التمرين الأول: (1) (a) $\sum_{n\geq 2}\frac{2n^2+3}{n^4-5}$ . بما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^4-5}\div\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4+3n^2}{n^4-5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4}{n^4}=2$$

اذا للسلسلتين $\sum_{n\geq 2}\frac{2n^2+3}{n^4-5}$ و $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ نفس الطبيعة (1,5) حسب معيار التكافؤ وبما أن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة لأن $(\alpha=2>1)$

اذا $\sum_{n\geq 2}\frac{2n^2+3}{n^4-5}$ متقاربة.

(b) $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}$ نضع $u_n=\frac{3^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$$

(1,5) حسب معيار دالامبير فالسلسلة العددية $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}$ متقاربة

(c) نلاحظ أن: $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{3n^2+5n+6}{n^2-2n+3}\right)=\ln 3\neq 0$ ومنه فالسلسلة

(1,5) $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{3n^2+5n+6}{n^2-2n+3}\right)$ متباعدة (لأن شرط اللزوم غير محقق)

(d) $\sum_{n\geq 3}\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)$ . نلاحظ أن جميع الحدود موجبة لأن

$0<\frac{\pi}{n\sqrt{n}}<\frac{\pi}{2}$ $(n\geq 3)$ .

(1,5) من جهة أخرى نعلم أن $\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)<\frac{\pi}{n\sqrt{n}}=\frac{\pi}{n^{3/2}}$ وأن:

السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ متقاربة (سلسلة ريمان $\alpha=\frac{3}{2}>1$)

اذا حسب معيار المقارنة فإن $\sum_{n\geq 3}\sin\left(\frac{\pi}{n\sqrt{n}}\right)$ متقاربة.

(2) لدينا $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(-1)^n}=(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ سلسلة متناوبة

وبما أن المتتالية: $(u_n)$ حيث $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$

(1,5) موجبة لأن $\left(\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n\right)$ ومتناقصة تماما لأن

$u_{n+1}-u_n=\left[\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)\right]-\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]=$

$$=\sqrt{n^2+2n+2}-\left(\sqrt{n^2+1}+1\right)=\frac{2\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}+1}<0$$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$ ومتقاربة نحو 0 ؛ لأن

اذا حسب لايبنتز فالسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ متقاربة

. $|u_n|=\sqrt{n^2+1}-n$ أي يمكن كتابتها:

$$|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}|u_n|\div\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

(1) ومنه $\sum|u_n|$ متباعدة لأن $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة.

حسب معيار التكافؤ. ومنه $\sum u_n$ ليست متقاربة مطلقا.

التمرين 2: (1)

$$S_n=\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^p+\frac{\sqrt{p+1}}{2^{p+1}}-\frac{\sqrt{p}}{2^p}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^p+\sum_{p=0}^{n}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{p+1}}{2^{p+1}}}_{a_{p+1}}-\underbrace{\frac{\sqrt{p}}{2^p}}_{a_p}\right)$$

(2)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}+\left(-\frac{\sqrt{0}}{2^0}\right)+\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{3}+\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$ (0,5)

ومنه $\sum(\quad)$ متقاربة ونحو $\frac{1}{3}$

(0,5) لأن: $-1<-\frac{1}{2}<1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

(و) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}\cdot e^{-(n+1)\ln 2}=0$