**Suite du cours 2**

**Exemple:** Utiliser la méthode de décomposition en $LU$ pour résoudre le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On utilise la méthode de Gauss pour obtenir $U$ et $L$,

$$\overset{(1)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \rightarrow \overset{(2)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}} \rightarrow \overset{(3)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}},$$

donc,

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \ \forall i, \ k, \ \ l_{i,k} = \frac{\overset{(k)}{a_{i,k}}}{\overset{(k)}{a_{k,k}}},$$

d'où $l_{2,1} = \frac{\overset{(1)}{a_{2,1}}}{\overset{(1)}{a_{1,1}}} = \frac{4}{2} = 2$, $l_{3,1} = \frac{\overset{(1)}{a_{3,1}}}{\overset{(1)}{a_{1,1}}} = \frac{-2}{2} = -1$, $l_{3,2} = \frac{\overset{(2)}{a_{3,2}}}{\overset{(2)}{a_{2,2}}} = \frac{6}{-2} = -3$. On obtient alors,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

ensuite: $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. (on peut faire une vérification de cette égalité).

Maintenant, on résoud le système $LY = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$y_1 = 5$, $y_2 = -7$, $y_3 = -15$.

on résoud aussi le système $UX = Y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix},$$

d'où $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

**Cours 3**
**Méthodes indirectes (itératives) de résolution les systèmes linéaires**

**Définition 2.2.** Une méthode est dite indirecte ou itérative, si elle donne une suite des solutions approchées et la solution exacte est la limite de cette suite.
En général, on utilise ces méthodes lorsque ($n \geq 100$). Dans ce cours, on va étudier la méthode de **Jacobi**.
<u>Le principe de la méthode de Jacobi:</u>
<u>Le système $AX = B$ est équivalent à</u>

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{cases}.$$

Supposons que $\forall i = 1, ..., n$, $a_{i,i} \neq 0$, alors le système précédent est équivalent aussi à

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{b_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{2,2}} - \frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}x_1 - \frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}x_3 - \ldots - \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}}x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{n,n}} - \frac{a_{n,1}}{a_{n,n}}x_1 - \frac{a_{n,2}}{a_{n,n}}x_2 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}}x_{n-1} \end{cases},$$

ou $\forall i = 1, ..., n$, $x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{j \neq i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j$.
Donc, Le système $AX = B$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \ldots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

où $\forall i = 1, ..., n$, $\alpha(i,i) = 0$, et $\forall j \neq i$, $\alpha(i,j) = -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$, et $\forall i = 1, ..., n$, $\beta_i = \frac{b_i}{a_{i,i}}$.
Alors, cette égalité est équivalente à

$$X = \alpha X + \beta.$$

<u>**Formule récursive de Jacobi**</u>
On prend $X^{(0)}$ comme un vecteur quelconque des valeurs initiales, et on définit une suite des vecteurs comme suit:

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si la suite $\left(X^{(k)}\right)_k$ converge, alors on

$$X = \lim_{k \to +\infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim_{k \to +\infty} X^{(k)} + \beta = \alpha X + \beta.$$

**Théorème 2.1.** La suite $\left(X^{(k)}\right)_k$ est convergente indépendamment du choix du vecteur initial $X^{(0)}$ si et seulement si $\rho(\alpha) < 1$ où $\rho(\alpha) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$ , $\lambda_i$ est une valeur propre de $\alpha$.
( Dans matlab on utilise la commande **norm**($\alpha$) pour calculer $\rho(\alpha)$ ).

**Le critère d'arrêt d'algorithme de Jacobi**

Soit $X$ la solution exacte du système précédent, alors

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|}{1 - \|\alpha\|},$$

donc pour obtenir une solution approchée du système avec une précision donnée $E$, il suffit d'arrêter jusqu'à l'itération $k$ telle que:

$$\frac{\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|}{1 - \|\alpha\|} \leq E.$$

Concernant la norme $\|.\|$ , il y a des différents types de définition, par exemple:
$\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ , $\|X\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|X\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ , et pour les matrices on définit
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$ , $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ ,

- Si on utilise la norme $\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_1$ , alors on utilise $\|\alpha\|_1$ . Dans ce cas on obtient une approximation de $X$ au sens de $\|.\|_1$ .
- Si on utilise la norme $\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_2$ , alors on utilise $\|\alpha\|_F$ . Dans ce cas on obtient une approximation de $X$ au sens de $\|.\|_2$ .
- Si on utilise la norme $\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_\infty$ , alors on utilise $\|\alpha\|_\infty$ . Dans ce cas on obtient une approximation de $X$ au sens de $\|.\|_\infty$ .