Université d' El-Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

2021/2022
$1^{\text{ère}}$ **Année Master (Mathématiques Fondamentales)**

Distributions et Analyse de Fourier **Résumé du Cours (Partie 2)**

Présenté par: NISSE Khadidja

Introduction à la théorie des Distributions

Il s'avère que les fonctions classiques sont incapable de représenter plusieurs phénomènes physiques. Par exemple, il n'existe pas de fonctions nulles presque partout et d'intégrale égale à 1, bien que les physiciens l'utilisait depuis longtemps : c'est la masse de Dirac $\left(\delta(x) = 0, \, x \neq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx \right)$.
Une théorie mathématique qui résout ce problème, n'est apparue que dans les travaux de Sobolev (1932) et surtout L. Schwartz (1950). C'est la théorie des distributions qui a pu généraliser la notion de fonction et de dérivation classiques. Cette théorie a permis de maitre plusieurs problèmes issus de la physique, en particulier ceux dans lesquels interviennent des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, dans un cadre mathématique rigoureux.
Dans cette partie, on va introduire la notion de distribution et celles d'ordre et de support d'une distribution ainsi que des exemples.

Définitions et Exemples

Définition (Dual Topologique)

Soit E un espace vectoriel topologique. On appelle Dual Topologique de E qu'on note E', l'espace des formes linéaires continues sur E.

Définition (d'une distribution)

On appelle distribution, tout élément de $D'(\Omega)$ "l'espace dual topologique de l'espace des fonctions tests $D(\Omega)$".

Autrement dit : une distribution est une application

$$T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

Linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega) : \langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle$$

Continue :

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } D(\Omega) \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Ainsi, une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est une distribution, si et seulement si :
Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ dans $D(\Omega)$ qui converge vers 0 dans $D(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T, \varphi_n \rangle)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition (Caractérisation d'une distribution)

Une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est une distribution, si et seulement si :

$$\forall K \ \ compact \ \ , K \subset \Omega, \exists C_K > 0, \exists k_K \in \mathbb{N} : |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leqslant k_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall \varphi \in D_K(\Omega)$$

Définition : (Ordre d'une distribution)

1. *Dans la caractérisation précédente, si l'entier k ne dépend pas du compact K, on dit que T est une distribution d'ordre fini inférieur ou égale à k, et le plus petit entier p vérifiant $p \leqslant k$ est appelée ordre de T.*

2. *Si l'entier k ne peut être indépendant du compact K, on dit que T est d'ordre infini.*

Exemples

1. Distribution définie par une fonction localement intégrable

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. La fonction $T_f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution d'ordre 0. En effet :
Notons que :

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Longrightarrow f\chi_K \in L^1(\Omega) \quad \forall K \ \ \text{compact dans } \Omega$$

Ainsi, puisque φ est à support compact, on a :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : f.\varphi \in L^1(\Omega)$$

Par suite T_f est bien défini. De plus, il est claire que T_f est linéaire.
D'autre part ; soient K un compact de Ω et $\varphi \in D_K(\Omega)$, alors

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx| \leqslant \sup_{x \in K} |\varphi(x)| . \int_K |f(x)|dx$$

Donc la caractérisation citée dans la Proposition précédente est satisfaite avec :

$$C_K = \int_K |f(x)|dx \qquad \text{et} \qquad k = 0.$$

Par suite T_f est une distribution d'ordre inférieure ou égale à 0, donc d'ordre 0.

Remarque

On note souvent f au lieu de T_f, c'est à dire, on écrit $\langle f, \varphi \rangle$ au lieu de $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Définitions

1. *On appelle distribution régulière, toute distribution qui peut être définie par une fonction localement intégrable.*

2. *Toute distribution qui n'est pas régulière est dite singulière.*

3. *Toute distribution d'ordre zéro est appelée une mesure de Radon.*

2. La distributions de Dirac

Soit $x_0 \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_{x_0} : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution d'ordre 0. En effet :

Soient K un compact de Ω et $\varphi \in D_K(\Omega)$, alors

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leqslant \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

Donc la caractérisation d'une distribution est satisfaite avec :

$$C_K = 1 \qquad \text{et} \qquad k = 0.$$

Par suite δ_{x_0} est une distribution d'ordre inférieure ou égale à 0, donc d'ordre 0.

