**Chapitre III : Méthode des différences finies**

C’est une méthode d’approximation des équations. On cherche une solution exacte à partir de la discrétisation des opérateurs différentiels ( $\frac{∂}{∂x} ,\frac{∂}{∂y},\frac{∂^{2}}{∂x^{2}} )$sur un maillage.

**III.1 Approximation des opérateurs différentiels.**

Le développement autour du point i (dans le maillage) d’une grandeur quelconque donne

$Φ\_{i-1}=Φ\_{i}-\frac{1}{1ǃ}$ ∆x$\left(\frac{dΦ}{dx}\right)\_{i}$+$\frac{1}{2ǃ}$ $∆x^{2}\left(\frac{d^{2}Φ}{dx^{2}}\right)\_{i}$+$\frac{1}{3ǃ}$ $∆x^{3}\left(\frac{d^{3}Φ}{dx^{32}}\right)\_{i}……………$($III.1$)

.$ Φ\_{i\mp 1}=Φ\_{i}+\frac{1}{1ǃ}$ ∆x$\left(\frac{dΦ}{dx}\right)\_{i}$+$\frac{1}{2ǃ}$ $∆x^{2}\left(\frac{d^{2}Φ}{dx^{2}}\right)\_{i}$+$\frac{1}{3ǃ}$ $∆x^{3}\left(\frac{d^{3}Φ}{dx^{3}}\right)\_{i}…………$($III.2$)

 Sachant que ∆x=hi+1-hi= cts $…………………………………….$($III.3$)

$\left(\frac{dΦ}{dx}\right)\_{i}=\frac{Φ\_{i}-Φ\_{i-1}}{∆x}$+……$……………………………………………$($III.5$)

Ce qui signifie que la dérivée d’ordre 1, au point i, est approchée par différences finies régressives d’ordre 1.

En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.2) on obtient

$\left(\frac{dΦ}{dx}\right)\_{i}=\frac{Φ\_{i+1}-Φ\_{i}}{∆x}$+……$…………………………………………….$($III.6$)

Ce qui signifie que la dérivée d’ordre 1, au point i, est approchée par différences finies progressives d’ordre 1.

En soustrayant la relation (3.1) de la relation (3.2) on obtient l’approximation par différences finies centrées d’ordre 2

$\left(\frac{dΦ}{dx}\right)\_{i}=\frac{Φ\_{i+1}-Φ\_{i-1}}{∆x}$+…………$……………………………………$($III.7$)

En additionnant les relations (3.1) et (3.2) on obtient l’approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies centrées d’ordre 2.

$\left(\frac{d^{2}Φ}{dx^{2}}\right)\_{i}$=$\frac{Φ\_{i+1}-2Φ\_{i+}Φ\_{i-1}}{∆x^{2}}………………………………………………….$($III.8$)

**III.2 Maillage**

Positionner des noeuds où seront stockées les différentes grandeurs à étudié dans le domaine d’étude.

**III.2.1 Maillage structuré et non-structuré**

C’est maillage sont présentés dans la figure suivante, Les avantages et les inconvénients des deux maillages sont :

**

Figure III.1 Maillage structuré et non-structuré

Le maillage structuré est simple à mettre en ouvre, par contre, il est limité pour des géométries simple. Le maillage non-structuré est très compliqué à mettre en ouvre (utilisation des meilleurs commerciaux comme Gambit, Catia..). Il est utilisé pour les géométries complexes comme le corps humain (étude de la portance et de la trainée générées par les nageurs), écoulement autour des ailes d’avion, aubes…

Nous utilisons en ce qui suit les maillages structurés.

**III.3 Génération du maillage structuré**

**III.3.1 Maillage régulier**

C’est un maillage où la distance entre les différents noeuds est constante. Il est facile à mettre en ouvre.

**III.3.1.1 Procédure**

On fixe le nombre de noeuds n (cas unidimensionnel) pour le cas bidimensionnel, on fixe n et m.

Calculer la distance entre les nouds par la relation suivante

$$∆x=\frac{L}{n-1}………………………………………………………………….(III.9)$$

On utilise ce type de maillage lorsque la variable à déterminer dans le domaine d’étude varie faiblement.

**III.3.2 Maillage irrégulier**

Recommander si la variable varie fortement dans le domaine d’étude, dans ce cas, il est préférable de raffiner le maillage dans certaines zones ou les gradients varient fortement afin de capter au mieux l’information.

**III.3.2.1 Procédure**

Fixer le nombre de nouds selon la direction où la variable a déterminer varie fortement

Calculer le premier pas selon la somme d’une suite géométrique définit comme suit :

$∆x\left(1\right)=L\left(\frac{1-r}{1-r^{n-1}}\right)…………………………………………………..(III.10$)

Les autres pas sont déterminés par l’expression suivante :

$$∆x\left(i+1\right)=∆x\left(i\right).r^{n-1}……………………………………………(III.11)$$

Avec

r: Raison de la suite géométrique (généralement 0.8<r<1.2) pour obtenir une solution stable.

L : longueur du domaine à discrétisé.

**III.4 Résume**

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, on procède comme suit :

1- Mailler le domaine d’étude

2- Discrétiser les équations ainsi que les conditions aux limites

3- Constitue le système d’équation globale

4- Résoudre ce système

**III.5 Etude numérique de la conduction unidimensionnel stationnaire**

**III.5.1 Exemple 1**

Soit une barre de longueur L. les températures aux bouts de celle-ci sont T(0) = 10°C et T(L) = 50°C. Déterminer les températures aux points x=$\frac{L}{4}, \frac{L}{2}et \frac{3L}{4}$

**Solution**

**1/ maillage**

**

Figure III.2 Géométrie du problème.

