**Distributions et Analyse de Fourier** **Résumé du Cours (Partie 4)**

**Présenté par: NISSE Khadidja**

# Transformation de Fourier

## Théorie dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition

*La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et qu'on note par $\mathcal{F}f$ ou bien $\widehat{f}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega t} f(t)dt \qquad , \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Remarques

1. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\omega)$ est bien défini.
2. On peut rencontrer dans la littérature mathématique de cette théorie, les définitions suivantes :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

Notation

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ continue t.q } \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0\}$$

On muni $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}_0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$$

**Théorème**

1. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et c'est une contraction :*

$$\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}_0} \leqslant \|f\|_{L^1}$$

*Autrement dit, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

*(i)* $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

*(ii)* $\widehat{f}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\pm\infty]{} 0$ *(Lemme de Riemann-Lebesgue)*

*(iii)* $|\widehat{f}(\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$

2. *La transformation de Fourier est une application linéaire continue de* $(L^1(\mathbb{R}), ||.||_{L^1})$ *dans* $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), ||.||_{\mathcal{C}_0})$*. Autrement dit, pour tout* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *et tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$$

Remarques

1. $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est strictement inclus dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Autrement dit : $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.
2. $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

**Exemples**

Soient $a > 0$ fixé, $c$ et $d$ deux réels tels que $c < d$. Par un calcul direct, en appliquant la définition, on a pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ :

1. $$\mathcal{F}\left(\chi_{[c,\, d]}\right)(\omega) = \begin{cases} d - c & \text{si } \omega = 0 \\ \dfrac{\sin \pi(d-c)\omega}{\pi\omega} e^{-i\pi(c+d)\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$
2. $$\mathcal{F}\left(e^{ax}\chi_{]-\infty,\, 0[}\right)(\omega) = \frac{1}{a - 2\pi i\omega}$$
3. $$\mathcal{F}\left(e^{-ax}\chi_{]0,\, \infty[}\right)(\omega) = \frac{1}{a + 2\pi i\omega}$$
4. $$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\omega) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\omega^2}$$
5. $$\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$$

**Propriétés**

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), \tau, \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

1. $$\text{Si} \quad g(t) = f(t-\tau), \text{ alors} \quad \hat{g}(\omega) = e^{-2\pi i\omega\tau}\widehat{f}(\omega)$$
2. $$\text{Si} \quad g(t) = e^{2\pi i\tau t}f(t), \text{ alors} \quad \widehat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \tau)$$
3. $$\text{Si} \quad g(t) = f(-t), \text{ alors} \quad \widehat{g}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$$
4. $$\text{Si} \quad g(t) = \lambda f(\lambda t), \text{ alors} \quad \widehat{g}(\omega) = \hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \qquad (\lambda > 0)$$

5.

$$\text{Si} \quad g(t) = -2\pi i t f(t) \;\; t.q \quad g \in L^1(\mathbb{R}), \text{ alors} \quad \widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ et} \quad \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}'(\omega)$$

### Transformation de Fourier et convolution

Définition

*Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ où $p \in [1, +\infty]$.*
*On définit le produit de convolution de $f$ et $g$ et qu'on note $(f * g)$, par :*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale converge absolument, ç.à.d :* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)g(s)|ds < \infty$

**Théorème**

*Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p = 1, 2,$ ou $\infty$, alors $(f * g)$ est défini presque partout sur $\mathbb{R}$, $(f * g) \in L^p(\mathbb{R})$, de plus, on a :*

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} . \|g\|_{L^p}$$

*Si $p = \infty$, alors $(f * g)$ est uniformément continue et bornée.*

**Propriété**

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \widehat{f}(\omega).\, \widehat{g}(\omega)$$

### Inversion de la transformation de Fourier

**Théorème**

*Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors la formule d'inversion*

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \widehat{f}(t)dt$$

*est vrais pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.*

Remarque

1. En redéfinissant $f$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut rendre la formule d'inversion donnée par le théorème précédent, vrais pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Il est important de noter que la partie droite de la formule d'inversion est une fonction continue, ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Le corollaire suivant, présente une interprétation très utile en pratique, de la formule d'inversion.

**Corollaire**

*Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :*

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = f(-t) \quad \textit{presque partout sur} \quad \mathbb{R}$$

**Exemple d'application**

Soit par définition $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & \text{si } |\omega| \leqslant 1 \\ \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$.

