جامعة الوادي كلية العلوم الدقيقة

السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي 2022/2021 السلسلة الرابعة

ت1 :

ليكن الكمون $E_p = 2x^2 - xy + yz$

أوجد عبارة القوة $\vec{F}$ في جملة الاحداثيات الكارتيزية .

هل القوة مشتقة من كمون. X

ت2 :

تنتقل جسيمة مادية كتلتها m تحت تأثير القوة التالية: $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ من النقطة $A(1,2,-1)$ إلى النقطة $D(2,4,-2)$

أحسب عمل القوة $\vec{F}$ وفق كل مسلك من المسالك التالية:

1- المستقيم AD

2- الخط المنكسر ABCD حيث $B(2,2,-1)$ و $C(2,4,-1)$

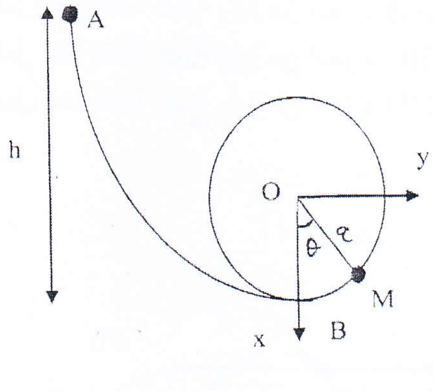
3- المنحني المعرف بالمعادلات الوسيطية التالية: $(x = t, y = t^2, z = t)$ علما أن النقطة المادية انطلقت من A في اللحظة $(t_A = 0)$ وتصل إلى النقطة D في اللحظة $(t_D = 2s)$. ما طبيعة القوة $\vec{F}$

ت3 :

تترك كرية كتلتها m من دون سرعة ابتدائية عند نقطة A توجد على ارتفاع h من سكة موجهة وضعيتها شاقولية وتنتهي بمسار دائري نصف قطره a ، حركة الكرية تتم من دون سرعة إبتدائية.

1- أحسب السرعة v_B عند النقطة B تم في نقطة كيفية M من الجزء الدائري معلمة بالزاوية θ

2- أوجد قوة رد فعل السكة في نقطة M من الجزء الدائري الموجه.



حل السلسلة رقم 04

ت 01:

$$\vec F = -\vec{grad}\, E_p$$

1 -

$$\vec F = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec i + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec j + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec k\right)$$

$$= F_x \vec i + F_y \vec j + F_z \vec k$$

بالمطابقة نجد:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow F_x = -(4x-y)$$

$$\boxed{F_x = y - 4x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Rightarrow F_y = -(-x+z)$$

$$\boxed{F_y = x - z}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \Rightarrow \boxed{F_z = -y}$$

$$\boxed{\vec F = (y-4x)\vec i + (x-z)\vec j - y\vec k}$$

2 -

$$\vec\nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y-4x) & (x-z) & -y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-y) - \frac{\partial}{\partial z}(x-z)\right)\vec i - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial z}(y-4x)\right)\vec j + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-z) - \frac{\partial}{\partial y}(y-4x)\right)\vec k$$

$$= \vec 0$$

$$\vec\nabla \times \vec F = \vec 0$$

يعني أن $\vec F$ مشتقة من كمون.

ت 02:

$$W_{A-D} = \int \vec F \cdot d\vec l$$

نحسب معادلة المستقيم الذي يمر من النقطتين: $A(1,2,-1)$ و $D(2,4,-2)$ نجد:

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y - y_A}{y_D - y_A} = \frac{z - z_A}{z_D - z_A}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{-2+1}$$

$$x - 1 = \frac{y}{2} - 1 = -z - 1$$

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{y}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x} \\ \frac{y}{2} - 1 = -z - 1 \Rightarrow \boxed{y = -2z} \end{cases}$$

$$x - 1 = -z - 1 \Rightarrow \boxed{z = -x}$$

$$\begin{cases} dx = dz \\ dy = 2dx \end{cases}$$

$$W_{A-D} = \int \vec F \cdot d\vec l =$$

$$\int \left((x^2+y^2)\vec i + xz\vec j + xy\vec k\right) \cdot \left(dx\vec i + dy\vec j + dz\vec k\right)$$

