## 1 . قابلية اشتقاق دالة:

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرّفة على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0$ .

**تعريف1:** نقول أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ إذا كانت للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية ( عدد حقيقي ثابت) عندما $x$ يؤول إلى $x_0$ . هذه النهاية تسمّى العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ ونرمز له بـ: $f'(x_0)$ ونكتب: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

وبوضع $x=x_0+h, h\neq 0$ نجد: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ .

**تعريف2:** نقول أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على المجال $I$ إذا كانت تقبل الاشتقاق عند كل عدد $x_0$ من $I$ . الدالة $x\mapsto f'(x)$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ ونرمز لها بـ: $f'$ أو $\frac{df}{dx}$ .

**أمثلة:**

1) الدالة المعرفة بـ: $f(x)=x^2$ قابلة للاشتقاق عند كل عدد $x_0$ من $\mathbb{R}$ لأنّ: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0$

وبالتالي نستنتج أن العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ هو $2x_0$ وتكون عبارة الدالة المشتقة $f'$ كما يلي: $f'(x)=2x$ .

2) الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=0$ لأنّ: $f(0)=1$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1-h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1-h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-h}=1$$

**تعريف3:**

من أجل $x>x_0$ نقول أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق من اليمين عند $x_0$ إذا كانت: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$

العدد الحقيقي $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق من اليمين للدالة $f$ عند $x_0$ .

من أجل $x<x_0$ نقول أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق من اليسار عند $x_0$ إذا كانت: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)\in\mathbb{R}$

العدد الحقيقي $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق من اليسار للدالة $f$ عند $x_0$ .

**ملاحظة:** $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ إذا وفقط إذا كان: $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)=f'(x_0)$

## 2 . التفسير الهندسي للعدد المشتق:

لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال مفتوح يشمل عدد $x_0$ ، العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هو معامل توجيه المستقيم الذي يشمل النقطتين من منحنى $f$ اللتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_0+h$ ، عندما $h\to 0$ فإن النقطتين تنطبقان و المستقيم يصبح مماسا للمنحنى و معامل التوجيه يؤول الى العدد المشتق، وبالتالي العدد المشتق هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ و معادلة المماس تكون: $y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$

## 3 . الاستمرار و قابلية الاشتقاق:

**نظرية:** كل دالة قابلة للاشتقاق عند عدد هي مستمرة عند هذا العدد و العكس غير صحيح.

**برهان:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق عند $x_0$ ، لإثبات أنّ $f$ مستمرة عند $x_0$ يكفي أن نثبت: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f(x_0)$$

والعكس غير صحيح مثلا الدالة $f: x\mapsto |x|$ مستمرة عند $x_0=0$ لكن غير قابلة للاشتقاق عند $0$ لأنّ:

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{x}{x}=1\neq f'_d(0)=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{-x}{x}=-1$$

## 4. الدوال القابلة للاشتقاق باستمرار:

**تعاريف:** لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة ، حيث $I$ مجال مفتوح و ليكن $n\geq 1$ عددا طبيعيا .

نقول أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق باستمرار على المجال $I$ أو من الصنف $C^1$ على المجال $I$ إذا كانت الدالة المشتقة $f'$ مستمرة على $I$ .

وبصفة عامة نقول أن الدالة من الصنف $C^n$ على المجال $I$ أو تقبل الاشتقاق باستمرار $n$ مرة على المجال $I$ إذا كانت المشتقات المتابعة $f^{(n)},....,f'',f'$ مستمرة على $I$ .

نقول أن الدالة $f$ من الصنف $C^0$ على المجال $I$ إذا كانت مستمرة على هذا المجال.

نقول أن الدالة $f$ من الصنف $C^\infty$ على المجال $I$ أو تقبل الاشتقاق باستمرار عدد غير منته من المرّات على المجال $I$ إذا كانت كلّ مشتقات الدالة $f$ موجودة على $I$ .

**ملاحظة:**

1) إذا كانت الدالة $f$ من الصنف $C^n$ فإنّها من الصنف $C^p$ من أجل $p\leq n$ .

2) إذا كانت الدالة $f$ من الصنف $C^\infty$ فإنّها من الصنف $C^n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ .

