أعمال موجهة في وحدة القياس

مستوى ثالثة رياضيات

ينبغي إحضار نسخة من هذه السلسلة في حصص الأعمال الموجهة

تمرين 1. *حول النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية عددية*

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ يشير الى المستقيم الحقيقي المكتمل.

لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $\mathbb{R}$. يرمز إلى النهاية العليا لـ $(x_n)_{n\geq 1}$ بالرمز $\limsup\limits_{n\to+\infty}$ أو $\overline{\lim\limits_{n}}$ ، وهي معرفة بـ

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} x_k)$$

النهاية السفلى للمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ يرمز لها بالرمز $\liminf\limits_{n\to+\infty}$ أو $\underline{\lim\limits_{n}}$ ، وهي معرفة بـ

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} x_k)$$

1. عين النهايتين السفلى والعليا لـ $(x_n)_n$ في الحالات التالية

a. $(x_n)_{n\geq 0}:\ x_n = (-1)^n$

b. $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

c. $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = \left(1 + sin\dfrac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

d. $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = \dfrac{2}{n}$

2. بين أن النهايتين السفلى والعليا دوما موجودتان في $\overline{\mathbb{R}}$ من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من $\mathbb{R}$.
3. لتكن $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ متتاليتين من $\mathbb{R}$. برهن القضايا :

a. $\limsup\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$

b. $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$

c. $x_n \leq y_n\ \forall n \implies \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n \ \wedge\ \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$

مع افتراض عدم وجود لحالاتي عدم التعيين $-\infty + \infty$ ، $\infty - \infty+$ في العلاقتين (b) و(a) .

4. برهن أنه حتى تتقارب المتتالية $(x_n)_n$ نحو عدد حقيقي l من $\mathbb{R}$ (أي $\lim\limits_{n} x_n = l$) يلزم ويكفي :

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = l$$

تمرين 2. *حول النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية مجموعات*

لتكن X مجموعة كيفية، ولتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعات من $\mathcal{P}(X)$. حيث $\mathcal{P}(X)$ تشير إلى مجموعة أجزاء X. نذكر بأن المجموعة $\mathcal{P}(X)$ مرتبة بعلاقة الاحتواء "$\subset$" مع أن الترتيب ليس كليا.

نعرف النهايتين العليا والسفلى للمتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ على التوالي بـ

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \quad \text{و} \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right).$$

1. نضع $X = \mathbb{R}$ ، عين النهايتين العليا والسفلى لـ $\{A_n\}_{n\geq 1}$ في الحالات التالية

a. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}:\ A_n = \{(-1)^n;\ n \in \mathbb{N}\}$

b. $\{A_n\}_{n\geq 0}$: $A_{2n}=[0,1],\ A_{2n+1}=[1,2]$

c. $\{A_n\}_{n\geq 1}$: $A_n=\left[0,1+\frac{(-1)^n}{n}\right]$

2. برهن من أجل كل عددين a و b من $\mathbb{R}$ مع $a\prec b$ لدينا :

$$[a,b]=\bigcap_{n\geq 1}\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[\quad ، \quad]a,b[=\bigcup_{n\geq 1}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$$

ثم أعط كتابة للمجال $]a,b[$ على شكل اتحاد قابل للعد لمجالات مغلقة، وكذا المجال $[a,b]$ على شكل تقاطع قابل للعد لمجالات مفتوحة.

3. لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ و $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين من $\mathcal{P}(X)$. برهن القضايا الآتية

a. $\limsup\limits_{n\to+\infty}(A_n\cap B_n)\subset \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\cap \limsup\limits_{n\to+\infty} B_n$

b. $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\cup \liminf\limits_{n\to+\infty} B_n\subset \liminf\limits_{n\to+\infty}(A_n\cup B_n)$

c. $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n\geq 1 \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n=\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

d. $A_{n+1}\subset A_n\ \forall n\geq 1 \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n=\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$

تمرين 3. *حول ا لتابع المميز لمجموعة*

نعرف التابع $\psi_A: X\longrightarrow\mathbb{R}$ المميز لجزء A من مجموعة X المعطى بـ

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1 & : x\in A\\ 0 & : x\notin A\end{cases}$$

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من X.

