CH VI — Analyse dimensionnelle & Similitudes

1 - Introduction

Quand le système étudié est **trop complexe** pour permettre une résolution complète des équations fondamentales, ou bien lorsque son comportement est **chaotique**, l'analyse dimensionnelle donne accès de façon simple à des **relations entre les différentes grandeurs** caractérisant ce système.

Le regroupement de ces différentes grandeurs en des **nombres sans dimension** permettra par ailleurs d'établir des **similitudes** entre les comportements de **systèmes semblables** mais différents (prototype/maquette).

Prenons l'exemple de la détermination des pertes de charge régulières dans une conduite cylindrique :

Les différentes grandeurs qui interviennent sont :

- $\frac{\Delta P_t}{L}$ la perte de charge par unité de longueur,
- D le diamètre de la conduite,
- ε la rugosité de la conduite,
- V la vitesse moyenne de l'écoulement (ou le débit),
- μ la viscosité du fluide,
- ρ la masse volumique du fluide.

Par conséquent, il existe une relation entre ces différentes grandeurs :

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, \varepsilon, V, \mu, \rho)$$

La fonction f peut s'avérer difficile à trouver ; l'analyse dimensionnelle va alors nous permettre d'établir une relation plus simple entre un nombre moins important de grandeurs sans dimension.

Une méthode systématique va permettre de trouver 3 nombres sans dimensions :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P_t}{L}\frac{D}{\rho V^2} = \lambda \qquad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = Re \qquad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r$$

On pourra ainsi établir : $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_t}{L}\frac{D}{\rho V^2} = \Phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \qquad \Rightarrow \frac{\Delta P_t}{L} = \frac{\rho V^2}{D}\Phi(Re, \varepsilon_r)$$

L'analyse dimensionnelle permet ainsi de voir que la perte de charge régulière est fonction uniquement du nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative de la conduite.

Voyons maintenant une description détaillée de la méthode…

2 - Théorème Π de *Buckingham*

Si une équation comportant k variables est homogène, elle peut être réduite à une relation entre (k-r) produits indépendants sans dimension, où r est le nombre minimal de dimensions requis pour décrire les k variables.

Afin d'illustrer cet énoncé, reprenons l'exemple d'introduction :

Nous avions k=6 variables $\left(\frac{\Delta P_t}{L}, D, \varepsilon, V, \mu, \rho\right)$, qui nécessitent un minimum de r=3 dimensions (M,L,T).

$$\left[\frac{\Delta P_t}{L}\right] = ML^{-2}T^{-2} \quad [D] = L \quad [\varepsilon] = L \quad [V] = LT^{-1} \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \quad [\rho] = ML^{-3}$$

Par conséquent, l'équation reliant les 6 variables peut être ramenée à une équation reliant k-r = 3 produits sans dimension :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P_t}{L}\frac{D}{\rho V^2} = \lambda \qquad \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = Re \qquad \Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r$$

Le théorème Π de *Buckingham*, permet donc le passage :

$$\frac{\Delta P_t}{L} = f(D, \varepsilon, v, \mu, \rho) \quad \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

Afin d'appliquer ce théorème, il convient d'utiliser une méthode systématique (la recette de cuisine) :

① *Faire la liste des variables du problème ⇒* ***k***

② *Écrire l'équation aux dimensions de chacune des k variables.*

③ *Déterminer* ***r****, et donc* ***k-r*** *⇒ le nombre de produits sans dimension caractérisant le problème.*

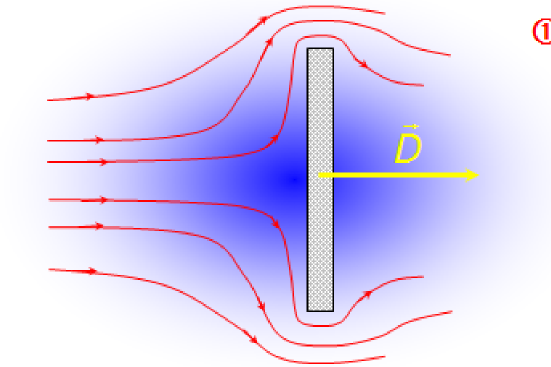
④ *Parmi les* ***k*** *variables, en choisir un nombre* ***r****, qui soient dimensionnellement indépendantes ⇒* ***r*** *variables primaires.*