**أمثلة:**

1) دوال كثيرات الحدود و الدوال المثلثية ( sin و cos ) من الصنف $C^n(\mathbb{R})$ و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\geq 1:\ \cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})\ ,\ \sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

2) الدالة الأسّية exp من الصنف $C^\infty(\mathbb{R})$

## 5 . العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق:

♦ إذا كانت $f,g:I\to\mathbb{R}$ دالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح $I$ و $k\in\mathbb{R}$ فإنّ: $f\pm g$ ، $kf$ ، $f\times g$ و $f/g$ ( $g$ لا تنعدم على $I$ ) دوال تقبل الاشتقاق على $I$ و مشتقاتها معرفة كما يلي:

1) $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ 2) $(kf)'(x)=kf'(x)$ 3) $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4) إذا كان $g(x)\neq 0$ فإنّ: $(\frac{1}{g})'(x)=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$ , $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

- إذا كانت $f$ دالة تقبل للاشتقاق عند $x$ و $g$ دالة تقبل للاشتقاق عند $f(x)$ فإنّ الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق عند $x$ وعددها المشتق: $(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\times f'(x)$

- إذا كانت $f$ دالة تقبل للاشتقاق عند عدد $x$ حيث $f'(x)\neq 0$ فإن دالتها العكسية $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $y=f(x)$ وعددها المشتق: $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

مثال: الدالة $f(x)=\ln(x)$ تقبل الاشتقاق عند كل $x$ من $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$ وبالتالي دالتها العكسية $\exp$ تقبل الاشتقاق عند كل $y=f(x)$ من $\mathbb{R}$ ولدينا $(f^{-1})'(y)=\exp'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}=\frac{1}{f'[\exp(y)]}=\exp(y)$ .

## 6. المشتقات المتعاقبة و دستور ليبنيز:

**تعريف:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ و $f'$ دالتها المشتقة . إذا قبلت $f'$ بدورها الاشتقاق على المجال $I$ فإن مشتقة $f'$ تسمى المشتقة الثانية لـ $f$ و نرمز لها بـ: $f''$ . يمكن بالتراجع تعريف $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ .

**دستور ليبنيز Leibniz:**

إذا كانت $f,g: I\to\mathbb{R}$ دالتين معرفتين و قابلتين للاشتقاق $n$ مرة على مجال $I$ فإنّ الدالة المشتقة من الرتبة $n$ لجداء الدالتين $f$ و $g$ تعطى بالعلاقة التالية: $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\ f^{(k)}g^{(n-k)}$ حيث: $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

**مثال:** لنحسب المشتقة الثالثة للدالة $h$ حيث: $h(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ . نضع $h(x)=f(x).g(x)$ حيث: $f(x)=\sin(x)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$

لدينا $h'''(x)=(fg)'''(x)=\sum_{k=0}^{k=3}C_k^3\ f^{(k)}(x)g^{(3-k)}(x)=f(x)g'''(x)+f'(x)g''(x)+f''(x)g'(x)+f'''(x)g(x)$

من جهة أخرى لدينا : $f(x)=\sin(x),\ f'(x)=\cos(x),\ f''(x)=-\sin(x),\ f'''(x)=-\cos(x)$

$g(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=\frac{-1}{x^2}, g''(x)=\frac{2}{x^3}, g'''(x)=\frac{-6}{x^4}$ ومنه يكون: $h'''(x)=-\frac{6\sin(x)}{x^4}+\frac{2\cos(x)}{x^3}+\frac{\sin(x)}{x^2}-\frac{\cos(x)}{x}$ .

## 7. نظريات التزايدات المنتهية وتطبيقاتها:

**نظرية رول Roll:** إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال مغلق و محدود $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ حيث: $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد على الأقل $c\in]a,b[$ يحقق: $f'(c)=0$ .

**برهان:** بما أنّ $f$ مستمرة على مجال متراص(مغلق و محدود) $[a,b]$ فهي محدودة و تدرك حديها حسب نظرية فايرستراش إذا يوجد عددين $\alpha$ و $\beta$ من $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ و $f(\beta)=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$ . لنناقش الحالتين التاليتين:

- إذا كان: $f(\alpha)=f(\beta)$ فإنّ $f$ ثابتة و يكون $\forall x\in[a,b]: f(x)=f(\alpha)$ يمكن أن نأخذ $c$ أي عدد من المجال $]a,b[$ .

♦ إذا كان: $f(\alpha) > f(\beta)$ فلا بدّ أن يكون $\alpha \in ]a,b[$ أو $\beta \in ]a,b[$ لأنّ: $f(a) = f(b)$ .

ففي حالة $\alpha \in ]a,b[$ يحقق العدد $\alpha = c$ المطلوب لأنّ: $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq 0$ $x \in ]a,\alpha[ \Rightarrow$ و منه $f'(\alpha) = f'_g(\alpha) \leq 0$

وكذلك $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0$ $x \in ]\alpha,b[ \Rightarrow$ و منه $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) \geq 0$ نستنتج أنّ $f'(\alpha) = 0$ .

بأسلوب مماثل نجد أنّ $\beta \in ]a,b[$ يقتضي $f'(\beta) = 0$ . وبذلك يتم إثبات النظرية.

**مثال:** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $[a,b] = [-1,1]$ لدينا $f$ مستمرة على $[-1,1]$ و قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و $\forall x \in ]-1,1[, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

حسب النظرية $\forall c \in ]-1,1[, f'(c) = 0$ يمكن التأكد أنّ: $c = 0$ .