En utilisant la formule d'inversion, on va déduire l'expression de $f$. En effet, on a

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega t}\widehat{f}(t)dt = \int_{-1}^{0}(1+\omega)e^{2\pi i\omega t}dt + \int_{0}^{1}(1-\omega)e^{2\pi i\omega t}dt$$

En utilisant le changement de variable $u = -\omega$ pour effectuer le premier intégrale dans l'expression précédente, on obtient

$$f(\omega) = \int_{0}^{1}(1-\omega)\left[e^{2\pi i\omega t} + e^{-2\pi i\omega t}\right]dt = \int_{0}^{1}(1-\omega)2cos(2\pi\omega t)dt$$

Une intégration par parties, donne alors

$$f(\omega) = \left(\frac{sin(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^2$$

**Théorème** (Plancherel-Parseval)

*Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$*

Remarque

La formule de Plancherel-Parseval, n'affirme pas que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $f \notin L^2(\mathbb{R})$, on a nécessairement $\widehat{f} \notin L^2(\mathbb{R})$ ($\|\widehat{f}\|_{L^2} = +\infty$).

## Transformation de Fourier des fonctions à plusieurs variables

On peut généraliser la théorie de la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ au cas des fonctions à plusieurs variables, ç.à.d dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notons par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire (euclidien) de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, ...x_n), y = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{R}^n : \qquad \langle x\ ,\ y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Définition

*La transformation de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et qu'on note par $\mathcal{F}f$ ou bien $\widehat{f}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x\,,\omega\rangle} f(x)dx \qquad , \forall \omega \in \mathbb{R}^n$$

Remarque

La plus part des propriétés restent valables dans le cas de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, on a le théorème suivant :

**Théorème**

*Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si la fonction $x \longmapsto x_j f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à $\omega_j$ continue, uniformément bornée et on a :*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \omega_j} = -2\pi i \mathcal{F}(x_j f)$$

*Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et si la fonction $x \longmapsto x^\alpha f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $D^\alpha \widehat{f}$ est une fonction continue, uniformément bornée et on a :*

$$D^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^\alpha f\right)$$

# Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

La théorie de la transformation de Fourier dans $L^1$ a nécessité la restriction de l'espace $L^1$ afin d'utiliser les formules de dérivation et donner un sens à la définition de la transformée inverse. Dans ce qui suit, on va introduire un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ bien adapté a la transformation de Fourier : c'est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

## Fonctions à décroissance rapide

Définition
*Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide (à l'infini) si,*

$$\textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \textit{ on a } \lim_{\|x\|\to\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$$

Exemple Pour tout $a > 0$, la fonction $f(x) = e^{-a\|x\|}$ est a décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.

**Propriétés**

1. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est à décroissance rapide, alors : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à décroissance rapide, alors : $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
3. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à décroissance rapide et si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.

## L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition

*On appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que*

*(i) $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.*

*(ii) $f$ est à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^n$.*

**Proposition**

*$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est satisfaites :*

*(i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall l \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_{l,\alpha} > 0, \quad \|x\|^l |D^\alpha f(x)| \leqslant C_{l,\alpha}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$*

*(ii) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \quad |x^\alpha D^\beta f(x)| \leqslant C_{l,\alpha}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$*

Remarque

Toutes les dérivées d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tendent vers zéro à l'infini "plus vite" que tout polynôme.

**Propriétés**

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : N_m(f) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty} < +\infty$
3. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
4. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $P$ est un polynôme quelconque, alors $P.f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $P$ est un polynôme, alors $P.f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} |P(x)f(x)| = 0$
6. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m : \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^1} < C_m.N_{m+n+1}(f)$
7. Les injections suivantes sont toutes continues
   (i) $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \ 1 \leqslant p \leqslant +\infty$
   (ii) $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$,
   (iii) $i : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
8. $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Remarque

(i) $\{N_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ où $N_m : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N_m(f) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty}$, est une famille de semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui génère sa topologie.

(ii) On obtient la même structure topologique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si on considère la famille de semi-normes $\{\mathcal{N}_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n}$ où $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$

### Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition

*Soient $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

$$\forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} N_m(f_n - f) = 0$$

## Transformations de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Puisque, comme on a déjà vue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformation de Fourier pour une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est bien définie. L'important ici, c'est que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par cette transformation : $\mathcal{F}\left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\right) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui n'est pas le cas pour $L^1(\mathbb{R}^n)$ !