⑤ *Former les* ***k-r*** *produits Π en combinant les* ***k-r*** *variables non primaires avec les* ***r*** *primaires de façon à obtenir des grandeurs sans dimension.*

⑥ *Formuler la relation entre les* ***k-r*** *produits Π trouvés.*

A titre d'illustration, appliquons la méthode à un exemple concret :

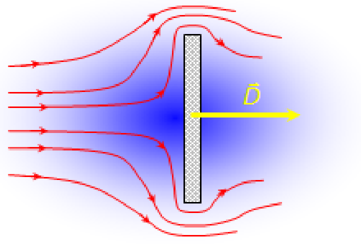
On appelle force de traînée, la force $\vec{D}$ exercée par un écoulement sur un objet, dans la direction parallèle à l'écoulement. Nous allons étudier le cas d'une plaque plane rectangulaire.



① les variables du problème sont :

$D, h, L, v, \mu, \rho \quad \Rightarrow \boldsymbol{k = 6}$

- D : force de traînée
- h : hauteur de la plaque
- L : largeur de la plaque
- v : vitesse moyenne de l'écoulement
- μ : viscosité du fluide
- ρ : masse volumique du fluide



① $D, h, L, v, \mu, \rho \quad \Rightarrow \boldsymbol{k = 6}$

② Équations aux dimensions :

$$\left.\begin{array}{ll} [D] = MLT^{-2} & [v] = LT^{-1} \\ [h] = L & [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \\ [L] = L & [\rho] = ML^{-3} \end{array}\right\} \quad M,L,T \Downarrow \boldsymbol{r = 3}$$

③ Nombre de produits Π sans dimension : $(k - r) = 6 - 3 = 3$

④ Choix de $r = 3$ variables primaires dimensionnellement indépendantes : par exemple h, ρ et v

(remarque : on ne peut pas choisir à la fois h et L)

⑤ Formation des 3 produits Π :

par combinaison des variables primaires et non primaires.

$$\Pi_1 = D\, h^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} v^{\gamma_1}$$
$$\Pi_2 = L\, h^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} v^{\gamma_2}$$
$$\Pi_3 = \mu\, h^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} v^{\gamma_3}$$

$\Pi_1 = D\, h^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} v^{\gamma_1} \quad \rightarrow$ *sans dimension*

$$M^0L^0T^0 = M^1L^1T^{-2}\; L^{\alpha_1}(M^1L^{-3})^{\beta_1}(L^1T^{-1})^{\gamma_1} = M^{1+\beta_1}L^{(1+\alpha_1-3\beta_1+\gamma_1)}\; T^{-2-\gamma_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + \beta_1 \\ 0 = 1 + \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 \\ 0 = -2 - \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \alpha_1 = -2 \\ \gamma_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{D}{\rho v^2 h^2}}$$

$\Pi_2 = L\, h^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} v^{\gamma_2} \quad \rightarrow$ *sans dimension*

$$M^0L^0T^0 = L^1\; L^{\alpha_2}(M^1L^{-3})^{\beta_2}(L^1T^{-1})^{\gamma_2} = M^{\beta_2}L^{(1+\alpha_2-3\beta_2+\gamma_2)}\; T^{-\gamma_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \beta_2 \\ 0 = 1 + \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 \\ 0 = -\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = -1 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Pi_2 = \frac{L}{h}}$$

$\Pi_3 = \mu\, h^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} v^{\gamma_3} \quad \rightarrow$ *sans dimension* $\Rightarrow \boxed{\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho v h}}$

⑥ *Formuler la relation entre les **3** produits Π trouvés :*

$$D = f(h, L, v, \mu, \rho) \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

avec $\Pi_1 = \dfrac{D}{\rho v^2 h^2} \qquad \Pi_2 = \dfrac{L}{h} \qquad \Pi_3 = \dfrac{\mu}{\rho v h}$

soit $\boxed{D = \rho v^2 h^2 \ \Phi(L/h, 1/Re)}$

nature de l'écoulement

facteur de forme

Illustration de l'intérêt de la méthode :

