جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثانية رياضيات — مقياس: مدخل الى الطبولوجيا

سلسلة اضافية

التمرين الأول: ليكن (E,τ) فضاءا طبولوجيا ولتكن A جزء من E. اذكر صحة او خطا كلا من القضايا التالية مع التبرير.

(١). اذا كانت B مجموعة مغلقة تحوي A فان $B \subset \overline{A}$.

(٢). اذا كانت B مجموعة مفتوحة محتواة في A فان $B \subset \mathring{A}$.

(٣). كل نقطة منعزلة هي نقطة ملاصقة.

(٤). اذا كانت x_0 نقطة ملاصقة لـ A فان $x_0 \in A$.

(٥). كل نقطة داخلية لـ A هي نقطة من A.

التمرين الثاني:

ليكن (E,τ) فضاءا طبولوجيا. ولتكن A جزءا من E. بين ان

(١). $\overbrace{E\backslash A}^{\circ} = E\backslash\overline{A}$.

(٢). $Fr(A) = \overline{A}/\mathring{A}$

(٣). $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$ ،$Fr(\mathring{A}) \subset Fr(A)$.

(٤). A مغلق اذا وفقط اذا كان $Fr(A) \subset A$

(٥). A مفتوج اذا وفقط اذا كان $Fr(A) \cap A = \emptyset$

(٦). A مفتوج ومغلق اذا وفقط اذا كان $Fr(A) = \emptyset$.

التمرين الثالث: لنكن المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$ ولتكن $\tau\{\emptyset, E, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}\}$ طبولوجيا على E.

(١). عين الاجزاء المغلقة.

(٢). عين جوارات كلا من النقطتين a و b.

(٣). اوجد $\{\mathring{c}\}, \overline{\{c\}}$ استنتج $Fr(\{c\})$.

التمرين الرابع: ليكن (E,τ) فضاءا طبولوجيا، ولتكن $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات جزئية من E. بين ان

(١). $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

(٢). $\overbrace{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{A}_i$.

التمرين الخامس: $\mathbb{R}$ **مزودة باحدى المسافات التالية. هل هي فضاء متري تام؟**

(١). $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.

(٢). $d(x,y) = |e^x - e^y|$.

(٣). $d(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$.

التمرين السادس: **ليكن** (E,d) **فضاءا متريا، ولتكن** $(x_n)_n \geq 0$ **متتالية من عناصر** E.

(١). **بين انه اذا كانت** (x_n) **كوشية فان** $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ **. باستعمال مثال مضاد بين ان الاستلزام العكسي ليس صحيحا عموما.**

(٢). **بين ان** (x_n) **كوشية اذا وفقط اذا كانت السلسلة** $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ **متقاربة.**

التمرين السابع: **ليكن** $E =]0,1[$ **من اجل كل** x,y **من** E **نضع**

$$\delta(x,y) = \ln(1 + |x-y|)$$

(١). **تحقق ان** δ **مسافة.**

(٢). **اذكر فيما ان كانت المتتالية** $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ **متقاربة في الفضاء المتري** (E,δ)**. هل هي كوشية؟**

(٣). **بين ان** (E,δ) **تام.**

التمرين الثامن: **ليكن** (E,d) **فضاءا متريا تاما، ولتكن** $f : E \to E$ **جيث من اجل كل** x,y **من** E

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha_n d(x,y);$$

جيث $f^n = \underbrace{T \circ T \circ ... T}_{n \text{ مرة}}$ (α_n) **متتالية بحيث من اجل كل** $n \in \mathbb{N}, \alpha_n > 0$ **والسلسلة** $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ **متقاربة.**

(١). **لبن ان** $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

(٢). **ببن ان** (x_n) **متتالبة كوشية.**

(٣). **استنتج ان** (x_n) **متقاربة.**

(٤). **ببن ان نهاية المتتالية** (x_n) **هي**