الفصل الثاني
التكامل المعمم(الموسع)

في المستويات السابقة تم دراسة تكامل الدوال المستمرة على مجال مغلق و محدود (متراص) أي مثل $[a,b]$ حيث a,b عددان حقيقيان، أما في هذا المقياس فسندرس التكاملات على مجالات غير متراصة أي المجالات من الشكل $[a,+\infty[$ ، $]a,+\infty[$ ، $]-\infty,b]$ ، $]-\infty,b[$ ، $]-\infty,+\infty[$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ ، $]a,b[$ و يسمى أي تكامل على المجالات السابقة بالتكامل المعمم أو الموسع وهناك من المراجع من يسمي هذا التكامل بالمعتل للإشارة المراجع المعتمدة في هذا الفصل $[4]$ ، $[14-13]$ ، $[16]$

يمكن تقسيم هذا الفصل وفق المجالات السابقة

1-2- التكامل على مجال غير محدود

حالة المجال $[a,+\infty[$

تعريف(1.1.2): ليكن f تابعا معرفا على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابل للمكاملة على كل مجال محدود ومغلق $[a,x]\subset I$ ، $x>0$ و بالتالي الدالة F حيث $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ معرفة على I

- إذا كانت F تقبل نهاية محدودة l عندما $x\to+\infty$ نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب نحو l
- وإذا كانت F لا تقبل نهاية محدودة l عندما $x\to+\infty$ نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ أنه متباعد.

ملاحظة(1.1.2): ليكن $\lambda\in\Re^*$ التكاملين $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ، $\int_a^{+\infty}\lambda f(t)dt$ من نفس طبيعة.

مثال(1.1.2): أدرس طبيعة التكامل $\int_a^{+\infty} dt/t^k$ ، حيث (a>0،k>0)

الحل: نعلم بأن الدالة $t\to 1/t^k$ معرفة ومستمرة على كل مجال $[a,x]\subset I$ و بالتالي

1) في حالة $k\neq 1$

$$F(x)=\int_a^x dt/t^k=\frac{1}{k-1}\left[a^{1-k}-x^{1-k}\right]$$ و بالتالي

إذا كان $k<1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ أي متباعدة و إذا كان $k>1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=a^{1-k}/(k-1)$ أي متقاربة

تكامل الدوال (التوابع)الموجبة:

نظرية(1.1.2): اذا كانت f دالة موجبة على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابلة للمكاملة على المجال $[a,x]\subset I$ فإن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متقاربا إذا وفقط إذا كان $\int_a^{x} f(t)dt$ محدودا من الأعلى.

البرهان: بما أن $f\geq 0$ فإن الدالة $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt$ متزايدة وبالتالي فإن نهايتها لما $x\to+\infty$ محدودة إذا وفقط إذا كانت F محدودة من الأعلى أي

$\exists M>0, \forall x\in[a,+\infty[: F(x)\leq M$ ، ومنه $\int_a^{+\infty} f(t)dt<+\infty$

أما إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ يكون التكامل متباعد أي $\int_a^{+\infty} f(t)dt=+\infty$.

نظرية(2.1.2): إذا كان من أجل كل $t\geq a$ ، $0\leq f(t)\leq g(t)$. لدينا

- إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ متقاربا فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب
- و إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متباعدا فان التكامل $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ متباعد.

البرهان: الدالتان g, f موجبتان و مستمرتين على $I=[a,+\infty[$ و تحققان $\forall t\in I, 0\leq f(t)\leq g(t)$ ، كذلك قابلتين للمكاملة على كل مجال $[a,x]\subset I$ ، $x>a$

نعرف الدالتين $F(x)=\int_a^{x} f(t)dt$ ، $G(x)=\int_a^{x} f(t)dt$ واضح أن

$\forall t\in]a,x[, (G-F)'(t)\geq 0$ ومنه الدالة $G-F$ متزايدة و بالتالي $F(x)\leq G(x)$

إذا كانت $G(x)$ تنتهي إلى نهاية l عندما $x\to+\infty$ فإن $F(x)\leq G(x)\leq l$ ومنه نستنتج أن الدالة F محدودة و بالتالي فهي نهاية منتهية.

