اختصارجوردانلمصفوفة

اختصار جوردان لمصفوفة /هو البحث عن اساس لكي نستطيع كتابة المصفوفة الى مصفوفة قطرية باطارات من الشكل التالي

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0\dots\dots.. & \dots\dots. & \dots & \dots. & 0 \\ 0 & A_2 & 0\dots\dots. & \dots\dots. & \dots & \dots. & 0 \\ . & .. & \dots\dots\dots. & \dots\dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots. & \dots\dots.. & 0 & A_n & \end{pmatrix}$$

حيث تكون كل مصفوفة A_i من الشكل

$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0\dots\dots\dots\dots.0 \\ 0 & \lambda & 1 \quad 0\dots\dots\dots..0 \\ 0 & 0 & \lambda \quad 1 \quad 0\dots\dots\dots..0 \\ . & & . \qquad\qquad . \\ 0 & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\lambda \end{pmatrix}$$ حيث λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A_i

من اجل ايجاد هذا الاختصار نتبع الخطوات التالية .

1) حساب كثير الحدود المميز .

2) نوجد القيم الذاتية

3) نشكل السلسلة المتداخلة التالية حسب كل قيمة ذاتية لنواة ونحسب كل مرة بعد النواة

$$\ker(A-\lambda I) \subsetneq \ker(A-\lambda I)^2 \subsetneq \ker(A-\lambda I)^3 \subsetneq \cdots\dots\dots. \subsetneq \ker(A-\lambda I)^r.$$

حيث r عبارة عن اس القيمة الذاتية λ.

حتى نحصل على اساس المرفق بالفضاء الشعاعي الجزئي E_λ المرفق بالقيمة الذاتية λ. حيث r مضاعفات القيمة λ

$$\begin{cases} v_r = u \\ v_{r-1=(A-\lambda I)}\ u \\ v_{r-2} = (A-\lambda I)^2 u \\ \quad\vdots \\ \quad . \\ \quad . \\ v_2 = (A-\lambda I)^{r-2} u \\ v_1 = (A-\lambda I)^r u \end{cases}$$

$$E_\lambda = \{v_1, v_2 \dots\dots\dots\dots . v_r\}$$

ونتبع هذه الطريقة حتى نحصل على كل الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية للمصفوفة .

ميثال تطبيقي

لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^3 = 0 \implies \lambda = 2$$

$\lambda = 2$ جذر ثلاثي نوجد ثلاثة اشعة مكونة لاساس مصفوفة جوردان (لان المصفوفة غير قابلة للتقطير دراسة سابقة)

ناخذ /

$$\begin{cases} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (على الطالب حساب قيمة P^{-1})

مماسبق نجد ان /

$$J = P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

استعمالات مختصر جوردان في حل المعادلات التفاضلية وايجاد الحد العام للمتتاليات التراجعية .

اسية مصفوفة

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{k!} A^k \ , t = 1 \implies e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

$e^{At} = P^{-1} e^{jt} P$

Université HmmaLakhder D'Eoued
Institut sciences exacte
Série d'exercice N^0 1 A année univers 2020/2021.

الدرس خاص بمصفوفة اختصار جوردان

1) $e^{At} = \left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\right)$ المصفوفة قطرية(1

2)λ$e^{Jt} = \left(\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ \cdots\cdots. & & \ddots & \cdots.\vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \quad e^{\lambda t} \end{bmatrix}\right)$ مصفوفة اختصار جوردان لمصفوفة ذات قيمة وحيدة (2

3) اذا كان مصفوفة اختصار جوردان تكتب على شكل عدة اطارات فان /

$$e^{Jt} = \left(\begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \ldots. & 0 \\ \cdots\cdots. & \ddots & \cdots.\vdots \\ 0 & \cdots & 0 \quad e^{A_n t} \end{bmatrix}\right)$$

تطبيقات تستعمل هذه المصفوفات في حلول معادلات تفاضلية .

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(t)}{dt} = AZ, \; Z_0 \in \mathbb{R}^n \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

والحل يعطى بالشكل $\forall t \in \mathbb{R}, \; Z(t) = e^{At} Z_0$

التمرين 1)) لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) اوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A .

2) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A .

3) اثنت ان المصفوفة غير قابلة للتقطير

4) اوجد مصفوفة اختصار جوردان للمصفوفة A .

التمرين2) اوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

$$y'' + y''' - 2y' + y = 0$$

التمرين 3) اوجد حل لمسالة كوشي التالية

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

Université HmmaLakhder D'Eoued
Institut sciences exacte
Série d'exercice N^0 1 A année univers 2020/2021.

الدرس خاص بمصفوفة اختصار جوردان

.