**نظرية لاغرانج Lagrange:**( التزايدات المنتهية) إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإنه يوجد على الأقل $c \in ]a,b[$ يحقق: $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ .

**برهان:** الدالة $g$ المعرّفة على $[a,b]$ كما يلي: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ تحقق شروط نظرية رول وبالتالي فإنه يوجد على الأقل $c \in ]a,b[$ يحقق: $g'(c) = 0$ أي $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ .

**ملاحظة:** لهذه النظرية عدّة تطبيقات منها 1) تعيين حصر عبارة 2) إثبات بعض المتراجحات .

**نظرية كوشي Cauchy:**( التزايدات المنتهية المعمّمة) إذا كانت $f$ و $g$ دالتين مستمرتين على مجال متراص $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a,b[$ و $g'$ لا تنعدم على $]a,b[$ فإنّه يوجد على الأقل $c \in ]a,b[$ يحقق: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**برهان:** $g'$ لا تنعدم على $]a,b[$ و بالتالي: $g(a) \neq g(b)$ . نعتبر الدالة $h$ المعرفة كما يلي: $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$

يمكن التحقق أنّ: $h(a) = h(b)$ ، الدالة $h$ تحقق كل شروط نظرية رول، إذا يوجد على الأقل $c \in ]a,b[$ يحقق: $h'(c) = 0$ . ومنه يكون:

$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$ و بالتالي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**مثال:** لنثبت أنه إذا كان $0 < a < b$ فإنّ: $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} \leq \frac{3}{2}\sqrt[6]{b}$ .

نضع : $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ و $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ بتطبيق النظرية على المجال $[a,b]$ فإنّه يوجد على الأقل عددا $c$ من $]a,b[$ بحيث $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ أي $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} = \frac{2c^{2/3}}{3c^{1/2}} = \frac{2}{3}c^{1/6} \leq \frac{2}{3}\sqrt[6]{b}$

**اتجاه تغير دالة:** إذا كانت $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال $I$ فإنّ:

الدالة $f$ متزايدة ( متزايدة تماما) على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\ \ (f'(x) > 0)$

الدالة $f$ متناقصة ( متناقصة تماما) على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0\ \ (f'(x) < 0)$

الدالة $f$ ثابتة على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان: $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$

**8. قاعدة لوبيتال L'Hôpital:** إذا كانت $f$ و $g$ دالتين معرفتين ومستمرتين على مجال $I$ يشمل عدد $x_0$ وقابلتين للاشتقاق على $I-\{x_0\}$ وتحققان $f(x_0)=g(x_0)=0$ و إذا كان $\forall x \in I-\{x_0\},\ g'(x)\neq 0$ فإنّ: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

**البرهان:** $f$ و $g$ مستمرتان على المجال $[x_0,x]$ ($[x,x_0]$) و تقبلان الاشتقاق على المجال $]x_0,x[$ ($]x,x_0[$) والدالة المشتقة $g'$ لا تنعدم على المجال $]x_0,x[$ ($]x,x_0[$) حسب نظرية كوشي. $\exists c(x)\in]x_0,x[(]x,x_0[):\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$

وبما أنّ: $f(x_0)=g(x_0)=0$ فإنّ: $\exists c(x)\in]x_0,x[(]x,x_0[):\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$

لدينا $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=l$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

**ملاحظة:** تبقى القاعدة صحيحة في حالة $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$

**مثال:** لنحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2}=0$

**مثال:** لنحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ لدينا: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x})^2=\dfrac{1}{3}(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sin 3x}{\sin x})^2=\dfrac{1}{3}(9)=3$

## I. الدوال العكسية للدوال المثلثية:

**1. الدالة arcsin :** الدالة $f:[\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]\to[-1,1]$ المعرّفة بـ: $f(x)=\sin x$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $(\forall x\in]\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}[: f'(x)=\cos x>0)$ فهي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:[-1,1]\to[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تسمى قوس الجيب و نرمز لها بـ: arcsin وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1,+1]$ ونكتب:

$$(y=\arcsin(x),\forall x\in[-1,+1])\Leftrightarrow(x=\sin(y),\forall y\in[\tfrac{-\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}])$$

$$\forall x\in]-1,+1[,\ \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**2. الدالة arccos :** الدالة $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ المعرّفة بـ: $f(x)=\cos x$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0,\pi]$ $(\forall x\in]0,\pi[: f'(x)=-\sin x<0)$ فهي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ رمز لها بـ: arccos وهي مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-1,+1]$ ونكتب:

$$(y=\arccos(x),\forall x\in[-1,+1])\Leftrightarrow(x=\cos(y),\forall y\in[0,\pi])$$

ولدينا $\forall x\in]-1,+1[,\ \arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

**خاصية:** $\forall x\in[-1,+1],\ \arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

**برهان:** نضع: $a=\arcsin(x),\ b=\arccos(x)$ لدينا $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

لدينا $f^{-1}of(x)=x$ و بالتالي: $\sin(a+b)=x^2+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}=1\ldots(1)$