نتيجة(1.1.2): لتكن f دالة معرفة و موجبة على المجال $I=[a,+\infty[$ و قابلة للمكاملة على المجال $[a,x]\subset I$ ، إذا وجد $r\in IR$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r f(x)=l$

- إذا كان $r>1$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متقاربا،

- و إذا كان $r\le 1$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متباعدا.

مثال(2.1.2): لتكن f دالة لمتغير حقيقي حيث $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}$ ، المعرفة و المستمرة على $]1,+\infty[$ و القابلة للمكاملة على المتراص $[1,x]\subset[1,+\infty[$ من أجل $r>1$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} x^r f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{r-1/2}}{\sqrt{1+e^x}}=0$ وبالتالي حسب النتيجة(1.2) التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متقارب.

نتيجة(2.1.2): لتكن f ، g دالتين موجبتين معرفتين و مستمرتين على $I=[a,+\infty[$ و قابلتين للمكاملة على $[a,x]\subset[a,+\infty[$

- 1) اذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)=l$ ، $l\ne\infty$ ، $l\ne 0$ فإن التكاملين $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ، $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ من نفس الطبيعة

- 2) اذا كان $l=0$ فان تقارب $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ يؤدي الى تقارب $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

- 3) اذا كان $l=\infty$ فان تباعد $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يؤدي الى تباعد $\int_a^{+\infty} g(t)dt$.

مثال(3.1.2): حقق النتيجة السابقة على الدوال التالية: $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ ،

$$T(x)=x^2e^x \quad ، \quad k(x)=\frac{e^x}{x} \quad \text{عندما} \quad x\to+\infty$$

ملاحظة(2.1.2): اذا اردنا أن نقسم تكامل متقارب الى مجموع تكاملين يجب التأكد من أن كل منهما متقارب.

مثال(4.1.2): لدينا التكامل $\int_{x}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt$ متقارب لان $\frac{2}{t^2-1}$ يكافئ في جوار ألانهاية $\frac{1}{t^2}$

(انظر مثال(1.1.2))، لكن لا يمكن كتابة $\int_{x}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt = \int_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t-1} - \int_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t+1}$ لان كلاهما متباعد.

حالة المجال $]-\infty,b]$:

ليكن f تابع معرف على $]-\infty,b]$ و قابل للمكاملة على $[x,b],(x<b)$

اذا كان $F(x)=\int_{x}^{b} f(t)dt$ يقبل نهاية محدودة l عندما $x \to -\infty$ فإن $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ متقارب نحو l، في حالة $a=b$ و اذا كان $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ ، $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ متقاربين فإن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ الناتج عن مجموعهما متقارب.

مثال(5.1.2): التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ موجود (متقارب) لان $\forall x \in \Re, \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2+1}$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ تكامل دالة زوجية و بما أن التكامل $\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}$ متقارب و بالتالي التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2+1}dt$ متقارب

2-2- التكامل على مجال محدود غير متراص:

نظرية(1.2.2): ليكن f تابعا معرفا على المجال $J=[a,b[,a<b$ و قابل للمكاملة على كل مجال محدود ومغلق(متراص) $[a,x] \subset J$ ، $a<x<b$ و الدالة F حيث $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ معرفة على J

- اذا كان $F(x)$ يقبل نهاية محدودة l' عندما $x \to b$ نقول أن $\int_{a}^{b} f(t)dt$ موجود وهو متقارب نحو l'

- اذا كان $F(x)$ لا يقبل نهاية منتهية عندما $x \to b$ نقول أن $\int_a^b f(t)dt$ متباعد

مثال(1.2.2): ادرس طبيعة التكامل $\int_{-1}^{0} t^2 \ln|t|dt$

الحل: ليكن $]-1,0[\,\supset [-1,x]$ و بالتالي $\int_{-1}^{x} t^2 \ln|t|dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln|t|\right]_{-1}^{x} - \frac{1}{3}\int_{-1}^{x} t^2 dt$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

واضح أن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3}{3}\ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{9}$ ومنه نستنتج أن متقارب.

