

## أعمال موجهة في وحدة القياس

## مستوى ثالثة رياضيات

## حل تمرين 22.

1. نشير إلى أن  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  و  $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .  
نطبق نظرية فوبيني على الفضاء  $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \mu \otimes \mu)$  حيث  $\mu$  يمثل قياس العد، لاحظت 16،  
نحصل على

$$\int_{\mathbb{N}^2} v_{n,k} d\mu \otimes \mu = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} v_{n,k} = \sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k}$$

- حالة  $(v_{n,k})$  موجبة نستعمل نظرية فوبيني 1، الشرط الكافي للحصول على  
 $\sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k})$  هو  $(v_{n,k})$  فيوسية.  
و هذا الشرط محقق لأنه باعتبار  $v_{n,k}$  كتاب معرّف من  $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$  نحو  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  نجد أن الصورة  
العكسية لكل مجموعة فيوسية تكون موجودة حتما في  $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ .

حالة  $(v_{n,k})$  إشارتها كيفية، نستعمل نظرية فوبيني 2، يكفي تحقق الشرط

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |v_{n,k}| < \infty$$

- أو اذا استعملنا نظرية فوبيني 3، يكفي أن نتحقق من تقارب أحد السلاسل التالية  
 $\sum_{n,k=0}^{\infty} |v_{n,k}|$  أو  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} |v_{n,k}|)$ ،  $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,k}|)$

.2

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^k} \right| &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \right) \right\} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{r} \right\} = 1 < \infty \end{aligned}$$

استخدمنا في المساوات الثانية نظرية فوييني 1، في المساواة الثالثة ما بين قوسين عبارة عن سلسلة حدود متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{n}$  وحدها الأول  $\frac{1}{n^2}$ ، و في باقي الخطوات حسابات. ومنه نستنتج أن السلسلة متقاربة مطلقا. حسب فوييني 2 نكتب

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^k} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) \right\} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} \quad (*) \end{aligned}$$

نعلم أن  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$  ، خذ  $x = 1$  لتحصل على  $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ، ومنه المساواة (\*) تصبح

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ &= \ln(2) + \ln(2) - 1 \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

وهي قيمة السلسلة.

3. نتبع نفس الخطوات

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^{n+k} \frac{n^k}{n! \times k!} \right| &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n! \times k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = e^e < \infty \end{aligned}$$

يعني أن السلسلة متقاربة مطلقا، حسب نظرية فوييني 2 نستنتج

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{n^k}{n! \times k!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} \right) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (e^{-n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e^{-1})^n}{n!} = e^{-e^{-1}} = \frac{1}{e^e} \end{aligned}$$

حل تمرين 23.

1. المطلوب إثبات

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^n e^{-xy} \sin x dx \right) dy \quad \forall n \geq 1$$

نضع

$$R = [0, n] \times [0, +\infty[ \quad \text{و} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{-xy} \sin x$$

التابع  $f$  قيوس، لأنه مستمر.

$R$  مجموعة قيوسة في  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، لكونها مستطيل.

نرمز بـ  $\mu_x$ ،  $\mu_y$  الى قياس لوبيغ على  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  نسبة إلى  $x$ ،  $y$  على التوالي.

أولاً، كون الدالة  $|f|$  قيوسة وموجبة، نستطيع تطبيق نظرية فوبيني 1 على  $|f|$ ،

$$\begin{aligned} \int_R |f| d\mu_x \otimes \mu_y &= \int_R |e^{-xy} \sin x| d\mu_x \otimes \mu_y \\ &= \int_{[0, n]} |\sin x| \left( \int_{[0, +\infty[} e^{-xy} d\mu_y \right) d\mu_x \\ &= \int_0^n |\sin x| \left( \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^n |\sin x| \left( \left[ -\frac{e^{-xy}}{x} \right]_{y=0}^{y=+\infty} \right) dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx \end{aligned}$$

الدالة  $k$  حيث  $k(x) = \frac{|\sin x|}{x}$  ليست معرفة عند 0 لكنها قابلة للتמיד بالاستمرار عند 0، ذلك لأن

نهايتها عند 0 موجودة تساوي 1، نستنتج أن الدالة  $k$  قابلة للمكاملة على المتراص  $[0, n]$ ، لأجل كل

$$n \geq 1. \text{ أي أن } \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty \text{، ونحصل بذلك على}$$

$$\int_R |f| d\mu_x \otimes \mu_y < \infty \quad (**)$$

ثانياً، العلاقة (\*\* تعني  $f \in L^1(R, \mu_x \otimes \mu_y)$ ، ومنه يمكننا تطبيق نظرية فوبيني 2، على  $f$ ،

لنحصل من جهة على

$$\begin{aligned} \int_R f dx dy &= \int_0^n \left( \int_0^{+\infty} f dy \right) dx = \\ &= \int_0^n \sin x \left( \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى على

$$\int_R f dx dy = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^n e^{-xy} \sin x dx \right) dy$$

ومنه الحصول على المساواة :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^n e^{-xy} \sin x dx \right) dy \quad \forall n \geq 1$$

2. لعدم إطالة هاته الورقة بالحسابات سنتجاوز هذا السؤال.

3. نطبق نظرية التقارب بالهيمنة للويغ

شرط 1:  $F_n$  متتالية توابع قبوسة، لأنها مستمرة.

شرط 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2 + 1}, & y \in ]0, +\infty[ \\ \# , & y = 0 \end{cases}$$

نضع  $F(y) = \frac{1}{y^2 + 1}$ ، نجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = F(y)$  نجد  $\mu_y$ -شبه كلياً على  $[0, +\infty[$ .

شرط 3:

$$|F_n(y)| \leq \frac{3}{y^2 + 1} \quad \forall n \geq 1$$

نضع  $g(y) = \frac{3}{y^2 + 1}$ ، نلاحظ أن  $g$  قبوس على  $[0, +\infty[$  وقابل للمكاملة حسب لويغ على

$[0, +\infty[$ ، يعني  $g \in L^1([0, +\infty[, \mu_y)$ .

شروط النظرية محققة، نستنتج

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F_n(y) dy = \int_0^{+\infty} F(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy = [\arctg y]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

4. حسب سؤال 1، 2 و 3 نكتب

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F_n(y) dy = \frac{\pi}{2}$$