كذلك $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ لدينا $f^{-1}of(x)=x$ نجد أنّ:

$\cos(a+b)=x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2}=0\ldots(2)$ . من (1) و(2) نجد $a+b=\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

**3. الدالة arctg :** الدالة tg مستمرة و متزايدة تماما على $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ و تأخذ قيمها على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى قوس الظل و نرمز لها بـ: arctg ونكتب: $(y=\operatorname{arctg}x,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(x=\operatorname{tg}y,\forall y\in]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[)$ والدالة $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ مستمرة ، متزايدة تماما وفردية ولدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{arctg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

## II. الدوال الزائدية:

**تعاريف:** نسمّي الجيب الزائدي sh ، جيب التمام الزائدي ch ، الظل الزائدي th و ظل التمام الزائدي coth الدّوال المعرّفة على الترتيب بالعلاقات التّالية: $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ، $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ، $\operatorname{th}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ ، $\operatorname{coth}(x)=\frac{1}{\operatorname{th}(x)}$

**نتائج:**

1) $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=e^{x}$ (2 $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)=e^{-x}$ (3 $\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)=\mathrm{ch}(2x)$

4) $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$ (5 $\mathrm{th}(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (6 $\coth(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

**خواص:**

1) الدالتان sh و ch معرفتان ومستمرتان وقابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x), \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$

2) الدالة ch زوجية ، موجبة تماما على $\mathbb{R}$ ، متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و لدينا:

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ch}(x)=\mathrm{ch}(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$ وبالتالي نستنتج أنّ الدالة ch تقابل من $\mathbb{R}_+$ في $[1,+\infty[$

3) الدالة sh فردية و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$ وبالتالي نستنتج أنّ الدالة sh تقابل من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ .

4) الدالة th فردية ، مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}=1-\mathrm{th}^2(x)$ و بالتالي متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{th}(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)=+1$ ومنه نستنتج أنّ الدالة th تقابل من $\mathbb{R}$ في $]-1,+1[$ .

## III. الدوال العكسية للدوال الزائدية:

**1. الدالة argsh:** الدالة $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة الجيب الزائدي و نرمز لها بـ: argsh ونكتب: $(y=\mathrm{argsh}\,x,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(x=\mathrm{sh}\,y,\forall y\in\mathbb{R})$ و الدالة $\mathrm{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة، متزايدة تماما و فردية و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ . ولدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

**2. الدالة argch:** الدالة $\mathrm{ch}:[0,+\infty[\to[1,+\infty[$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة جيب التمام الزائدي و نرمز لها بـ: argsh ونكتب: $(y=\mathrm{argch}(x),\forall x\geq 1)\Leftrightarrow(x=\mathrm{ch}(y),\forall y\geq 0)$

و الدالة $\mathrm{argch}:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ مستمرة، متزايدة تماما و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\geq 1,\ \mathrm{argch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

ولدينا $\forall x>1,\ \mathrm{argch}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

**3. الدالة argth:** الدالة $\mathrm{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى عمدة الظل الزائدي نرمز لها بـ: argth ونكتب: $(y=\mathrm{argth}(x),\forall x\in]-1,+1[)\Leftrightarrow(x=\mathrm{th}(y),\forall y\in\mathbb{R})$ و الدالة $\mathrm{argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ مستمرة، متزايدة تماما و فردية و يمكن التأكد أنّ: $\forall x\in]-1,+1[,\ \mathrm{argth}\,x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

ولدينا $\forall x\in]-1,+1[,\ \mathrm{argth}'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

| مقياس: تحليل 1 | جـــامعة الـوادي | قسم الرياضيات |
|---|---|---|
| 2022/2021 | كلية العلوم الدقيقة | سنة أولـــىMI |

## سلسلة أعمال موجّهة 4 (قابلية اشتقاق الدوال العددية)

**تمرين1:** ادرس إذا كانت الدوال التالية قابلة للاشتقاق ومن الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 3) $h(x)=\sqrt{|x-3|}$

**تمرين2*:** ادرس إذا كانت الدوال التالية قابلة للاشتقاق ومن الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=|x|+x^2$ 2) $g(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\geq 1\\ 0, & |x|<1\end{cases}$ 3) $h(x)=\begin{cases} x^2\ln x^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

**تمرين3:** ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين ونعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\leq 0\\ \frac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}$

1. عيّن الشرط الذي يحققه العددان $a$ و $b$ حتّى تكون $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
2. عيّن الشرط الذي يحققه العددان $a$ و $b$ حتّى تكون $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وفي هذه الحالة أحسب $f'(x)$ .