تكامل التوابع الموجبة:

نظرية(2.2.2): ليكن f تابعا موجبا معرفا على المجال $J = [a,b[, a < b$ و قابل للمكاملة على كل متراص $[a,x] \subset J$ ، $b > x > a$ ، يكون التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متقاربا اذا و فقط إذا كان محدودا من الاعلى. أي $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[\to \int_a^x f(t)dt \le M$

البرهان: بما أن $f \ge 0$ فإن الدالة $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ متزايدة وبالتالي النهاية لما $x \to b$ محدودة إذا وفقط إذا كانت F محدودة من الأعلى أي $\int_a^b f(t)dt < +\infty$ أما إذا كانت $\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$ يكون التكامل متباعد أي $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

نظرية(3.2.2): اذا كان $\forall t \in [a,b[, 0 \le f(t) \le g(t)$

و اذا كان $\int_a^x g(t)dt$ متقاربا عندما $x \to b$ يكون $\int_a^x f(t)dt$ متقاربا عندما $x \to b$

أما اذا كان $\int_a^x f(t)dt$ متباعدا عندما $x \to b$ يكون $\int_a^x g(t)dt$ متباعدا عندما $x \to b$.

نتيجة(1.2.2): لتكن f تابعا معرفا و موجبا على المجال $J=[a,b[$ و قابلة للمكاملة على المجال $[a,x]\subset J$، إذا وجد $r\in IR$ بحيث $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^r f(x)=l'$

- إذا كان $r<1$، و l' منتهي فان التكامل $\int_a^b f(t)dt$ يكون متقاربا،

و إذا كان و $l'=0$ فان التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ يكون متباعدا.

ملاحظة(1.2.2): كل النظريات المدرجة على المجال $[a,b[$ صحيحة على المجال $]a,b]$ و كذلك النتيجة (2.2.2) بحيث $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^r f(x)=l''$.

مثال(2.2.2): ادرس تقارب التكامل $\int_0^1 dt\big/\sqrt{t(1+e^t)}$

لاحظ أن التابع $f(t)=1\big/\sqrt{t(1+e^t)}$ معرف، موجب و مستمر على $]0,1]$ و قابل للمكاملة على المتراص $[x,1]\subset]0,1]$ وهو غير محدود لأن $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0} f(t)=+\infty$، لكن $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0} t^{1/2}f(t)=1\big/\sqrt{2}$ أي $r=1/2<1$ و بالتالي حسب النتيجة (1.2.2) و الملاحظة (1.2.2) التكامل المعطى متقارب.

ملاحظة(2.2.2): لدراسة التكامل المعمم غالبا ما نستعمل المقارنة مع تكامل من النمط التالي:

1) $\int_a^{+\infty} dt/t^r$ $(a>0)$ الذي هو متقارب اذا كان $r<1$ و متباعد اذا كان $r\geq 1$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ الذي هو متقارب اذا كان $\alpha>0$ و متباعد اذا كان $\alpha\leq 0$

3) $\int_a^b dt/(t-a)^r$ الذي هو متقارب اذا كان $r<1$ و متباعد اذا كان $r\geq 1$

4) $\int_a^b \ln(t-a)dt$ الذي هو متقارب.

