Distributions et Analyse de Fourier **Résumé du Cours (Partie 1)**

Présenté par: NISSE Khadidja

Espaces de Fonctions et Propriétés

Notations

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-entier.

On appelle longueur de α et on note par $|\alpha|$, l'entier :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

Si α et β sont deux multi-entiers, on dit que $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

On pose

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!},$$

où la factorielle de α qu'on note par $\alpha!$ est définie par :

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$$

Si $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}...{x_n}^{\alpha_n}$$

Soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On note $D^\alpha f$ la dérivée d'ordre α de f définie par :

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f$$

Les espaces $C^k(\Omega)$ et $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ $\quad (0 \leqslant k \leqslant \infty)$

On note par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k, dont les dérivées d'ordre k sont continues. ç.à.d :

$$f \in C^k(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k,\ D^\alpha f \quad \text{existe et est continue}$$

On note par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continument dérivables. ç.à.d :

$$f \in C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ D^\alpha f \quad \text{existe et est continue.}$$

Formule de Leibniz

Soient $k \geqslant 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, on a

$$D^\alpha(\varphi.\psi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta}\psi$$

On note par $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k sur Ω, dont les dérivées d'ordre k sont continues et prolongeables par continuité à $\overline{\Omega}$. ç.à.d :

$$f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k,\ \ D^\alpha f \quad \text{se prolonge continument à } \overline{\Omega}.$$

La topologie de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ est définie par la norme :

$$\|f\|_k = \sup_{x\in\overline{\Omega}, |\alpha|\leqslant k} |D^\alpha f(x)|$$

$\left(C^k\left(\overline{\Omega}\right), \|.\|_k\right)$ est espace de Banach.

La convergence dans $C^\infty(\Omega)$

Soient $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers φ dans $C^\infty(\Omega)$, si :

Pour tout compact K dans Ω, et tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \sup\limits_{x\in K, |\alpha|\leqslant m} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \right\} = 0$

Les espaces $D^k(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N})$

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle support de la fonction $f \in C^k(\Omega)$, et on note par $Suppf$, l'ensemble suivant :

$$Suppf = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Définition

On note par $D^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^k(\Omega)$ à support compact.

Notations et Conséquence

1. Si $k = \infty$, $D^\infty(\Omega)$ est noté par $D(\Omega)$ et on l'appelle espace des fonctions test (ou fonctions d'essai).
2. Soit K une partie compacte de Ω. On note par $D_K(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support dans K :

$$D_K(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : Supp(f) \subset K\}$$

3. Par conséquent, on a

$$D(\Omega) = \{f \in C^{\infty}(\Omega) : \exists K \quad Compact, \quad K \subset \Omega, f \in D_K(\Omega)\}$$

Caractérisation

$$\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \Longleftrightarrow \psi \in D(\mathbb{R}) \quad et \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$$

Exemple (Fonction test)

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$, la fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par la formule donnée ci-dessous, est une fonction de classe $C^{\infty}(\Omega)$ avec $Supp(\varphi) = \overline{B(0,1)}$, et par suite $\varphi \in D(\Omega)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$$

La convergence dans $D(\Omega)$

Définition

On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ dans $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D^k(\Omega)$ si :

1. *Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $m \geqslant 1$: $Supp(\varphi_n) \subset K$ et $Supp(\varphi) \subset K$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, D^{\alpha}\varphi_m$ converge vers $D^{\alpha}\varphi$ uniformément sur K.*

Autrement dit, $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$ si et seulement si :

1. Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $m \geqslant 1$: $\varphi_m, \varphi \in D^k(\Omega)$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m \geqslant m_0$ on a $\sup\limits_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |D^{\alpha}\varphi_m(x) - D^{\alpha}\varphi(x)| < \varepsilon$

Suites régularisantes

Définition

On appelle suite régularisante dans $D(\mathbb{R}^n)$, toute suite $(f_j)_{j\geqslant 1} \subset D(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $j \geqslant 1$: $f_j \geqslant 0$.*
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = 1$
3. *$Supp(f_j) \subset B(0, \varepsilon_j)$ avec $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$*

Exemple

Pour toute fonction $0 \leqslant \varphi \in D\left(\mathbb{R}^n\right)$, on peut associé une suite régularisante $\left(f_j\right)_{j \geqslant 1}$ comme suit :