$$= \int (x^2+y^2)\,dx + \int xz\,dy + \int xy\,dz$$

$$= \int (x^2 + 4x^2)\,dx - \int x^2 \cdot 2dx - \int x \cdot 2x\,\boxed{dx}$$

$$= \int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{3}\,J$$

$$\boxed{W_{A-D} = \frac{7}{3}\,J}$$

$\vec{dl} = dz\,\vec{k}$

$\vec{F} = 20\vec{i} + 2z\vec{j} + 8\vec{k}$

$$W_{C-D} = \int_{-1}^{-2} 8\,dz = -8$$

$$\boxed{W_{C-D} = -8\ J}$$

$$W_{ABCD} = \frac{19}{3} - 4 - 8$$

$$W_{A-B-C-D} = -5,67\ J$$

:المسار - Δ

$x = t \Rightarrow dx = dt$

$y = t^2 \Rightarrow dy = 2t\,dt$

$z = t \Rightarrow dz = dt$

$\vec{F} = (t^2 + t^4)\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$

$\vec{dl} = dt\,\vec{i} + 2t\,dt\,\vec{j} + dt\,\vec{k}$

$$W = \int \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$W = \int_0^2 (t^4 + 3t^3 + t^2)\,dt$$

$$\boxed{W = 21,06\ J}$$

القوة $\vec{F}$ هي قوة غير محافظة

لأن عملها مرتبط بالمسلك المتبع.

$W_{ABCD} = W_{A-B} + W_{B-C} + W_{C-D}$.

$$W_{A-B} = \int \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

يعني عمل من $A \longrightarrow B$ كي:

$A\ (1,2,-1) \longrightarrow B\ (2,2,-1)$

$y = 2$

$z = -1$

$\vec{F} = (x^2+4)\vec{i} - x\vec{j} + 2x\vec{k}$

$dl = dx\,\vec{i}$

$$W_{A-B} = \int_1^2 (x^2+4)\,\vec{i} = \frac{19}{3}\ J$$

$$\boxed{W_{A-B} = \frac{19}{3}\ J}$$

$W_{B-C} = \int \vec{F}\cdot\vec{dl}$; $B\ (2,2,-1) \longrightarrow C\ (2,4,-1)$

$x = 2$

$z = -1$

$\vec{dl} = dy\,\vec{j}$

$\vec{F} = (4+y^2)\vec{i} - 2\vec{j} + 2y\vec{k}$

$$W_{B-C} = \int_2^4 -2\,dy = -4\ J$$

$$\boxed{W_{B-C} = -4\ J}$$

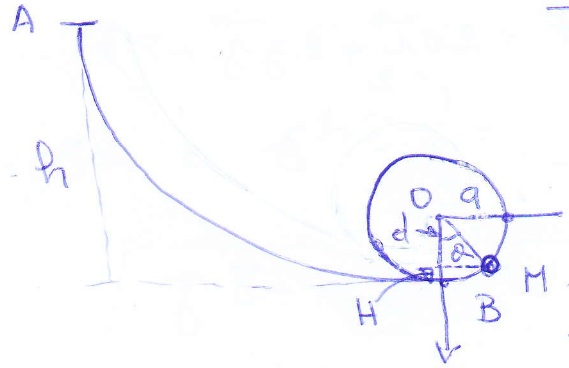
$$W_{C-D} = \int \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$C\ (2,4,-1) \longrightarrow D\ (2,4,-2)$.

$x = 2$

$y = 4$

ت 03 :



1/ -

تطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة بين A و B: $\Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M(A) = E_M(B)$

$$E_M(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0 + mgh$$

$$E_M(B) = E_c(B) + E_p(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$$

$$E_M(B) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_M(A) = E_M(B)$$

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

- نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة بين B و M نجد:

$$E_M(M) = E_M(B)$$

$$E_M(M) = E_c(M) + E_p(M) = \frac{1}{2} m v_M^2 + mgH$$

نحسب H:

$$H = OB - Od = a - a\cos\theta$$

$$H = a(1-\cos\theta)$$

$$E_M(M) = \frac{1}{2} m v_M^2 + mga(1-\cos\theta)$$

$$E_M(M) = E_M(B)$$

$$\frac{1}{2} m v_M^2 + mga(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\boxed{v_M = \sqrt{2g\left(h - a(1-\cos\theta)\right)}}$$

2/ -

وجدنا سابقا أن:

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v_M^2}{a}$$

نعوض v_M نجد:

$$\boxed{N = mg\left(3\cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right)}$$