نظرية(4.2.2): **معيار كوشي**

1) يكون التكامل $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, A > 0 : \forall x_1, x_2 > A \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

2) يكون التكامل $\int_{a}^{b} f(t)dt$ متقارب اذا و فقط اذا تحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a,b[; \forall x_1, x_2 \in [x_0,b[\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

البرهان: يكفي تطبيق وجود النهاية عندما x تنتهي إلى b

2-3- التكامل المتقارب مطلقا:

ندرس التكامل المعمم $\int_{a}^{b} f(t)dt$ بحيث يمكن ($a = -\infty, b = +\infty$) عندما لا يكون للتابع f اشارة ثابتة في مجال المكاملة

مثال(1.3.2): لاحظ التكامل $\int_{a}^{+\infty} k(t)\cos t dt$ حيث $k(t)$ تابع موجب، لا يمكن دراسة طبيعته مباشرة لان التابع $k(t)\cos t$ ليست لديه اشارة ثابتة في المجال $]a,+\infty[$.

تعريف(1.3.2): نقول عن التكامل $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ أنه متقاربا مطلقا اذا كان التكامل $\int_{a}^{+\infty} |f(t)|dt$ متقاربا.

نظرية(1.3.2): اذا كان التكامل $\int_{a}^{+\infty} |f(t)|dt$ متقارب فإن التكامل $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ متقارب.

البرهان: لدينا f تابعا معرفا و مستمرا على المجال $I = [a,+\infty[$, و قابل للمكاملة على كل متراص $[a, x_0] \subset I$ ، $x_0 > a$ ، و بما أن $\int_{a}^{+\infty} |f(t)|dt$ متقارب حسب معيار كوشي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 / x_0 > a, \forall x_1, x_2 \in [x_0,+\infty[\rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| < \varepsilon$$ و بما أن

$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$ و منه التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ متقارب حسب معيار كوشي.

نتيجة(1.3.2): اذا كان من اجل كل x ، من مجال المكاملة $|f(x)| \le g(x)$ و كان تكامل التابع الموجب g متقاربا فإن تكامل التابع f متقارب.

مثال(2.3.2): التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ موجود (متقارب) لان $\forall x \in [1,+\infty[, \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$

لكن التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ غير موجود (متباعد) لأن $\frac{|\sin x|}{x^2}$ يكافئ $\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$.

2-4- التكامل المتقارب شرطيا:

تعريف(1.4.2): نقول عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ أنه متقارب شرطيا اذا كان متقاربا دون أن يتقارب مطلقا.

نظرية(1.4.2): اذا وجد x_0 بحيث من أجل كل x ($x > x_0$) التابع k متناقص نحو الصفر $\lim_{x \to +\infty} k(x) = 0$ فإن التكامل $\int_a^{+\infty} k(t) \cos t dt$ متقارب (يمكن $a < x_0$).

البرهان: نستعمل معيار كوشي

مثال(1.4.2): التابع $x \to 1/x$ متناقص نحو الصفر عندما $x \to +\infty$ و بالتالي التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ موجود(متقارب) لكن غير متقارب مطلقا فهو متقارب شرطي.

2-5- التكامل المعمم باستعمال المكاملة بتحويل المتغير او المكاملة بالتجزئة:

2-5-1- تحويل المتغير:

نذكر بالنتيجة الواردة في مقياس التحليل1 على صيغة التالية

نتيجة(1.5.2): ليكن f تابع مستمر على المتراص $I = [a,b]$ و اليكن g تابع قابل للشقاق مع للاستمرار على $J = [\alpha, \beta]$ بحيث $g(J) \subset I$ ، بوضع $u = g(t)$

و اذا كان g اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع $\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)g'(t)dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(u)du$

الاستمرار (متزايد تماما) من J نحو I فان $\int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)g'(t)dt=\int_{a}^{b}f(u)du$.

