## أعمال موجهة في وحدة القياس مستوى ثالثة رياضيات

**ينبغي إحضار نسخة من هذه السلسلة في حصص الأعمال الموجهة**

### تطبيقات نظرية فوبيني

**تمرين 22.** لتكن $(v_{n,k})_{(n,k)\in \mathbb{N}^2}$ متتالية أعداد حقيقية ذات دليلين $n$ و $k$.

1. باستعمال نظرية فوبيني، أعط شرط كافي من أجل أن تكون السلسلة

$$\sum_{(n,k)\in \mathbb{N}^2} v_{n,k}$$

متقاربة ويكون لدينا

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k}\right)$$

إرشاد تذكر تمرين 16

2. بين أن السلسلة العددية

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^k}$$

متقاربة مطلقا ثم أحسب قيمتها.

3. نفس السؤال 2، من أجل السلسة

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k} \frac{n^k}{n!\times k!}$$

**تمرين 23**

1. تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ أن

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^n \left(\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy\right)\sin x\,dx$$

2. استعمل التكامل بالتجزئة مرتين لتثبت أن

$$\int_0^n e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1 - ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

من أجل كل $n \geq 1$ و $y \in \mathbb{R}$ .

3. نضع

$$F_n(y) = \frac{1 - ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

أحسب $lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} F_n(y)\,dy$

4. استنتج أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$