**تمرين4:** لتكن $f$ دالة معرّفة كما يلي: $\forall x\in\mathbb{R}^*: f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\ f(0)=0$

1. اثبت أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leq|x|$ واستنتج أنّ $f$ مستمرة عند $x_0=0$.
2. اثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $k$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا.
3. احسب $f_d'(0)$ و $f_g'(0)$ . هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟.

**تمرين5*:** لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي: $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]: f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$

1. ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق $f$ عند 0 على اليمين. 2. حدّد الدالة المشتقة للدالة $f$ .
3. بيّن أنّ: $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]: f(x)\leq\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$

**تمرين6:** احسب في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة $f$ :

1) $f(x)=\frac{x^4}{1+x^4}$ 2) $f(x)=\tan\sqrt{1-x^2}$ 3) $f(x)=\ln|x-e^x\tan x|$ 4) $f(x)=\sqrt{1+(x\cos x)^2}$

**تمرين7:** 1. احسب في كل الحالات الآتية المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$

1) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ 2) $f(x)=\sin x\cos x$ 3*) $f(x)=e^x\cos x$ 4*) $f(x)=x^2(1-x)^n$ 5) $f(x)=x^{n-1}\ln x$

**تمرين8*:** لتكن $f$ دالة مستمرة على المجال $[0,1]$ وتقبل الاشتقاق على $]0,1]$ حيث: $f'(0)=f(1)$ و $f(0)=0$ .

نعرّف الدالة $g$ على المجال $[0,1]$ كما يلي: $\forall x\in]0,1]: g(x)=\frac{f(x)}{x},\ g(0)=f(1)$

اثبت أنّ: $\exists c\in]0,1[: f'(c)=\frac{f(c)}{c}$

**تمرين9:** 1. باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، اثبت أنّ: $\forall x>0: \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$

2. احسب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln(x))$ و $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))$

3. استنتج أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 4. احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

**تمرين10:** احسب النهايات التالية باستعمال قاعدة لوبيتال:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^3}{x^3-1}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$ 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$

**تمرين11*:** لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة بـ: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ .

1. بيّن أنّ $f$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+$.
2. نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: g(x)=xf^{-1}(x)$ .

أ) بيّن أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$ . ب) استنتج أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: g'(x)=x$ . ج) استنتج عبارة: $f^{-1}(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}_+^*$

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

| مقياس: تحليل1 | جـــــامعة الــوادي | قسم الرياضيات |
|---|---|---|
| 2022/2021 | كلية العلوم الدقيقة | سنة أولـــىMI |

## حل سلسلة أعمال موجّهة 4 (قابلية اشتقاق الدوال العددية)

**حل تمرين1:** دراسة إذا كانت الدوال التالية قابلة للاشتقاق ومن الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$:

1) $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. لندرس قابلية اشتقاق $f$ عند $0$.

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*: \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}$ و $\forall x\in\mathbb{R}^*: 0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ وبما أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ حسب نظرية الحصر

نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ إذا $f$ تقبل الاشتقاق عند $0$ وبالتالي $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ويكون: $\forall x\in\mathbb{R}^*: f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ و $f'(0)=0$

- الدالة $f'$ مستمرّة على $\mathbb{R}^*$. لندرس استمرارية $f'$ عند $0$.

الدالة $x\mapsto\cos\frac{1}{x}$ لا تقبل نهاية عند $0$. البرهان لتكن المتتاليتان: $s_n=\frac{1}{2n\pi}$ و $t_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ نهايتهما تؤولان إلى $0$ بينما

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n\pi)=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n+1)\pi=-1$ وبالتالي الدالة $f$ لا تقبل نهاية عند $0$).

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ غير موجودة وبالتالي الدالة $f'$ غير مستمرة عند $0$ إذا الدالة $f$ ليست من الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$:

2) $$g(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

- الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. لندرس قابلية اشتقاق $g$ عند $0$.

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*: \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=x^2\sin\frac{1}{x}$ و $\forall x\in\mathbb{R}^*: -x^2\le x\sin\frac{1}{x}g\le x^2$ وبما أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ حسب نظرية

الحصر نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ إذا $g$ تقبل الاشتقاق عند $0$ وبالتالي الدالة $g$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ويكون: $\forall x\in\mathbb{R}^*: g'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$ و $f'(0)=0$

- الدالة $g'$ مستمرّة على $\mathbb{R}^*$. لندرس استمرارية $g'$ عند $0$.باستعمال الحصر نثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=0=g'(0)$

وبالتالي الدالة $g'$ مستمرة عند $0$ إذا الدالة $g$ من الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$.

3) $h(x)=\sqrt{|x-3|}$

- الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty,3[$ و $]3,+\infty[$ لندرس قابلية اشتقاق $h$ عند $3$.

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\frac{1}{\sqrt{x-3}}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}\frac{\sqrt{3-x}}{x-3}=-\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\frac{1}{\sqrt{3-x}}=-\infty$

ومنه $h$ لا تقبل الاشتقاق عند $0$ وبالتالي لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وحتما ليست من الصنف $C^1$ على $\mathbb{R}$.

