}^3

(1) اثبت ان هذه الاشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى

(2) هل $\{u, v, w\}$ مستقلة خطيا ؟ ماهو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذي تولده هذه الاشعة

التمرين الثالث :

اثبت ان التوابع f, g, h المعرفة ب :

$$f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$$

مستقلة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

التمرين الرابع :

ليكن E الفضاء الشعاعي الجوهي من \mathbb{R}^3 والمولد بالاشعة التالية

$$c = (-1, 1, -3, 0) \quad b = (1, 2, 0, 1) \quad a = (2, 1, 3, 1)$$

عين اساس ل E وكذا بعد E

(3) التطبيقات الخطية

التمرين الاول :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow f((x, y, z)) = (x, x - y, y - z)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين Imf و $Kerf$

التمرين الثاني :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow f((x, y, z)) = (-x + y + z, x - y + z)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y, z)) = (y, x, x + y)$$

(1) بين ان التطبيقين f و g خطيين

(2) عين Imf و $Kerf$ و Img و $Kerg$ و rgf و $rg(g)$

(3) عين fog و gof

التمرين الثالث :

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الاساس القانوني للفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 و نعتبر $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ من \mathbb{R}^3 حيث

$$e'_3 = 2e_2 + 3e_3, \quad e'_2 = e_1 + 2e_2, \quad e'_1 = e_1$$

(1) بين ان $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ اساس ل \mathbb{R}^3

(2) ليكن f التطبيق الخطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 الذي يحقق

$$f(e_3) = e'_3, f(e_2) = e'_2, f(e_1) = e'_1$$

(3) هل f تقابلي؟ علل ثم عين عبارته

التمرين الرابع :

ليكن H المجموعة الجزئية من \mathbb{R}^3 المعرفة ب :

(1) بين ان H فضاء شعاعي جزئي من \mathbb{R}^3

(2) اوجد بعد H

التمرين الخامس

ليكن التطبيق الخطي f معرف

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow f((x, y)) = (2x - 4y, x - 2y)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow g((x, y)) = (3x - 4y, x - y)$$

(1) عين Imf و $Kerf$ بين يعديهما. هل f متباين؟ هل f غامر؟

(2) بين ان g تقابلي عين g^{-1} استنتج يعدي Img و $Kerg$

الحلول

التمرين الاول :

لتكن مجموعة الاعداد الصحيحة \mathbb{Z} المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x * y = x + 2y$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية في \mathbb{Z}

(2) ادرس خصائص هذه العملية

الحل

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x + 2y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x * y \in \mathbb{Z}$$

ومنه ان $*$ داخلية في \mathbb{Z}

(2)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x * y = x + 2y \neq y + 2x = y * x$$

ومنه ان $*$ ليست تبديلية في \mathbb{Z}

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad (x * y) * z = (x + 2y) * z = x + 2y + 2z \quad (a)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad x * (y * z) = x * (y + 2z) = x + 2y + 4z \quad (b)$$

$a \neq b$ ومنه ان $*$ ليست تجميعية في \mathbb{Z}

$$\forall x \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z} \quad x * c = x, c * x = x$$

$$x * c = x \Leftrightarrow x + 2c = x \Leftrightarrow c = 0$$

اذا كان $c = 0$ فان ,

$$c * x = x \Leftrightarrow 0 + 2x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$$

وهذا تناقض ومنه ان $*$ لا تقبل عنصرحيادي في \mathbb{Z} وكل عنصر لا يقبل عنصرنضير

التمرين الثاني :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} المزودة بالعملية التجميعية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

بين ان زمرة تبديلية في \mathbb{R} ($\mathbb{R}, *$)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x$$

ومنه ان $*$ تبديلية في \mathbb{R}

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{R} \quad x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow e = 0$$

ومنه ان 0 هو العنصر الحيادي للعملية $*$ في \mathbb{R}

العنصر النضير

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad x * x' = 0$$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + x'^3} = x \Leftrightarrow x^3 + x'^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x' = -x$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصر نضير للعملية $*$ في \mathbb{R}

ومنه ان ($\mathbb{R}, *$) زمرة تبديلية

التمرين الثالث :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = \ln(e^x + e^y)$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية

(2) ادرس خصائص هذه العملية

الحل

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x + e^y) \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ومنه ان $*$ داخلية في \mathbb{R}

(2)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = \ln(e^x + e^y) = \ln(e^y + e^x) = y * x$$