1. برهن أن: $\psi_{A\cap B}=\psi_A\psi_B$ ، و إذا كان $A\subset B$ ، برهن أن:

$$\psi_A\leq\psi_B \quad ، \psi_{B-A}=\psi_B-\psi_A$$

2. برهن أنه إذا كانت A و B منفصلتين (تقاطعهما خال) فإن : $\psi_{A\cup B}=\psi_A+\psi_B$
3. برهن أنه إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعات جزئية من X ومنفصلة مثنى مثنى، فإن

$$\psi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{A_n}$$

ثم حدد طبيعة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{A_n}$

4. لنفرض $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا، لا يؤخذ إلا عددا منتهيا من القيم، أي $card\ f(X)\prec\infty$. برهن أن f يكتب على شكل مزج خطي لتوابع مميزة، يعني من الشكل $\sum_{i\in I}\lambda_i\psi_{A_i}$ مع λ_i أعداد حقيقية.

حول الحلقات، الجبور والعشائر

تمرين 4.

لتكن X مجموعة و $\mathcal{M}$ فئة من $\mathcal{P}(X)$. نقول على الفئة $\mathcal{M}$ أنها رتيبة إذا كانت مستقرة بالنسبة إلى نهايات متتالياتها الرتيبة، يعني أنه من أجل كل متتالية رتيبة $\{A_n\}_n$ من $\mathcal{M}$ تتحقق القضيتان التاليتان

(i) إذا كانت $\{A_n\}_n$ متزايدة (بمعنى الاحتواء، أي $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n$) فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$ ،

(ii) وإذا كانت $\{A_n\}_n$ متناقصة (بمعنى الاحتواء، أي $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n$) فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$.

1. برهن أن كل عشيرة على X هي فئة رتيبة. هل العكس صحيح؟
2. ليكن $\mathcal{A}$ جبرا على X . نفرض أن $\mathcal{A}$ مستقرا (مغلقا) بالنسبة إلى نهايات متتالياته المتزايدة، بين عندئذ أن $\mathcal{A}$ عشيرة على X.

تمرين 5. ليكن $\mathcal{A}$ جبرا على X و $\mathcal{M}$ فئة رتيبة على X. برهن أنه إذا كان $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ فإن

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$$

تمرين 6. برهن القضية 9 الواردة في الدرس، والتي تنص على أنه إذا كان $f : X \longrightarrow Y$ تطبيق و إذا كانت $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء Y فإن :

$$f^{-1}\left(\sigma_Y(\mathcal{C})\right) = \sigma_X f^{-1}(\mathcal{C})$$

عموما يرمز بـ $\sigma_Z(\mathcal{D})$ إلى العشيرة على Z المولدة من $\mathcal{D}$.

إرشاد: استعمل كون

$$\mathcal{T} = \left\{B \subset Y:\ f^{-1}(B) \in \sigma_X f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$$

عشيرة على Y.

تمرين 7. *العشيرة الأثر*

ليكن $(X, \mathcal{T})$ فضاء قابلا للقياس و $A \subset X$. نعرف الفئة $\mathcal{T}_A$ بـ

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap C:\ C \in \mathcal{T}\}$$

1. بين أن $\mathcal{T}_A$ عشيرة على A ، وتدعى عشيرة أثر $\mathcal{T}$ على A.
2. عين $\mathcal{T}_A$ عندما $A \in \mathcal{T}$.

تمرين 8.

نشير إلى أن جزءا $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ يكون مفتوحا في $\overline{\mathbb{R}}$ اذا كان $U \cap \mathbb{R}$ مفتوحا في $\mathbb{R}$ المزود بالتبولوجيا الاعتيادية، نشير أيضا إلى أن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ هي بمثابة عشيرة أثر لـ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ على $\mathbb{R}$.

بمعاينة $\{-\infty\} = \bigcap_{n\geq 1}[-\infty, -n[$ و $\{+\infty\} = \bigcap_{n\geq 1}]n, +\infty]$ ، أثبت أن كل فئة من الفئات التالية

$$\mathcal{C}_0 = \{\,]\alpha, \beta[/\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \prec \beta \,\}$$
$$\mathcal{C}_{+\infty} = \{\,]\alpha, +\infty] /\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{C}_{-\infty} = \{\, [-\infty, \beta[/\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

تولد العشيرة البوريلية على $\overline{\mathbb{R}}$.