يمكن تطبيق هذه النتيجة على التكاملات المعممة، ليكن f تابع مستمر على المجال غير المتراص $I'=[a,b[$ (يمكن $b=+\infty$) و g اميومورفيزم قابل للاشتقاق مع الاستمرار (نفرض انه متزايد تماما) من $J'=[\alpha,\beta[$ نحو I' فانه من اجل كل متراص $[\alpha,t]\subset J'$ و $[a,x]\subset I'$ حيث $x=g(t)$ لدينا $\int_{\alpha}^{g^{-1}(x)}(f\circ g)(t)g'(t)dt = \int_{a}^{x}f(u)du$ ، كذلك لما $x\to b$ فان $g^{-1}(x)\to\beta$

ايضا اذا كان احد التكاملين متقاربا او متقاربا مطلقا فالأخر كذلك ونحو نفس القيمة و العكس صحيح

مثال(1.5.2): ادرس تقارب التكامل $\int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx$

الحل: نضع $x=1/t$ و بما ان $x\in]0,1]$ فإن $t\in[1,+\infty[$ و بالتالي

$\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt = \int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx$ كذلك لدينا $\frac{1}{t^2}\le\frac{|\cos t|}{t^2}$ و بالتالي التكامل $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt$

متقارب مطلقا ومنه التكامل $\int_{0}^{1}\cos\frac{1}{x}dx$ متقارب مطلقا فهو متقارب.

2-5-2- المكاملة بالتجزئة:

ليكن f,g تابعين من الصنف C^1 على المجال غير المتراص $I=[a,b[$ (يمكن $b=+\infty$) نطبق قانون المكاملة بالتجزئة على كل $[a,x]\subset I$ أي

$$\int_{a}^{x}f'(t)g(t)dt=f(x)g(x)-f(a)g(a)-\int_{a}^{x}f(t)g'(t)dt$$

كل طرف من هذه المساواة يمثل تابع اذا كان لأحدهما نهاية عندما $x\to b$ يكون للأخر نفس النهاية و التكامل المعطى متقارب أما اذا لم تكن لأحدهما نهاية عندما $x\to b$ فالأخر كذلك ليست له نهاية و التكامل متباعد.

مثال(2.5.2): ادرس تقارب التكامل $\int_{1}^{+\infty}\frac{Actgx}{x^2}dx$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{Actgx}{x^2}dx=-\frac{Actgx}{x}\Big|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نحصل على

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

2-6- التكامل المعمم المتعلق بوسيط

يعطى المجال $[a,b[$ (bمنتهي أو غير منتهي) و المجال $I(I\subset\Re)$ محدود أو غير محدود و الدالة $f:[a,b[\times I\to C$ المستمرة على $[a,b[\times I$، نفرض من أجل كل x ثابتة من I التطبيق $t\to f(t,x)$ يقبل تكامل معمم متقارب على المجال $[a,b[$ وهو $F(x)=\int_{a}^{b}f(t,x)dt$ ، التابع F له كل خواص التابع f .

2-6-1-الاستمرار:

نظرية(1.6.2): لتكن f دالة مستمرة على $[a,b[\times I$. نفرض وجود دالة موجبة g والتي لها تكامل معمم متقارب على $[a,b[$ بحيث $\forall t\in[a,b[,\forall x\in I;|f(t,x)|\le g(t)$ فإن الدالة F و المعرفة بـ: $F(x)=\int_{a}^{b}f(t,x)dt$ مستمرة على المجال I .

البرهان: بما أن التكامل المعمم للدالة g متقارب وحسب معيار كوشي

$$\forall\varepsilon>0,\exists b'\in[a,b[\text{ بحيث } \forall y\in I \text{ لدينا } \int_{b'}^{b}|f(t,x)|dt\le\int_{b'}^{b}g(t)dt<\varepsilon$$

لتكن $x_0\in I$ ، و اليكن $J\subset I$ متراص بحيث $x_0\in J$ من المتباينة السابقة نستنتج أنه

$$\forall x\in J,|F(x)-F(x_0)|\le\int_{a}^{b'}|f(t,x)-f(t,x_0)|dt+2\varepsilon$$

و بما أن الدالة f مستمرة على المتراص $[a,b']\times J$ و بالتالي

$$\exists\eta>0;|x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(t,x)-f(t,x_0)|\le\varepsilon/(b'-a)$$

و منه نستنتج أنه $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0;|x-x_0|<\eta\Rightarrow|F(x)-F(x_0)|\le 3\varepsilon$

أي أن الدالة F مستمرة عند x_0 .