Si D_1 est la traînée mesurée sur une plaque de dimensions L_1 x h_1 quand elle est soumise à un écoulement de vitesse v_1, alors :

$$\frac{D_1}{\rho v_1^2 h_1^2} = \Phi(L_1/h_1, 1/Re_1) \quad \text{où} \quad Re_1 = \frac{\rho v_1 h_1}{\mu}$$

L'analyse dimensionnelle par le théorème de *Buckingham* permet d'en déduire que pour une plaque de dimensions L_2 x h_2 telles que :

$$\underbrace{\boxed{L_2/h_2 = L_1/h_1}}_{\text{similitude de forme}} \quad \text{si} \quad v_2 = \underbrace{\frac{h_1}{h_2}}_{\text{facteur d'échelle}} v_1 \Leftrightarrow v_1 h_1 = v_2 h_2 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{Re_1 = Re_2}}_{\text{similitude hydrodynamique}}$$

et donc $\Phi(L_1/h_1, 1/Re_1) = \Phi(L_2/h_2, 1/Re_2)$

$$\Rightarrow \frac{D_1}{\rho v_1^2 h_1^2} = \frac{D_2}{\rho v_2^2 h_2^2} \quad \Rightarrow D_2 = \frac{v_2^2 h_2^2}{v_1^2 h_1^2} D_1 \quad \Rightarrow \boxed{D_2 = D_1}$$

3 - Coefficients sans dimension usuels

Outre le nombre de *Reynolds* (pour le caractère turbulent ou laminaire d'un écoulement), il existe un certain nombre de grandeurs sans dimension qui peuvent caractériser la nature d'un écoulement :

Nombre de ***Reynolds*** $\quad Re = \dfrac{\rho v L}{\mu} \Rightarrow \dfrac{\textit{forces d'inertie}}{\textit{forces de viscosité}}$

↳ importance générale pour tout type d'écoulement.

Nombre de ***Froude*** : $\quad Fr = \dfrac{v}{\sqrt{gL}} \Rightarrow \dfrac{\textit{forces d'inertie}}{\textit{forces de gravité}}$

↳ importance pour les écoulements à surface libre.

Remarque : c'est la pesanteur qui est responsable de la forme de la surface libre : plus *Fr* est grand, moins la surface libre a d'effets sur l'écoulement, et inversement.

Nombre d'***Euler*** $\quad Eu = \dfrac{\Delta p}{\rho v^2} \Rightarrow \dfrac{\textit{forces de pression}}{\textit{forces d'inertie}}$

↳ importance s'il existe de grandes différences de pression au sein de l'écoulement.

Nombre de ***Mach*** $\quad Ma = \dfrac{v}{c} \Rightarrow \dfrac{\textit{forces d'inertie}}{\textit{forces de compressibilité}}$

↳ importance pour les écoulements de fluides compressibles.
Remarque : $c = 1/\sqrt{\rho \chi}$ est la vitesse du son.

Nombre de ***Strouhal*** $\quad St = \dfrac{\omega L}{v} \Rightarrow \dfrac{\textit{forces d'inertie locales}}{\textit{forces d'inertie convectives}}$

↳ importance pour les écoulements non stationnaires.

4 - Similitude dans les équations différentielles

Avant de procéder à l'analyse complète d'un écoulement, il convient tout d'abord de poser les hypothèses simplificatrices adéquates. L'évaluation des différents coefficients sans dimension relatifs à l'écoulement (*Reynolds*, *Froude*…) va en effet permettre de simplifier les équations à résoudre.

Voyons ce qu'il advient de la composante verticale (suivant z) de l'équation de *Navier-Stokes* :

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho g$$

Introduisons des variables sans dimension :

$$\begin{cases}u^*=u/V\\ v^*=v/V\\ w^*=w/V\end{cases}\qquad\begin{cases}x^*=x/L\\ y^*=y/L\\ z^*=z/L\end{cases}\qquad \begin{matrix}p^*=p/p_0\\ t^*=t/\tau\end{matrix}$$

où L, V, p_0, τ sont des grandeurs caractéristiques du système étudié.

