Université d'El Oued 2021/2022
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques $1^{\text{ère}}$ **Année Master (Mathématiques Fondamentales)**

Distributions et Analyse de Fourier **Serie 2**

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui définissent une distribution sur $\mathbb{R}$ et préciser son ordre.

1. $\langle T_a, \varphi \rangle = a + \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt$.
2. $\langle T_b, \varphi \rangle = b \displaystyle\int_{-1}^1 \varphi(t)dt$.
3. $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H(t) Ln|t| \varphi(t)dt,$ où H est la fonction de Heaviside.
4. $\langle T, \varphi \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, \varphi(n)$

Exercice 2

Donner une condition suffisante sur la suite numérique $\{a_n\}$ pour que l'application définie sur $D(\mathbb{R})$ par $\varphi \longmapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \varphi(\frac{1}{n})$, soit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Calculer les dérivées au sens des distributions des fonctions suivantes

1. $f(x) = xLn|x|$.
2. $f(x) = |cos(x)|$
3. $f(x) = (cos(x) - xsin(x))\, \chi_{]0,\infty[}(x) + (xsin(x) - cos(x))\, \chi_{]-\infty,0[}(x)$
4. $f(x) = (-2x+4)\, \chi_{]1,3[}(x) + (2x-4)\, \chi_{]-\infty,1[\cup]3,\infty[}(x)$

Exercice 4

Soit $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite des fonctions réelles définie par : $f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[, \\ 0 & : \quad sinon \end{cases}$

1. Déterminer la limite simple de $\{f_n\}$.
2. Montrer que $\{f_n\}$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers la distribution de Dirac δ_0 et que la suite $\{{f_n}^2\}$ n'est pas convergente dans $D'(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Trouver les limites des suites des distributions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$
2. $f_n(x) = sin(nx)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{sin(x)}{2} \chi_{]-\infty,\frac{\pi}{2}[}(x)$.
Déterminer f' et f'' au sens des distributions, puis déduire une équation différentielle dont f est solution.

Exercice 7

Soient T une distribution sur $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(fT)' = f'T + fT'$.
2. Déterminer la distribution $e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0$.
3. Montrer que si $\left(e^{\frac{x^2}{2}}T\right)' = \delta_0$, alors T est solution de l'équation différentielle $T' + xT = \delta_0$.

Exercice 8

Déterminer le support de la distribution $T = H + \delta_0$.

Exercice 9

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

1. Donner une condition sur f pour que $f\delta'_0 = 0$.
2. Déduire que $x\delta'_0 \neq 0$
3. Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in Supp(T)$, a t'on $fT = 0$?