نتيجة(1.6.2): أضافة الى شروط النظرية السابقة إذا كان I متراص و كانت f مستمرة على المتراص $[a,b]\times I$ فإن الدالة F مستمرة على المتراص I.

2-6-2- الاشتقاق تحت التكامل:

نظرية(2.6.2): لتكن f دالة مستمرة على الشريط $[a,b[\times I$ نفرض أنه

1) الدالة f تقبل مشتقة جزئية أولى بالنسبة للمتغير x مستمر على $[a,b[\times I$
2) توجد دالة $g:[a,b[\to \Re_+$ تكاملها المعمم على $[a,b[$ متقارب و

$$\forall t\in[a,b[,\forall x\in I;\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\le g(t)$$

3) من أجل كل x من I الدالة $t\to f(t,x)$ تقبل تكامل معمم متقارب على $[a,b[$

فإن الدالة F قابلة للاشتقاق مع الاستمرار على I و مشتقها يعبر عنه بـ:

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$$

البرهان: لتكن x_0 نقطة من I و اليكن $J\subset I$ بحيث $J=[x_0-\alpha,x_0+\alpha],\alpha>0$

حسب نظرية التزايدات المنتهية من أجل كل $t\in[a,b[$ و $0<|h|<\alpha$ توجد

$\theta(t,h)\in[0,1]$ بحيث $\dfrac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0+\theta(t,h)h)$

من جهة أخرى $\forall\varepsilon>0,\exists b'\in\,]a,b[$ بحيث $\int_{b'}^{b}g(t)dt\le\varepsilon$ و منه نستنتج أن

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right|\le 2\varepsilon+\int_a^{b'}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0+\theta(t,h)h)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right|dt$$

و بما أن المشتق الجزئي للدالة f مستمرة على $[a,b[\times I$ فهو مستمر بانتظام على المتراص $[a,b']\times J$ و بالتالي يوجد $\eta>0$ بحيث $\forall(t,x)\in[a,b']\times J$

$$|h|<\eta\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x+\theta(t,h)h)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le\frac{\varepsilon}{b'-a}$$

و منه $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le 3\varepsilon$ أي أن الدالة F قابلة للاشتقاق ومشتقها يمكن الحصول علية بالاشتقاق داخل رمز المكاملة.

أمثلة: 1) دراسة الدالة $F(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt(x\geq 1)$

لاحظ أن الدالة $f:(t,x)\to t^{x-1}e^{-t}$ معرفة و مستمرة على $[0,1]\times[1,+\infty[$

إذن الدالة F معرفة و مستمرة على $[1,+\infty[$.

2) دراسة الدالة $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2\cos t+x^2)dt$

الدالة $f:(t,x)\to\ln(1-2x\cos t+x^2)$ معرفة و مستمرة على $[-\pi,\pi]\times]-1,1[$

إذن الدالة F مستمرة على $]-1,1[$ ، كذلك الجزئية للدالة f على $]-1,1[\times]-\pi,\pi[$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(1-2x\cos t+x^2)=2\frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}$$

ومنه الدالة F قابلة للاشتقاق و $F'(x)=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x-\cos t}{1-2x\cos t+x^2}dt$

2-6-3- دوال اولر الا كثر استعمالا:

1) الدالة قامة و المعرفة كما يلي: $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$

لها الخواص التالية:

- $\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\log t\,dt$
- $\forall x>0,\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
- $\forall n>0,\Gamma(n+1)=n!$

2) الدالة بيتا و المعرفة بـ: $\beta(x,y)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

لها الخواص التالية:

- $\beta(x,y)=\beta(y,x)$
- $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- $\beta(1/2,1/2)=\pi\Rightarrow\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.