**حل تمرين3:** ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين ونعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ كما يلي: $$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 0\\ \frac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}$$

1. تعيين الشرط الذي يحققه العددان $a$ و $b$ حتّى تكون $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

الدالة $f$ مستمرّة على $\mathbb{R}^*$. لنعين $a$ و $b$ حتّى تكون $f$ مستمرة عند $0$. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}(ax+b)=b=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{1+x}=1$

ومنه حتىّ تكون $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون $a\in\mathbb{R}$ و $b=1$

2. تعيين الشرط الذي يحققه العددان $a$ و $b$ حتّى تكون $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. من السؤال السابق لدينا $b=1$ بقي تعيين $a$ حتّى تكون قابلة اشتقاق $f$ عند $0$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{ax+1-1}{x-0} = a = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-1\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-x}{x(1+x)} = -1$

ومنه حتّى تكون $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون $a=-1$ و $b=1$

**حل تمرين4:** لتكن $f$ دالة معرّفة كما يلي: $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \ f(0)=0$

1. اثبات أنّ: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le |x|$ واستنتاج أنّ $f$ مستمرة عند $x_0=0$.

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| = \frac{|x|}{1+e^{\frac{1}{x}}} \le \frac{|x|}{1} = |x|$ ومن أجل $x=0$ لدينا $f(0)=0\le 0$ ومنه $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le |x|$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \le f(x) \le |x|$ وبما أنّ $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ومنه $f$ مستمرة عند $x_0=0$.

2. إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $k$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا.

الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$ ولدينا $k \in ]-\infty,+\infty[$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$ من أجل $x>0$ لدينا $f'(x)>0$

ومن أجل $x<0$ يمكن التأكد بدراسة تغيرات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ أنّ: $-1 < \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} < 0$ ويكون $f'(x)>0$

ومنه الدالة $f$ متزايدة على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ولدينا $f(0)=0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا.

3. حساب $f'_d(0)$ و $f'_g(0)$ . هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟.

$$f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad \text{و} \quad f'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

ومنه الدالة $f$ لا تقبل الاشتقاق عند 0وبالتالي $f$ لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

**حل تمرين6:** حساب في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة $f$ :

$$1)\ f'(x) = \frac{4x^3(1+x^4) - x^4(4x^3)}{(1+x^4)^2} = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$2)\ f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(1+\tan^2(\sqrt{1-x^2})\right)$$

$$3)\ f'(x) = \frac{1-e^x\tan x - e^x(1+\tan^2(x))}{|x-e^x\tan x|} = \frac{1-e^x(\tan^2(x)+\tan x+1)}{|x-e^x\tan x|}$$

$$4)\ f(x) = \frac{1+2(\cos x - x\sin x)(x\cos x)}{2\sqrt{1+(x\cos x)^2}} = \frac{1+2x\cos^2(x) - x^2\sin 2x}{2\sqrt{1+(x\cos x)^2}}$$

**حل تمرين7:** حساب المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) لدينا $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$ ويكون $f^{(n)}(x)\frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$

2) $f(x) = \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ ويكون $f^{(n)}(x) = \frac{2^n}{2}\sin(2x+n\frac{\pi}{2}) = 2^{n-1}\sin(2x+n\frac{\pi}{2})$

5) $f(x) = x^{n-1}\ln x$ نستعمل دستور ليبنيز ، نضع $g(x)=x^{n-1}$ و $h(x)=\ln x$

ولدينا $g^{(n)}(x)=0$, $\forall k\le n-1,\ g^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}$ كذلك $\forall k\ge 1,\ h^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$

وبالتالي:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)\ =C_n^0 g^{(0)}(x)h^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{k=n-1}C_n^k\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}\ (-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}$$

$$=x^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}\sum_{k=1}^{k=n-1}C_n^k(-1)^k$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{k=n-1}C_n^k(-1)^k=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}\left((-1+1)^n-(-1)^n\right)$$

$$=\frac{(n-1)!}{x}$$

تذكير: دستور ثنائي الحد لنيوتن: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k a^k b^{n-k}, n\in\mathbb{N}^*$ حالات خاصة:

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k \qquad 2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k$$

**حل تمرين9:**

1. اثبات أنّ: $\forall x>0:\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$

من أجل $x>0$ الدالة $f:t\mapsto\ln(t)$ مستمرة على المجال $[x,x+1]$ وقابلة للاشتقاق على $]x,x+1[$

ولدينا $\forall t\in]x,x+1[:f'(t)=\frac{1}{t}$ وحسب مبرهنة التزايدات المنتهية $\exists c\in]x,x+1[:f(x+1)-f(x+1)=f'(c)(x+1-x)$