Par extension, on a :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial}{\partial x^*}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial}{\partial y^*}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial}{\partial z^*}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}=\dfrac{1}{L^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^{*2}}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=\dfrac{1}{L^2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^{*2}}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}=\dfrac{1}{L^2}\dfrac{\partial^2}{\partial z^{*2}}\end{cases}\qquad\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t^*}$$

On obtient alors :

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho g$$

$$\frac{\rho V}{\tau}\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+\frac{\rho V^2}{L}\left(u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{p_0}{L}\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{\mu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\rho g$$

$$\frac{\rho V}{\tau}\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+\frac{\rho V^2}{L}\left(u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{p_0}{L}\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{\mu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\rho g$$

Divisons toute l'expression par $\dfrac{\rho V^2}{L}$:

$$\frac{L}{V\tau}\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}=-\frac{p_0}{\rho V^2}\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{\mu}{\rho VL}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{gL}{V^2}$$

$$St=\frac{\omega L}{V}=\frac{L}{V\tau}\qquad Eu=\frac{\Delta p}{\rho V^2}=\frac{p_0}{\rho V^2}\qquad Re=\frac{\rho VL}{\mu}\qquad Fr=\frac{V}{\sqrt{gL}}$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{St\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}=-Eu\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right)-\frac{1}{Fr^2}}$$

Ce qui peut s'interpréter comme suit :

- si ***St*** est très faible : on peut négliger la dérivée instantanée et l'écoulement pourra être considéré stationnaire.
- si ***Eu*** est très faible : on peut négliger le gradient de pression.
- si ***Re*** est très grand : on peut négliger la viscosité du fluide et l'assimilé à un fluide parfait.
- si ***Fr*** est très grand : on peut négliger les effets de la pesanteur.

5 - Application aux maquettes

L'analyse dimensionnelle, grâce notamment au théorème de *Buckingham*, permet de résumer le comportement d'un système à une relation entre un nombre restreint de grandeurs sans dimension.

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{k-r})$$

Pour des systèmes complexes la détermination de la fonction Φ n 'est accessible que par **mesures expérimentales**. Ainsi, lors de la mise au point d'un prototype, il est économiquement et pratiquement plus pertinent de procéder à ces **mesures sur un modèle réduit** : la maquette.

Il faut alors pouvoir transposer les résultats obtenus sur la maquette à ceux que l'on obtiendra sur le prototype :

On s'arrange donc pour respecter le maximum de similitudes entre la maquette et le prototype.

A titre d'illustration, reprenons l'exemple de la force de traînée exercée par un écoulement sur une plaque plane :

maquette *prototype*

$$\frac{D_m}{\rho_m v_m^2 h_m^2} = \Phi\left(\frac{L_m}{h_m}, \frac{\mu_m}{\rho_m v_m h_m}\right) \qquad \frac{D_p}{\rho_p v_p^2 h_p^2} = \Phi\left(\frac{L_p}{h_p}, \frac{\mu_p}{\rho_p v_p h_p}\right)$$

On commence alors par se fixer un facteur d'échelle : $\frac{L_m}{L_p} = \alpha = 1/25$

On respecte ensuite le facteur de forme : $\frac{L_m}{h_m} = \frac{L_p}{h_p}$

Si on utilise le même fluide, on a : $\rho_m = \rho_p$ et $\mu_m = \mu_p$

Et par conséquent, respecter la similitude de *Reynolds* revient à :

$$v_m h_m = v_p h_p \quad \Rightarrow \quad v_m = v_p \frac{h_p}{h_m} = v_p/\alpha$$

Dans ces conditions : $\frac{D_m}{\rho_m v_m^2 h_m^2} = \frac{D_p}{\rho_p v_p^2 h_p^2} \quad \Rightarrow \quad D_p = \left(\frac{v_p}{v_m}\right)^2 \left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2 D_m$

$$D_p = \underbrace{\left(\frac{v_p}{v_m}\right)^2}_{\alpha} \underbrace{\left(\frac{h_p}{h_m}\right)^2}_{1/\alpha} D_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_p = D_m}$$

Ce résultat, spécifique au problème étudié, montre que par un choix approprié de la vitesse, la mesure expérimentale de la traînée sur une maquette géométriquement semblable donne directement la traînée à laquelle on doit s'attendre sur le prototype.

En pratique, tout n'est pas si simple, dans la mesure où l'on ne peut souvent pas respecter simultanément toutes les similitudes.