جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — **السنة الجامعية:** 2022/2021

المستوى: سنة ثانية رياضيات — **مقياس: مدخل الى الطبولوجيا**

السلسلة 02

التمرين الأول: ليكن (E,d) فضاءا متريا.

(١). تحقق ان $B_f(x,r)$ هي مغلق في (E,d).

(٢). بين ان $\overline{B(x,r)} \subseteq B_f(x,r)$, $B(x,r) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{B_f(x,r)}}$.

التمرين الثاني: ليكن (E,d) فضاءا متريا وليكن التطبيق δ من E نحو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة معرفا من اجل كل x و y بـــ:

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

(١). بين ان δ مسافة على E (يمكن استعمال الدالة $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ مع ملاحظة ان $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$)

(٢). نرمز بـ $B_d(x,r), B_\delta(x,r)$ للكرتين المفتوحتين في $(E,d), (E,\delta)$ على الترتيب.

- بين ان $E = B_\delta(x,1)$.
- بين ان $B_d(x,r) \subseteq B_\delta(x, \frac{r}{1+r})$
- استنتج ان كل مفتوح في (E,δ) هو مفتوح في (E,d).

التمرين الثالث:

ليكن (E,d) فضاءا متريا ولتكن $A \subset E$

(١). بين ان $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

(٢). استنتج ان الدالة $f : E \to \mathbb{R}_+$ حيث $f(x) = d(x,A)$ مستمرة.

التمرين الرابع:

ليكن (E,d) فضاءا متريا ولتكن $A \subset E$.

(١). بين ان $d(x,A) = 0$ اذا وفقط اذا كانت $x \in \overline{A}$.

(٢). بين ان $x \in \overline{A}$ اذا وفقط اذا وجدت متتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ في A متقاربة نحو x.

(٣). بين ان A مغلقة اذا وفقط اذا كانت كل متتالية من A

متقاربة تكون نهايتها في A.

التمرين الخامس: ليكن $d : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ حيث من اجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n, m
.$d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$

(١). تحقق ان $(\mathbb{N}^*, d)$ فضاءا متريا.

(٢). بين ان المتتالية $(n)_{n\geq 1}$ كوشية في $\mathbb{N}^*$

(٣). بين انها ليست متقاربة في $\mathbb{N}^*$. ماذا تستنتج؟

الحلـــــــــول

التمرين الأول:

(١). لاثبات ان B_f مغلق نثبت ان متممتها $E\backslash B_f$ مفتوح

$$E = \{y \in E, d(x,y) > r\}$$

ولنين وجود كرة مفتوحة محتواة في $E\backslash B_f$ من اجل $y \in E$ نضع $\rho = d(x,y) - r > 0$ ولنبين ان الكرة المفتوحة $B(y,\rho)$ محتواة في $E\backslash B_f$.

$$z \in B(y,\rho) \Rightarrow d(y,z) < \rho = d(x,y) - r$$

$$r < d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

$$\Rightarrow d(x,z) > r$$

$$\Rightarrow z \in E\backslash B_f.$$

(٢). $.B(x,r) \subset B_f(x,r) \Rrightarrow B(x,r) = \overbrace{B(x,r)}^{\circ} \subset \overbrace{B_f(x,r)}^{\circ}$

$$B(x,r) \subset B_f(x,r) \Rrightarrow \overline{B(x,r)} \subset \overline{B_f(x,r)} = B_f(x,r).$$

التمرين الثاني:

(١). لاثبات ان δ مسافة، سوف نكتفي باثبات الخاصية الثالثة للمسافة(المتراجحة المثلثية) لان الاولتين واضحتين.

من اجل ذلك نعتبر الدالة φ وهي دالة متزايدة وتحقق $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$.

اذن لدينا

$$\delta(x,z) = \varphi(d(x,z)) \leq \varphi(d(x,y)) + \varphi(d(y,z))$$

$$= \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

(٢). من اجل x كيف من E لدينا:

$$\forall y \in E, \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$$

$$\Rrightarrow y \in B(x,1)$$

$$\Rrightarrow E = B(x;1).$$

الاحتواء العكسي واضح.

(٣).

$$y \in B(x,y) \Longleftrightarrow d(x,y) < r$$

$$\Longleftrightarrow \varphi(d(x,y)) < \varphi(r)$$

$$\Longleftrightarrow \delta(x,y) < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow y \in B(x, \frac{r}{1+r}).$$

اذا كان A مفتوحا في (E,δ) فانه من اجل كل $x \in A$ توجد كرة مفتوحة ممركزة في x تكون محتواة في A ، لكن من اجل كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة δ توجد كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة d تكون محتواة فيها، اي ان A مفتوح في (E,d). اي ان $\tau_\delta \subseteq \tau_d$.

التمرين الثالث:

(١).

$$d(x,A) - d(y,A) = \inf_{z\in A} d(x,z) - \inf_{z\in A} d(y,z)$$

$$= \inf z \in A(d(x,z) - d(y,z)$$

$$\leq d(x,y)$$

$$d(y,A) - d(xy,A) = \inf_{z\in A} d(y,z) - \inf_{z\in A} d(x,z)$$

$$= \inf z \in A(d(y,z) - d(xy,z))$$

$$\leq d(x,y)$$

ومنه

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

(٢). باعتبار $\mathbb{R}$ مزودة بالمسافة الاعتيادية.

$$f : (E,d) \to \mathbb{R}_+, |.|)$$

$$\forall x; \in E, f(x) - f(y) \leq d(x,y)$$

ومنه f مستمرة على E.

التمرين الرابع:

(١).

$$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y \in AE, d(x,y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, d(x,A) = \inf_{z \in A} d(x,z) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x,A) = 0.$$

العكس الان، نفرض ان $d(x,A) = 0$ **ونبرهن ان** x **ملاصقة لـ** A.
لنبرهن بالخلف على ذلك، اي

$$\exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall y \in A, d(x,y) \geq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, d(x,A) \geq \varepsilon$$

وهذا تناقض مع كون ان $d(x,A) = 0$.

(٢). **نفرض انه توجد متتالية** (x_n) **من عناصر** A **متقاربة نحو** x **ولنبرهن ان** x **ملاصقة لـ** A.

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, d(x_n,x) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow x \in \overline{A}.$$

نفرض الان ان $x \in \overline{A}$.

$$\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n}, \exists x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow x_n \to x.$$

(٣).

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, x_n \in B(x,\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow x \in \overline{A} = A.$$

لنثبت العكس، نفرض ان كل متتالية متقاربة نهايتها في A
ونبين ان A **مغلق. يكفي ان نثبت ان** $\overline{A} \subseteq A$.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \subset A, x_n \to x \in A$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq A.$$

التمرين الخامس:

(١). واضح ان d مسافة على $\mathbb{N}^*$.

(٢). من اجل n, m من $\mathbb{N}$ جيث $n \leq m$ لدينا

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \frac{1}{n}$$

يكفي ان نختار $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ يحقق تعريف المتتالية الكوشية.

(٣). $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin \mathbb{N}^*$ ومنه الممتالية ليست متقاربة في $\mathbb{N}^*$. اذن الفضاء ليس تاما.