تمرين 9.

1. عين العشيرة $\mathcal{T}$ على المجال $[0,1]$ المولدة بالفئة $\{[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]\}$.
2. عين العشيرة $\mathcal{T}_{]0,1[}$ والتي ترمز إلى عشيرة أثر $\mathcal{T}$ على المجال $]0,1[$ ، إرجع إلى تمرين 7.

تمرين 10.

نعتبر الفضاء المقاس $([0,1],\mathcal{T})$، حيث $\mathcal{T}$ هي العشيرة الواردة في تمرين 9.

1. هل التطبيق

$$f:\ \left(]0,1[,\mathcal{T}_{]0,1[}\right)\ \longrightarrow \left(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$$
$$x\ \longrightarrow \frac{1}{x}$$

قيوس على $]0,1[$ ؟، هل هو مستمر نسبة إلى التبولوجيا الاعتياديه؟

2. هات مثال لتابع من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ قيوس، لكنه غير مستمر.

تمرين 11.

1. بين أن المجموعات التالية هي مجموعات بوريلية في $\mathbb{R}$ ،(أي أنها تنتمي إلى $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

$[-1,1],\ \ ]-1,1[,\ \ [-1,1[,\ \ ]-1,1],\ \ [1,+\infty[,\ \ \mathbb{R}^*,\ \ \mathbb{Q},\ \ [1,+\infty[/\mathbb{N}$.

2. نعرف القياس λ والذي يرفق بكل مجال من $\mathbb{R}$ طوله، المعرف بـ

$$\lambda([a,b])=\lambda(]a,b[)=\lambda([a,b[)=\lambda\left(\left]a,b\right]\right)=b-a$$

لأجل كل $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ مع $a\le b$.

نشير إلى أن λ قياس خارجي على $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ و قياس موجب على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

أحسب قياس المجموعات المذكورة في سؤال 1. ثم حدد المجموعات المهملة.

تمرين 12.

1. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا، وليكن f و g تابعين قيوسين من X نحو $\overline{\mathbb{R}}$، برهن أن المجموعات $\{\,f>g\,\}$ ، $\{\,f\ge g\,\}$ و $\{\,f=g\,\}$ قيوسة في $\mathcal{A}$.

الرمز $\{\,f\ \mathcal{R}\ g\,\}$ يشير إلى المجموعة $\{x\in X:\ f(x)\ \mathcal{R}\ g(x)\ \}$ حيث $\mathcal{R}$ تمثل العلاقة '>' أو '≥' أو '='.

2. نعتبر المجموعتين الجزئيتين من $\mathbb{R}^2$ المعرفتين بـ

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ <y\ \}\ \text{و}\ B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ \le y\ \}$$

هل هما مفتوحتين في $\mathbb{R}^2$ الاعتيادي؟، هل هما قيوستين في $\mathbb{R}^2$ مزودا بالعشيرة البوريلية ؟.

تمرين 13. *قياس ديراك*

ليكن $\left(X,\mathcal{P}(X)\right)$ فضاء قيوسا، و $a\in X$. نعرف التابع $\delta_a\ :\ \mathcal{P}(X)\ \longrightarrow \{\ 0,1\ \}$ بـ

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & : a \in A \\ 0 & : a \notin A \end{cases}$$

1. تأكد من أن δ_a قياس موجب على $\left(X, \mathcal{P}(X)\right)$.
2. نضع $X = \mathbb{R}$ ، أحسب قياس المجموعات الوارد ذكرها في تمرين 11، باستعمال قياس ديراك عند 0.

تمرين 14.

ليكن التابع $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ بحيث

$$m(\emptyset) = 0, \qquad m(\mathbb{N}) = 1, \qquad m(A) = 2 \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset, \mathbb{N}\}.$$

تأكد من أن m قياس خارجي على $\left(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$. هل هو قياس موجب؟.

تمرين 15.

ليكن الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$ حيث δ_0 يمثل قياس ديراك عند 0. ليكن φ تابعا حقيقيا معرفا على $\mathbb{R}$.

أحسب $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\delta_0$ في الحالات التالية:

i. من أجل φ تابعا بسيطا.

ii. من أجل $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ تابعا قيوسا وموجبا.

iii. من أجل $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قيوسا وذات إشارة كيفية.