أي $\exists c\in]x,x+1[:\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$. لدينا $x<c<x+1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ .ومنه

$$\forall x>0:\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$$

2. حساب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln(x))$ و $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))$

لدينا $\forall x>0:\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$ ومنه $\frac{\sqrt{x}}{x+1}<\sqrt{x}\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{\sqrt{x}}{x}$ وبما أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

حسب نظرية الحصر يكون $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\ln(x+1)-\ln(x))=0$

كذلك لدينا $\frac{x}{x+1}<x\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{x}{x}$ وبما أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))=1$

3. استنتاج أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 4. حساب $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)\right)=\exp(1)=e$$

من أجل $x>1$ بطريقة مشابهة للسؤال الأول يمكن أن نثبت أنّ: $\forall x>1:\frac{1}{x}<\ln(x)-\ln(x-1)<\frac{1}{x-1}$

ونستنتج كذلك أنّ $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x-1)-\ln(x))=-1$ ومنه يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\left(\ln(x-1)-\ln(x)\right)\right)=\exp(-1)=\frac{1}{e}$$

**حل تمرين10:** احسب النهايات التالية باستعمال قاعدة لوبيتال:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^3}{x^3-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{27e^{3x}}{6}=\frac{9}{2}$$

$$2)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\sin x^2}{3x^2\sin x+x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x^2}{3x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-4x\cos x^2}{3\sin x+3x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4x\cos x^2}{3\sin x+5x\cos x-x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-4\cos x^2+8x^2\sin x^2}{3\cos x+5\cos x-5x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$3)\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2+\cos x}=\frac{0}{2}=0$$

$$4)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(\sin(y+\frac{\pi}{2}))}{4y^2}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(\cos(y))}{4y^2}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{-\sin y}{\cos y}}{8y}$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{-\sin y}{8y\cos y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{-\cos y}{8\cos y-8y\sin y}\right)=-\frac{1}{8}$$

| قسم الرياضيات | جامعة الوادي | مقياس: تحليل1 |
|---|---|---|
| سنة أولى MI | كلية العلوم الدقيقة | 2022/2021 |

سلسلة الأعمال الموجّهة 05 (الدّوال الأولية)

**تمرين1:** عيّن مجموعة تعريف الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ *2) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$ 3) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ 4) $f(x)=\operatorname{arcsh}\sqrt{x^2-x}$

**تمرين2:** أحسب ما يلي:

1) $\arcsin(\sin\dfrac{7\pi}{3})$ 2) $\arcsin(\cos\dfrac{104\pi}{4})$ 3) $\sin(\arcsin(\dfrac{1}{2})-\dfrac{\pi}{2})$ 4) $\tan(\arccos(\dfrac{\sqrt{3}}{2})\text{-}\arcsin(-1))$

**تمرين3*:**

1) اثبت أنّ: $0<\arccos(\dfrac{3}{4})<\dfrac{\pi}{4}$

2) حل المعادلة: $\arccos x=2\arccos\dfrac{3}{4}$

**تمرين4:**

1) أثبت أنّ: $\forall x\in]0,\dfrac{\pi}{2}[:\sin(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}},\cos(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

2) اثبت أنّ: $0<\arctan\dfrac{3}{4}+\arctan\dfrac{5}{12}<\dfrac{\pi}{2}$

2) حل المعادلة: $\arccos x=\arctan\dfrac{3}{4}+\arctan\dfrac{5}{12}$

**تمرين5:** أثبت صحة العبارات التالية:

1) $\forall x\in[-1,+1]:\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi$

*2) $\forall x\in[-1,+1]:\cos(\arcsin x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

*3) $\forall(a,x)\in\mathbb{R}^2:\arctan(a)+\arctan(x)=\arctan\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right),\ ax\neq 1$

**تمرين6*:** ليكن $a$ و $b$ عددين حقيقيين موجبين حيث $a<b$

1. اثبت أنّ: $\dfrac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{b-a}{1+a^2}$
2. استنتج أنّ: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{25}<\arctan\dfrac{4}{3}<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{6}$

**تمرين7:** نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $I=]-1,0[\cup]0,1[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x}\arcsin(x^2)$ .

1. اثبت أنّ $f$ مستمرة على $I$.
2. احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. ثمّ استنتج أنّ $f$ تقبل التمديد بالاستمرار عند 0.
3. لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $J=]-1,1[$ كما يلي: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\arcsin(x^2), & x\in J/\{0\}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$
4. ادرس قابلية اشتقاق $g$ على $J$ ثمّ احسب $g'$.
5. هل الدالة $g'$ مستمرة عند 0.

**تمرين8*:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة بما يلي: $f(x)=x\arcsin\sqrt{1-x^2}$ .

1. أ. عيّن $D$ مجموعة تعريف $f$. ب. ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند 0.
2. حدّد الدّالة المشتقة $f'$ للدّالة $f$.
3. أ. ادرس تغيرات الدّالة $f$. ب. استنتج أنّ: $\exists!\alpha\in]0,1[,f'(\alpha)=0$

**تمرين9*:** لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x)=2\operatorname{argch}\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}$ .