ومنه ان * تبديلية في \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x * y) * z &= \ln(e^x + e^y) * z = \ln(e^{\ln(e^x + e^y)} + e^z) \\ &= \ln(e^x + e^y + e^z) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x * (y * z) &= x * (\ln(e^y + e^z)) = \ln(e^x + e^{\ln(e^y + e^z)}) \\ &= \ln(e^x + e^y + e^z) \end{aligned} \quad (b)$$

$a = b$ ومنه ان * تجميعية في \mathbb{R}

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{R} \quad x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow \ln(e^x + e^e) = x \Leftrightarrow e^x + e^e = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^e = 0$$

وهذا مستحيل ومنه العملية * لا تقبل عنصر حيادي في \mathbb{R} وان كل عنصر من \mathbb{R} ليس له نضير

بالنسبة للعملية *

التمرين الرابع :

لتكن المجموعة $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ المزودة بالعملية * والمعرفة ب

$$\forall x, y \in E, \quad x * y = xy - 2x - 2y + 6$$

(1) اثبت انه اذا كان $x \neq 2$ و $y \neq 2$ فان $xy - 2x - 2y + 6 \neq 2$

ماذا تستنتج ؟

(2) بين ان $(E, *)$ زمرة تبديلية

الحل

(1) نستعمل البرهان بعكس النقيض اي نبرهن انه اذا كان $xy - 2x - 2y + 6 = 2$

فان $x = 2$ و $y = 2$

$$xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \vee y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \vee y = 2$$

ومنه نستنتج ان * عملية داخلية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

* تبديلية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\forall x, y \in E \quad x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y * x$$

ومنه العنلية * تبديلية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

* تجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad (x * y) * z &= (xy - 2x - 2y + 6) * z \\ &= (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6 \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad x * (y * z) &= x * (yz - 2y - 2z + 6) \\ &= x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2yz - 2xy + 4x + 4y + 4z - 6 \quad (b) \end{aligned}$$

$a = b$ ومنه ان * ل تجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists e \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow xe - 3x - 2e + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow e(x - 2) = 3(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow e = 3, \quad x \neq 2$$

ومنه العملية * تقبل عنصر حيادي $e = 3$ في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

العنصر النضير

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : x * x' = 0$$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 0 \Leftrightarrow x'(x - 2) = 2x - 6$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{2x - 3}{x - 2}$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصر نضير للعملية * في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

ومنه ان $(\mathbb{R} \setminus \{2\}, *)$ زمرة تبديلية

التمرين الخامس :

نعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ العملية الداخلية * كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}: x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$$

(1) حل في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ المعادلات التالية

$$x * 5 = 2, \quad (-2) * x = 0, \quad x * x = 2$$

(2) تحقق ان * تبديلية وتجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(3) اوخذ العنصر الحيادي للعتلية * في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(4) هل كل عنصر من \mathbb{R} يقبل نضير بالنسبة للعملية * في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(5) عين Ω مجموعة العناصر من \mathbb{R} التي تقبل نضير بالنسبة للعملية *

الحل

$$x * 5 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(5x + x + 5 - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 5x + x + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$(-2) * x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-2x + x - 2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$$x * x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x + x - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{6} \vee x = -1 - \sqrt{6}$$

(2) تحقق ان * تبديلية وتجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}: x * y &= \frac{1}{2}(xy + x + y - 1) \\ &= \frac{1}{2}(yx + y + x - 1) = y * x \end{aligned}$$

ومنه ان * تبديلية في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, (x * y) * z &= \frac{1}{2}((x * y)z + (x * y) + z - 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xy + x + y - 1)z + \frac{1}{2}(xy + x + y - 1) + z - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xyz + xz + yz + z + xy + x + y - 1) - 1\right) \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x * (y * z) &= \frac{1}{2}(x(y * z) + x + (y * z) - 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(x \frac{1}{2}(yz + y + z - 1) + x + \frac{1}{2}(yz + y + z - 1) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xyz + xz + yz + z + xy + x + y - 1) - 1\right) \quad (b) \end{aligned}$$

$a = b$ ومنه ان * ل تجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \exists e \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xe + x + e - 1) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xe - x + e - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(e - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 1, \quad x \neq -1$$

ومنه العملية * تقبل عنصر حيادي $e = 1$ في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
العنصر

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x * x' = 1$$

$$x * x' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xx' + x + x' - 1) = 1 \Leftrightarrow xx' + x + x' - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'(x + 1) = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{3 - x}{x + 1}$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصر نضير للعملية * في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ومنه ان $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ زمرة تبديلية

(2) الفضاء الشعاعي

التمرين الاول :