**Théorème**

*La transformation de Fourier est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même. Autrement dit :*
$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est une application linéaire, bijective et bicontinue, telle que*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x\,,\omega\rangle} f(x)dx \qquad et \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x\,,\omega\rangle} \widehat{f}(\omega)d\omega$$

*sont équivalentes pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

### Transformation de Fourier et dérivation

La valeur de la transformation de Fourier, réside dans ses bonnes propriétés qui transforment la dérivation à des opérations algébriques, ce qui facilite par suite l'étude des équations différentielles.
Le théorème suivant fournit un résultat important qui fait la relation entre la transformation de Fourier et la dérivation.

**Théorème**

*Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a ($i$ est le nombre complexe qui vérifie $i^2 = -1$)*

*(i)* $\forall j = 1, 2, ..., n : \quad \widehat{\partial_j f}(x) = -i\, x_j \widehat{f}(x)$,

*(ii)* $\forall j = 1, 2, ..., n : \quad \partial_j \widehat{f}(x) = -i\, \widehat{x_j f}(x)$,

La généralisation du théorème précédent est donnée par

**Conséquence**

*Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

*(i)* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \quad \widehat{D^\alpha f}(x) = (-i)^{|\alpha|}\ x^\alpha \widehat{f}(x)$,

*(ii)* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \quad D^\alpha \widehat{f}(x) = (-i)^{|\alpha|}\ \widehat{x^\alpha f}(x)$,

**Remarque**
Le théorème précédent et sa conséquence se traduit comme suit :
La transformation de Fourier, transforme les dérivées en multiplication par des polynômes.

## Les distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Comme on a vue pour les opérations qu'on a déjà définies sur les distributions telles que la dérivation et la multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, en général une opération sur $D'(\Omega)$ se définie par dualité, ç.à.d par l'action sur l'espace des fonctions tests. Donc il est naturelle de penser à définir la transformation de Fourier pour $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall \varphi \in D\left(\mathbb{R}^n\right) : \langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle$$

mais $D(\mathbb{R}^n)$ n'est pas stable par transformation de Fourier ($\mathcal{F}\varphi$ n'est à support compact que si $\varphi$ est nulle !). Il a fallut donc choisir un autre espace de fonctions tests, plus adapté pour cette raison et encore d'autres raisons. C'est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

**Définition**

*Une application $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite une distribution tempérée et on note $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si et seulement si :*

*(i) $F$ est linéaire.*

*(ii) $F$ est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ç.à.d :*
*Si $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \langle F, \varphi_n\rangle := F(\varphi_n) = \langle F, \varphi\rangle := F(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$*

*Autrement dit, l'ensemble de toutes les distributions tempérées est égale au dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Proposition** (Caractérisation d'une distribution tempérée)

*Une forme linéaire $F$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution tempérée, si et seulement si :*

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle F, \varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k, |\beta|\leqslant l} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Remarque**

(i) Puisque l'injection $D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue, alors $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$. En fait, c'est le plus large sous-espace possible sur lequel on peut définir la transformation de Fourier.

(ii) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subsetneq D'(\mathbb{R}^n)$. Par exemple $f(x) = e^{x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$, mais $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

**Fonctions à croissance lente**

**Définition**

*Une fonction $f$ est dite à croissance lente, si :*

$$\exists C > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant C\|x\|^m \quad (\|x\| \longrightarrow +\infty)$$

**Proposition**

*Soit $f$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$.*
*S'il existe un polynôme $P$ tel que $|f(x)| \leqslant |P(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, alors $f$ est une distribution tempérée. (dans le sens suivant : $\langle f, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)*
*En particulier, toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée.*

### Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition

*Soient $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $F$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \quad \lim_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$$

## Quelques opérations sur les distributions tempérées

### Dérivation

*Soient $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On définit $D^\alpha F$ par*

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

### Multiplication par un polynôme

*Soient $P$ un polynôme et $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit $PF$ par*

$$\langle (PF), \varphi \rangle = \langle F, P\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

### Transformation de Fourier

*Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformation de Fourier de $F$ et on note par $\mathcal{F}(F)$ ou bien $\widehat{F}$ par*

$$\langle \mathcal{F}(F), \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

**Proposition**

*Étant donné $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $P$ un polynôme, alors pour toute distribution tempérée $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a $D^\alpha F, PF$ et $\mathcal{F}(F)$ sont des distributions tempérées.*

## Inversion de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

*Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit l'inverse de la transformée de Fourier de $F$, qu'on note $\mathcal{F}^{-1}(F)$ par*

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(F), \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$