تمرين 16.

ليكن $\left(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu\right)$ فضاء مقاسا، حيث μ يمثل قياس العد، المعرف بـ

$$\mu(A) = \begin{cases} card\ A & : \quad A \text{ منتهية} \\ \infty & : \quad A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

و ليكن v تابعا حقيقيا معرفا على $\mathbb{N}$.

1. بين أن

$$\int_{\mathbb{N}} v d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)$$

2. أحسب $\int_{\mathbb{N}} v d\mu$ في الحالتين التاليتين

a. $v: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ v = \frac{1}{2}\psi_A + \sqrt{3}\psi_B$

حيث $A = \{0\ , 1,\ 2\}$ و $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \}$.

تذكر الاصطلاح $0 \times \infty = 0$

b. $v: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ v(k) = q^k \quad / \ q \in]0,1[$

تمرين 17. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا، وليكن f تابعا موجبا وينتمي إلى $L^1(X,\mu)$ بحيث:

$$\int_X f\, d\mu = 0$$

1. أثبت أن $lim_{n\to\infty}\,\mu\left(\left\{f>\frac{1}{n}\right\}\right)=0$
2. نضع $A_n=\left\{f>\frac{1}{n}\right\}$ ، بين أن المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة واستنتج أن f معدوم μ شبه كليا على X

تمرين 18.

ليكن الفضاء المقاس $(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$ حيث μ قياس لوبيغ. ليكن f تابعا قيوسا معرفا على $\mathbb{R}$ نحو $\overline{\mathbb{R}}$.

نفرض أن f محدود μ شبه كليا على المتراص $I=[a,b]$. $\left(a<b \text{ و } a,b\in\mathbb{R}\right)$

1. أثبت أن f لوبيغ كمول على $[a,b]$، $\left(\text{يعني } f\in L^1([a,b],\mu)\right)$
2. هل الفرضية " f محدود μ–شك" كافية من أجل أن يقبل f المكاملة على $[a,b]$ حسب ريمان ؟

   إرشاد: قم بفحص التابع المميز للأعداد الناطقة:

$$\psi_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \psi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q}\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

في التمارين 19،20 و21 ، سنعتبر $\mathbb{R}$ أو أي جزء منه مزودا بعشيرة بوريل وقياس لوبيغ

تمرين 19. لتكن $\{f_n\}_{n\geq 0}$ متتابية توابع قيوسة معرفة على $[0,1]$ بـ

$$f_n(x)=nxe^{-nx}$$

1. بين أن $\{f_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة ببساطة على $[0,1]$ نحو تابع f يطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظما؟
2. هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على $\{f_n\}_{n\geq 0}$ ؟، هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبوليفي ؟
3. عين $lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n\, dx$

تمرين 20. استعمل توطئة فاتو لحساب نهاية المتتالية

$$I_n=\int_{[0,1]}\frac{n}{nx^6+1}\,dx$$

تمرين 21. استعمل نظرية تقارب ملائمة لحساب النهايات التالية

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{3x}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{1-cos^n x}{1+x^2}\,dx$

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\frac{n}{n+x}\,dx$

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}e^{-x}cos\left(\frac{x}{n}\right)dx$

تطبيقات نظرية فوبيني

تمرين 22. لتكن $\left(v_{n,k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ متتالية أعداد حقيقية ذات دليلين n و k.

1. باستعمال نظرية فوبيني، أعط شرط كافي من أجل أن تكون السلسلة

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} v_{n,k}$$

متقاربة ويكون لدينا

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k}\right)$$

<u>إرشاد</u> تذكر تمرين 16

2. بين أن السلسلة العددية

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^k}$$

متقاربة مطلقا ثم أحسب قيمتها.

3. نفس السؤال 2، من أجل السلسة

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\,\frac{n^k}{n!\times k!}$$

تمرين 23

1. تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ أن

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^n\left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\right)\sin x\,dx$$

2. استعمل التكامل بالتجزئة مرتين لتثبت أن

$$\int_0^n e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1 - ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

من أجل كل $n \geq 1$ و $y \in \mathbb{R}$.

3. نضع

$$F_n(y) = \frac{1 - ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

أحسب $lim_{n\to\infty}\int_0^\infty F_n(y)\,dy$

4. استنتج أن

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$