1. On pose : $f = \dfrac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx} \varphi.$ $\left(f \in D\left(\mathbb{R}^n\right), \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1 \quad \text{et} \quad Supp(f) \subset B(0,1) \right)$
2. Soit maintenant $\left(\varepsilon_j\right)_{j \geqslant 1}$ une suite telle que $\lim\limits_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$ $\left(\varepsilon_j = \frac{1}{1+j} \quad \text{par exemple} \right)$
3. On pose : $f_j = \dfrac{1}{\varepsilon_j^n} f\left(\dfrac{x}{\varepsilon_j^n}\right)$

Les espaces $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

Définition

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \{ \text{ la classe des fonctions } f : \Omega \to \mathbb{R} \quad t.q \;\; f \;\; \text{est mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty\},$$

avec

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.

Définition

Pour le cas $p = \infty$, on pose :

$$L^\infty(\Omega) = \{ \text{ la classe des fonctions } f : \Omega \to \mathbb{R} \;\; t.q \;\; f \;\; \text{est mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \leqslant C \;\; p.p. \text{ sur } \;\Omega\},$$

On définit et on note la norme dans $L^\infty(\Omega)$ par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leqslant C \quad \text{presque partout sur } \; \Omega\}$$

Remarque

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées, et on dit que $\|f\|_{L^\infty}$ est le Sup essentiel de f :

$$Supess(f) = \|f\|_{L^\infty}$$

Théorème

L'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{L^\infty}$ est un espace de Banach.

Soit $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, on désigne par q le conjuguée de p : c'est à dire q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soient $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *et* q *le conjuguée de* p.
Si $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *alors* $f.g \in L^1(\Omega)$ *et on a*

$$\|f.g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^q}$$

Proposition (Comparaison entre les espaces L^p)

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$, *tels que* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ *et* E *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$, *mesurable et de mesure fini.* $(m(E) < \infty,\ m$ *est la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^n)$.
Alors :

$$L^q(E) \subset L^p(E)$$

De plus, cette injection est continue :

$$\exists C_{p,q,m(E)} : \ \ \|f\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^q} \qquad \forall f \in L^q(E)$$

Définition (L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$)

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction réelle définie sur* Ω. f *est dite localement intégrable, et on note* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *si elle est intégrable sur tout sous-ensemble borné et mesurable de* Ω.

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ t.q \ \forall K \subset \Omega \ avec \ K \ borné \ et \ mesurable \ : \int_K |f(x)|dx < \infty\}$$

Remarque

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour tout compact K dans Ω (K est fermé et borné, donc mesurable et borné) :

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

Lemme (de Dubois-Reymond)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Si pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, *alors*
$f = 0$ *presque partout sur* Ω.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p.

Proposition

Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *on a :*

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

Définition (Produit de convolution)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *On appelle produit de convolution de* f *et* g *et on note par* $(f * g)$, *l'application donnée par :*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Proposition

Soient $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régularisante et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors la suite $(f_j)_{j\geqslant 1}$ définie par :

$$f_j = (\varphi_j * f) \quad \forall j \geqslant 1$$

vérifie les assertions suivantes :

1. $\forall j \geqslant 1 : f_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. *Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Si $f \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f dans $D(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
5. *S'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0,a)}\right)^C$, alors $f_j = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0,a+\frac{1}{j})}\right)^C$ (Donc f_j est à support compact et par suite $f_j \in D(\mathbb{R}^n)$).*

Théorème

Pour $n \geqslant 1$ et $p \in [1, \infty[$, $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

La démonstration utilise une méthode dite de "troncature et régularisation"

On pose

$$A = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n), \exists K \text{ compact de } \mathbb{R}^n : f = 0 \text{ presque partout sur } \ K^C\}$$

Notons que les éléments de A sont à support compact.

1$^{\text{ère}}$ étape :

Nous allons monter que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, en effet :

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $f_j = f.\chi_{\overline{B(0,j)}}$, on a :

1. $\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$ presque partout (convergence simple).
2. $|f_j| \leqslant |f|$ presque partout $\forall j \in \mathbb{N}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, la suite $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Puisque $(f_j)_{j\geqslant 1} \subset A$, on a bien montrer que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2$^{\text{ème}}$ étape :

Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe une suite $(f_j)_{j\geqslant 1} \subset D(\mathbb{R}^n)$ telle que $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Or cette suite est donnée par $f_j = (\varphi_j * f)$ où $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite régularisante.

Le résultat découle immédiatement de la proposition précédente (précisément, d'après 1.,4. et 5.).