Cours 1
Les erreurs et l'arrondissement

Considérons les nombres suivants:
$\sqrt{2} = 1.41421356237310........$, $\pi = 3.14159265358979........$, $\frac{11}{13} = 0.846153846153 85........$
chaque nombre possède une série infinie de chiffres. Alors, comme il est impossible de représenter ces nombres par la machine, dans ce cas on a le besoin de la troncature et on ne conserve qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.
Pour $x = \frac{11}{13}$, on pose $x_1^* = 0.84615$, $x_2^* = 0.8461538$, $x_3^* = 0.8561$. Les x_1^*, x_2^* et x_3^* sont des valeurs approchées à x.
On a :
$x_1^* < x$, on dit que x_1^* est une valeur approchée à x par défaut.
$x_3^* > x$, on dit que x_3^* est une valeur approchée à x par excès.

1. Les erreurs

1.1 L'erreur absolue et l'erreur relative

Définition 1.1. Soit x un nombre réel et x^* une valeur approchée à x, on appelle l'erreur absolue de x^* sur x, la quantité $\triangle x = |x - x^*|$.
Exemple: Pour $x = \frac{11}{13}$
$\triangle x_1 = |x - x_1^*| = \left|\frac{11}{13} - 0.84615\right| = 3.8461 \times 10^{-6}$, $\triangle x_2 = |x - x_2^*| = \left|\frac{11}{13} - 0.8461538\right| = 4.615 \times 10^{-8}$, $\triangle x_3 = |x - x_3^*| = \left|\frac{11}{13} - 0.8561\right| = 9.946 \times 10^{-3}$.
On trouve que $\triangle x_2 < \triangle x_1 < \triangle x_3$. Dans ce cas, x_2^* est plus précise que x_1^* et x_3^*.
Définition 1.2. Soit x un nombre réel et x^* une valeur approchée à x, on appelle l'erreur relative à x^*, la quantité $E_r = \frac{\triangle x}{|x|} = \frac{|x - x^*|}{|x|}$. En général, E_r s'exprime en pourcentage.
Exemple: Pour $x = \frac{11}{13}$
$E_{r_1} = \frac{\triangle x_1}{|x|} = \frac{3.8461 \times 10^{-6}}{\left|\frac{11}{13}\right|} = 4.5454 \times 10^{-6} = 4.5454 \times 10^{-4}\ \%$, $E_{r_2} = \frac{\triangle x_2}{|x|} = \frac{4.615 \times 10^{-8}}{\left|\frac{11}{13}\right|} = 5.4541 \times 10^{-8} = 5.4541 \times 10^{-6}\ \%$.

1.2 Représentation décimale d'un nombre réel

Tout nombre réel x peut être exprimé sous la forme:

$$x = \pm\left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + ...\right),\ n \in \mathbb{N}$$

où tous les chiffres $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ avec $a_n \neq 0$.
Exemple: $x = 315,014$
$x = 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$.

1.3 Chiffres significatifs d'un nombre approché

Soit x un nombre réel représenté comme suit:

$$x = \pm\left(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + ...\right),\ n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0.$$

Alors, toute valeur approchée à x est obtenue en faisant une troncature de la forme:

$$x = \pm \left(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_0 10^0 + a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + ... + a_{-m}10^{-m}\right), \ m \in \mathbb{N}.$$

Exemple:
1. Pour $x = \pi = 3.14159265358979........$, la valeur $x^* = 3.14159265$ est une valeur approchée à x.
2. Pour $x = 13.012568479$, la valeur $x^* = 13.0125$ est une valeur approchée à x.
Définition 1.3. On appelle chiffre significatif d'une valeur approchée noté (c.s), tout chiffre de cette valeur est soumis aux règles suivantes:
1. Tous les chiffres différents de zéro sont significatifs.
2.Tous les zéros se trouvent entre deux (02) chiffres significatifs et ne sont pas situés directement après la virgule sont significatifs.
3. Tous les zéros se trouvent avant la virgule sont significatifs.
4. Toute chaîne des zéros se trouvent directement après la virgule et il n'y a pas des chiffres après ces zéros sont significatifs.
5. Toute chaîne des zéros se trouvent directement après la virgule et après le dernier chiffre non nul sont significatifs.
Exemple: Pour $x_1^* = \underline{1020}, 00\underline{30200}$ (Tous les chiffres soulignés sont significatifs).
$x_2^* = \underline{23{,}00}$ (Tous les chiffres soulignés sont significatifs).
Définition 1.4. On appelle chiffre significatif exact d'une valeur approchée noté (c.s.e), tout chiffre significatif de cette valeur est soumis aux règles suivantes:
1. Le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif après la virgule est exact si: $\triangle x \leq 0.5 \times 10^{-n}$.
2. Le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif avant la virgule est exact si: $\triangle x \leq 0.5 \times 10^{n-1}$.
Exemple: Pour $x = \frac{7}{23} = 0.30434782608696........$, $x^* = 0.30434782$
$\triangle x = |x - x^*| = 6.08 \times 10^{-9} = 0.608 \times 10^{-8} > 0.5 \times 10^{-8}$, alors le $8^{\text{ième}}$ chiffre significatif qui est 2 n'est pas exact.
$\triangle x = 0.608 \times 10^{-8} = 0.0608 \times 10^{-7} \leq 0.5 \times 10^{-7} < 0.5 \times 10^{-6} < 0.5 \times 10^{-5} < 0.5 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{0}$, alors tous les chiffres sauf le chiffre 2 sont exacts.

2. L'arrondissement d'un nombre réel

L'un de méthodes de rapprocher un nombre réel x par une valeur approximative x^* est la troncature avec l'arrondissement.
Règles d'arrondissement
Pour arrondir un nombre réel jusqu'à n chiffres après la virgule, on utilise les règles suivantes:
1. Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est > 5, on ajoute 1 au $n^{\text{ième}}$ chiffre.
2. Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est < 5, le $n^{\text{ième}}$ chiffre reste inchangé.
3. Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre est 5, alors deux cas sont possibles:
- Tous les chiffres situés après le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre sont des zéros, le $n^{\text{ième}}$ chiffre reste inchangé s'il est pair et on lui ajoute 1 s'il est impair.
- Parmi les chiffres situés après le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre, il existe au moins un qui soit non nul, on ajoute 1 au $n^{\text{ième}}$ chiffre.
Exemple:

1. $x = 1.0234\underline{6}89$, arrondir à (04) chiffres après la virgule. Comme le $5^{\text{ième}}$ chiffre est > 5, alors $x^* = 1.0235$.
2. $x = 1.023\underline{4}689$, arrondir à (03) chiffres après la virgule. Comme le $4^{\text{ième}}$ chiffre est < 5, alors $x^* = 1.023$.
3. $x = 12.346\underline{5}9$, arrondir à (03) chiffres après la virgule. Comme le $4^{\text{ième}}$ chiffre est 5 et $9 \neq 0$, alors $x^* = 12.347$.
4. $x = 0.2547\underline{5}00$, arrondir à (04) chiffres après la virgule. Comme le $5^{\text{ième}}$ chiffre est 5 et tous les chiffres situés après 5 sont des zéros et 7 est impair, alors $x^* = 0.2548$
5. $x = 0.2542\underline{5}00$, arrondir à (04) chiffres après la virgule. Comme le $5^{\text{ième}}$ chiffre est 5 et tous les chiffres situés après 5 sont des zéros et 2 est pair, alors $x^* = 0.2542$.