1. اثبت أنّ $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
2. ادرس قابلية اشتقاق $f$ واحسب $f'$ من أجل $x\in\mathbb{R}^*$.
3. استنتج عبارة مبسّطة للدالة $f$.
4. حدّد جدول تغيرات الدّالة $f$

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

حل سلسلة أعمال موجّهة رقم 05 ( الدّوال الأولية )

حل ت1:

1) الدالة $f$ معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\frac{x+1}{2}\in[-1,1]$.

لدينا: $-1\le\frac{x+1}{2}\le 1\Rightarrow -2\le x+1\le 2\Rightarrow -3\le x\le 1$ إذا $D_f=[-3,1]$.

3) الدالة $f$ معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\frac{x-1}{x+2}\in\mathbb{R}$. أي $x\neq -2$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$.

4) الدالة $f$ معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\sqrt{x^2-x}\in\mathbb{R}$ أي $x^2-x\ge 0$ وبالتالي $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

حل ت2:

حساب ما يلي:

$$1)\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{3}\right)=\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)\right)=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\arcsin\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$2)\arcsin\left(\cos\frac{104\pi}{4}\right)=\arcsin\left(\cos 26\pi\right)+\arcsin\left(\cos(2\times 13\pi)\right)+\arcsin\left(\cos(0)\right)=\arcsin\left(1\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$3)\sin\left(\text{arsin}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4)\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\text{-}\arcsin(\text{-}1)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\text{-}\left(\text{-}\frac{\pi}{2}\right)\right)=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3}{\sqrt{3}}$$

حل تمرين4:

1) اثبات أنّ: $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[:\sin(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}},\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

لدينا $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2 x\Rightarrow\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

ويمكن أن نستنتج $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\sin x=\tan x\times\cos x=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

2) اثبات أنّ: $0<\arctan\frac{3}{4}+\arctan\frac{5}{12}<\frac{\pi}{2}$. نضع $a=\arctan\frac{3}{4}$ و $b=\arctan\frac{5}{12}$

يكفي أن نثبت أنّ $0<\cos(a+b)<1$

لدينا

$$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 b}}-\frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}}\frac{\tan b}{\sqrt{1+\tan^2 b}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}-\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}\\&=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{12}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{13}=\frac{3}{13}\left(\frac{16}{5}-1\right)=\frac{48}{65}\Rightarrow 0<\cos(a+b)<1\end{aligned}$$

ومنه $0<\arctan\frac{3}{4}+\arctan\frac{5}{12}<\frac{\pi}{2}$

2) حل المعادلة: $\arccos x = \arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{5}{12}$

المعادلة معرّفة جيدا لأنّ $\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{5}{12} \in [0, \pi]$

ويكون لدينا $x = \cos\left(\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{5}{12}\right) = \frac{48}{65}$

حل ت5:

لدينا $\arccos : [-1, +1] \to [0, \pi]$

1) نضع $\arccos(x) = a$, $\arccos(-x) = b$ ونبرهن أنّ: $a + b = \pi$.

لدينا $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos a \cos b - \sqrt{1-\cos^2 a}\sqrt{1-\cos^2 b}$ وبما أنّ: $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x$

فإنّ: $\cos(a+b) = -x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = -x^2 - (1-x^2) = -1$ و $(a+b) \in [0, \pi]$ إذا: $a + b = \pi$.

حل ت7: نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $I = ]-1,0[ \cup ]0,1[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{x}\arcsin(x^2)$.

1. اثبات أنّ $f$ مستمرة على $I$.

الدالة $f$ مستمرة على $I$ لأنها مركب وحاصل قسمة دوالا مستمرة على $I$.

2. حساب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

لحساب النهاية نستخدم قاعدة لوبيتال $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{1} = 0$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ الدالة $f$ تقبل التمديد بالاستمرار عند $0$.

3. لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $J = ]-1,1[$ كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\arcsin(x^2), & x \in J / \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

4. دراسة قابلية اشتقاق $g$ على $J$ ثمّ حساب $g'$.

الدالة $g$ تقبل الاشتقاق على المجالين $]-1,0[$ و $]0,1[$. لندرس قابلية اشتقاق $g$ عند $0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = 1.$$

ونستنتج أنّ $g'(0) = 1$ وبالتالي $g$ تقبل الاشتقاق عند $0$. إذا $g$ تقبل الاشتقاق على $J$ و $g'(x) = -\frac{1}{x^2}\arcsin(x^2) + \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$

5. هل الدالة $g'$ مستمرة عند $0$.

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{\arcsin(x^2)}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}\right) = \lim\limits_{x \to 0}(-1+2) = 1 = g'(0)$

وبالتالي $g'$ مستمرة عند $0$.