اثبت ان الاشعة $u = (1,1,1)$ $v = (1,2,3)$ $w = (2,-1,1)$ تولد \mathbb{R}^3

الحل

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

$$(x, y, z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,3) + \alpha_3(2,-1,1)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = x - y \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = x - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = x - y \\ -5\alpha_3 = -x + 2y - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x + y - z \\ \alpha_2 = \frac{1}{5}(-2x - y + 3z) \\ \alpha_3 = \frac{1}{5}(x - 2y + z) \end{cases}$$

بما أن $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ فإن الأشعة u, v, w تشكل أساساً لـ \mathbb{R}^3

التمرين الثاني :

لتكن الأشعة $u = (0, -1, 1)$ $v = (-1, 0, 1)$ $w = (1, -1, 0)$ من \mathbb{R}^3

(1) اثبت أن هذه الأشعة مستقلة خطياً متى متى

(2) هل $\{u, v, w\}$ مستقلة خطياً ؟ ماهو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذي تولده هذه الأشعة

الحل

اثبات أن الشعاعين $u = (0, -1, 1)$ $v = (-1, 0, 1)$ مستقلين خطياً

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (0, -1, 1) + \alpha_2 (-1, 0, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha_2, -\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ومنه أن الشعاعين $u = (0, -1, 1)$ $v = (-1, 0, 1)$ مستقلين خطياً

بنفس الطريقة نثبت أن u و w مستقلين خطياً وكذلك v و w مستقلين خطياً

(2) نلاحظ أن $u + v + w = 0$ ومنه أن $\{u, v, w\}$ ليست مستقلة خطياً

$$S = \{a \in \mathbb{R}^3 : a = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^3 : a = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 (-u - v)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^3 : a = (\alpha_1 - \alpha_3)u + (\alpha_2 - \alpha_3)v\}$$

u, v مولدان لـ S ومستقلان خطياً إذا $\{u, v\}$ أساس لـ S وعليه $\dim S = 2$

التمرين الثالث :

اثبت أن التوابع f, g, h المعرفة بـ :

$$f(x) = x, g(x) = \sin x, h(x) = \cos x$$

مستقلة خطياً في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

الحل

$$\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h = 0$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0$$

$$x = 0, x = \pi, x = \frac{\pi}{2} \quad \text{من اجل}$$

$$\alpha_1 0 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0$$

$$\alpha_1 \pi + \alpha_2 \sin \pi + \alpha_3 \cos \pi = 0$$

$$\alpha_1 \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \sin \frac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ومنه ان التوابع $\{f, g, h\}$ مستقلة خطيا

التمرين الرابع :

ليكن E الفضاء الشعاعي الجوهري من \mathbb{R}^3 والمولد بالاشعة التالية

$$c = (-1, 1, -3, 0) \quad b = (1, 2, 0, 1) \quad a = (2, 1, 3, 1)$$

عين اساسا ل E وكذا بعد E

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (2, 1, 3, 1) + \alpha_2 (1, 2, 0, 1) + \alpha_3 (-1, 1, -3, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 - 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ , \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ , \alpha_2 = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 (a - b + c) = 0, \alpha_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = a + c$$

ومنه الاشعة a, b, c مرتبطة خطيا وعليه فان $\dim E < 3$

$$E = \{v \in E^4 : v = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c\}$$

$$= \{v \in E^4 : v = \alpha_1 a + \alpha_2(a + c) + \alpha_3 c\}$$

$$= \{v \in E^4 : v = (\alpha_1 + \alpha_2)a + (\alpha_3 + \alpha_2)c\}$$

ومنه $\{a, b\}$ مولدة لـ E

$$\alpha_1(2,1,3,1) + \alpha_2(1,2,0,1) = 0 \Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ومنه $\{a, b\}$ مستقلين خطيا و عليه $\{a, b\}$ اساس لـ E و $\dim E = 2$

(3) التطبيقات الخطية

التمرين الاول :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow f((x, y, z)) = (x, x - y, y - z)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين Imf و $Kerf$

الحل

(1) اثبات ان f تطبيق خطي

$$\forall (x, y, z)(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$= (\lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', \lambda y + \mu y' - \lambda z - \mu z')$$

$$= \lambda(x, x - y, y - z) + \mu(x', x' - y', y' - z')$$

$$= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z'))$$

ومنه f تطبيق خطي

$$Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = 0_F = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, x - y, y - z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y = z = 0\}$$

$$= \{(0,0,0)\}$$

$$Imf = \{f((x, y, z)) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\{(x, x - y, y - z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x, x, 0) + (0, -y, y) + (0, 0, -z) + / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{x(1,1,0) + y(0, -1,1) + z(0,0, -1) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \langle (1,1,0), (0, -1,1), (0,0, -1) \rangle$$

$$dim(Imf) = 3 \text{ ومنه}$$

التمرين الثاني :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow f((x, y, z)) = (-x + y + z, x - y + z)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow g((x, y)) = (y, x, x + y)$$