Remarque

La distribution de Dirac n'est pas régulière.

3. La distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$: $\left(V_p\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais, on peut quand même lui associer une distribution appelée valeur principale de $\dfrac{1}{x}$ et qu'on note par $V_p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie comme suit :

$$\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \qquad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

$V_p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre 1. En effet :

Montrons d'abord que l'application $V_p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bien définie.
Soient $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $M > 0$ tels que $Supp(\varphi) \subset [-M, M]$. Alors

$$\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégrale on a au voisinage de zéro :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x.\psi(x) \qquad \text{où} \qquad \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\, dt$$

On a

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sup_{|x|\leqslant M} |\psi(x)| \leqslant C \sup_{|x|\leqslant M} |\varphi'(x)|$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|\leqslant M}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant M}\psi(x)dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\,I_1 + I_2\,]$$

Il est facile de voir que $I_1 = 0$ (l'intégrale d'une fonction impaire dans un domaine symétrique).
D'autre part, puisque ψ est continu sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = \int_{-M}^{M}\psi(x)dx$$

Donc $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien définie et de plus, on a :

$$|\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle| = |\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|\leqslant M}\psi(x)dx| \leqslant 2MC \sup_{|x|\leqslant M}|\varphi'(x)|$$

Par conséquent, $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une application linéaire, on déduit que c'est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 1 (on peut montrer qu'elle ne peut être d'ordre 0).

La convergence dans $D'(\Omega)$

Soient $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de distributions sur Ω et $T \in D'(\Omega)$. On dit que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers T dans $D'(\Omega)$ si et seulement si :

$$\forall\varphi \in D(\Omega) : \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Support d'une distribution

Définitions *Soit $T \in D'(\Omega)$.*

1. *On dit que T est nulle sur un ouvert U de Ω si*

$$\forall\varphi \in D_U(\Omega) : \langle T, \varphi\rangle = 0$$

   On note $T_U = 0$ et on dit que U est un ouvert d'annulation de T.

2. *On appelle support de T et on note $Supp(T)$, le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de T.*

Remarques

1. Comme complémentaire d'un ouvert, $Supp(T)$ est toujours fermé.
2. La définition du support d'une distribution, peut être traduite par les assertions équivalentes suivantes :

   (i) $x_0 \notin Supp(T) \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ un voisinage ouvert de x_0 t.q $\forall \varphi \in D(\Omega), Supp(\varphi) \subset V_{x_0} : \langle T, \varphi \rangle = 0$

   (ii) $x_0 \in Supp(T) \Leftrightarrow \forall V_{x_0}, \exists \varphi \in D(\Omega), Supp(\varphi) \subset V_{x_0}$ et $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$

   (iii) Si F est un fermé de Ω : $Supp(T) \subset F \Leftrightarrow T = 0$ dans F^C

Proposition

Soit $T \in D'(\Omega)$, alors

$$Supp(T) = \emptyset \Longleftrightarrow T = 0$$

Exemples

1. $T = \delta_0$ (Distribution de Dirac)
   Tout ouvert de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est un ouvert d'annulation pour δ_0. En effet, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \notin U$, alors :

   $$\forall \varphi \in D_U(\mathbb{R}^n) : \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$$

   D'autre part, il est claire que $0 \in Supp(\delta_0)$, donc le plus grand ouvert d'annulation pour δ_0 est $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et par suite $Supp(\delta_0) = (\mathbb{R}^n - \{0\})^C = \{0\}$.

2. $T = T_H$ (H est la fonction de Heaviside)

   $$H(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0, \\ 0 & : \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

   $U =]-\infty, 0[$ est ouvert d'annulation pour T_H. En effet

   $$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

   Donc, et puisque $\varphi|_{]0,\infty[} = 0$ pour $\varphi \in D_U(\mathbb{R})$, on a :

   $$\forall \varphi \in D_U(\mathbb{R}) : \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$$

   Il est claire qu'il existe un $\varphi \in D(]0, \infty[)$ tel que $\langle T_H, \varphi \rangle \neq 0$

   Ainsi, $U =]-\infty, 0[$ est le plus grand ouvert d'annulation pour T_H, et par suite

   $$Supp(T_H) = (U)^C = [0, \infty[.$$