(1) بين ان التطبيقين f و g خطيين

(2) عين Imf و $Kerf$ و Img و $Kerg$ و rgf و $rg(g)$

(3) عين fog و gof

الحل

(1) اثبات ان f تطبيق خطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^2

$$\forall (x, y, z)(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$= (-\lambda x - \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y' + \lambda z + \mu z')$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(-x + y + z) + \mu(x' - y' + z') \\
&= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z'))
\end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^2

– اثبات ان g تطبيق خطي من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
&g(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = g(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
&= (\lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y') \\
&= \lambda(y, x, x + y) + \mu(y', x', x' + y') \\
&= \lambda g((x, y)) + \mu g((x', y'))
\end{aligned}$$

ومنه g تطبيق خطي

$$\begin{aligned}
Kerf &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = 0_F = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (-x + y + z, x - y + z) = (0, 0)\} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y, z = 0
\end{aligned}$$

$$Kerf = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

وعليه فان $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من \mathbb{R}^3 مولد بالشعاع $(1, 1, 0)$ اذن $dimkerf = 1$

$$\begin{aligned}
Imf &= \{f((x, y, z)) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(-x + y + z, x - y + z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{((-x + y)(1, -1) + z(1, 1)) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}
\end{aligned}$$

يمكن التاكيد بسهولة ان الشعاعين $(1, 1)$ $(1, -1)$ مستقلين خطيا وبالتالي اساس ل Imf

وعليه فان Imf هو الفضاء الشعاعي الجزئي من \mathbb{R}^2 المولد بالشعاعين $(1, 1)$ $(1, -1)$ اذن

$$\dim(\text{Im}f) = 2$$

$$\dim\mathbb{R}^3 = \dim\ker f + \text{rg}f \Rightarrow \text{rg}f = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 3 - 1 = 2$$

$$\text{Kerg} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g((x, y)) = 0_F = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (y, x, x + y) = (0, 0, 0)\}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\text{Kerg} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\dim\ker g = 0 \text{ ومنه}$$

$$\text{Im}g = \{g((x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\{(y, x, x + y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

يمكن التأكيد بسهولة ان الشعاعين $(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$ مستقلين خطيا وبالتالي اساس ل $\text{Im}g$

وعليه فان $\text{Im}g$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من \mathbb{R}^3 المولد بالشعاعين $(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$ اذن

$$\dim\text{Im}g = \text{rg}g = 2$$

(3) تعين $f \circ g$ و $g \circ f$

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(-x + y + z, x - y + z)$$

$$= (x - y + z, -x + y + z, 2z)$$

ومنه

$$g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x - y + z, -x + y + z, 2z)$$

$$(f \circ g)(x, y, z) = f(g(x, y, z)) = f(y, x, x + y)$$

$$= (-y + x + x + y, y - x + x + y)$$

$$= (2x, 2y)$$

$$f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

ومنه

التمرين الثالث :

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الاساس القانوني للفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 و نعتبر الاشعة e'_1, e'_2, e'_3 من \mathbb{R}^3 حيث

$$e'_3 = 2e_2 + 3e_3, e'_2 = e_1 + 2e_2, e'_1 = e_1$$

(1) بين ان $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ اساس ل \mathbb{R}^3

(2) ليكن f التطبيق الخطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 الذي يحقق

$$f(e_3) = e'_3, f(e_2) = e'_2, f(e_1) = e'_1$$

(3) هل f تقابلي ؟ علل ثم عين عبارته

الحل

(1) اثبات ان $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ اساس ل \mathbb{R}^3

$$\forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} : \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \delta e'_3 = 0$$

$$\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \delta e'_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha e_1 + \beta(e_1 + 2e_2) + \delta(2e_2 + 3e_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)e_1 + (\beta + 2\delta)e_2 + 3\delta e_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + 2\delta = 0 \\ 3\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$$

ومنه الاشعة من \mathbb{R}^3 e'_1, e'_2, e'_3 مستقلة خطيا

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \delta e'_3$$

$$= (\alpha + \beta)e_1 + (\beta + 2\delta)e_2 + 3\delta e_3$$

$$= (\alpha + \beta, \beta + 2\delta, 3\delta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta + 2\delta = y \\ 3\delta = z \end{cases}$$

ومنه \mathbb{R}^3 مولد بالاشعة e'_1, e'_2, e'_3 وعليه فهي تشكل اساس ل \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \alpha = x - y + 2\frac{z}{3} \\ \beta = y - 2\frac{z}{3} \\ \delta = \frac{z}{3} \end{cases}$$