Le nombre de noeuds est n= 5

**2/ Modèle mathématique.**

L’équation de la pure conduction en 1-D stationnaire est :

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}\frac{d^{2}T}{dx^{2}}+&=&0\end{matrix}\\\begin{matrix}T\left(0\right)=&10°C\end{matrix}\\\begin{matrix}T\left(L\right)=&50°C\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Le modèle mathématique comporte les équations qui régissent le phénomène physique ainsi que les conditions aux limites imposées.

**3/ discrétisation:**

L’opérateur différentiel du deuxième ordre est évalué par le développement en série de Taylor, on obtient :

$$\frac{T\_{i-1}-2T\_{i+}T\_{i+1}}{∆x^{2}}$$

Noter que cette équation est valable uniquement aux noeuds internes.

Construction du système d’équation

$$\left\{\begin{matrix}i=&2&\begin{matrix}T\_{1}-&2T\_{2}+&\begin{matrix}T\_{3}=&0\end{matrix}\end{matrix}\\i=&3&\begin{matrix} T\_{2}-&2T\_{3}+&\begin{matrix}T\_{4}=&0\end{matrix}\end{matrix}\\i=&4&\begin{matrix}T\_{3}-&2T\_{4}+&\begin{matrix}T\_{5}=&0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

La discrétisation des conditions aux limites donne :

$$\begin{matrix}T\_{1}=&10\end{matrix}°C$$

$$\begin{matrix}T\_{5}=&50°C\end{matrix}$$

L’écriture du système d’équation pour tous les noeuds donne :

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}T\_{1}=&10\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{1}-&2T\_{2}+&\begin{matrix}T\_{3}=&0\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix} T\_{2}-&2T\_{3}+&\begin{matrix}T\_{4}=&0\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{3}-&2T\_{4}+&\begin{matrix}T\_{5}=&0\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{5}=&50\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Mise sous forme matricielle elle s’écrit :

$\left(\begin{matrix}1&0&\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\\1&-2&\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\-2\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\T\_{4}\\T\_{5}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}10\\0\\\begin{matrix}0\\0\\50\end{matrix}\end{matrix}\right]$

La matrice associée aux systèmes est tri-diagonales, on utilise l’algorithme de Thomas [1] pour obtenir la solution.

On obtient finalement :

$\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\T\_{4}\\T\_{5}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}10\\0\\\begin{matrix}0\\0\\50\end{matrix}\end{matrix}\right]$

**III.5.2 Exemple 2**



Figure III.3 : Géométrie du problème.

**Solution :**

Le modèle mathématique du présent exemple est :

$$\left\{\begin{matrix}k\begin{matrix}\frac{d^{2}T}{dx^{2}}+&q=&0\end{matrix}\\\begin{matrix}T\left(0\right)=&100°C\end{matrix}\\\begin{matrix}T\left(L\right)=&200°C\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

L’équation de la pure conduction en 1-D stationnaire avec source interne. La discrétisation du modèle mathématique donne :

k$\frac{T\_{i-1}-2T\_{i+}T\_{i+1}}{∆x^{2}} $+$q\_{i}=0$

Comme le chauffage est homogène qi est constant dans tout le domaine d’étude, Le système d’équations obtenu pour tous les noeuds est :

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}T\_{1}=&100\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{1}-&2T\_{2}+&\begin{matrix}T\_{3}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix} T\_{2}-&2T\_{3}+&\begin{matrix}T\_{4}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{3}-&2T\_{4}+&\begin{matrix}T\_{5}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{5}=&200\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Noter que

$$\begin{matrix}q\_{2}=&q\_{3}=&\begin{matrix}q\_{4}=&1000\left[\frac{K}{m^{3}}\right]\end{matrix}\end{matrix}$$

**III.5.3 Exemple 3**

Résoudre l’exemple 2 pour le cas ou la face « Ouest » est maintenue à 100° C et la face « Est » est isolée.

**Solution.**

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}\frac{d^{2}T}{dx^{2}}+&q=&0\end{matrix}\\\begin{matrix}T\left(0\right)=&100°C\end{matrix}\\à \begin{matrix}x=&L paroi isolée&Q\_{L}=0\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

A la face Est, la paroi est isolée, on introduit la définition de la densité du flux par la loi de Fourrier

$$Q\_{L}=\frac{dT}{dx}=0$$

On évalue le gradient $\frac{dT}{dx}$par un développement en série de Taylor d’ordre 1 à gauche

$$\frac{dT}{dx}=\frac{T\_{i}-T\_{i-1}}{∆x}$$

A x = L c'est-à-dire au dernier nœud, dans notre cas n = 5

$$\frac{T\_{5}-T\_{4}}{∆x}$$

$$T\_{5}=T\_{4}$$

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}T\_{1}=&100\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{1}-&2T\_{2}+&\begin{matrix}T\_{3}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}\begin{matrix} T\_{2}-&2T\_{3}+&\begin{matrix}T\_{4}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{3}-&2T\_{4}+&\begin{matrix}T\_{5}=&-\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}T\_{5}=&T\_{4}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

Sous forme matricielle, on aura :

$\left(\begin{matrix}1&0&\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\\1&-2&\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}1\\-2\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left[\begin{matrix}T\_{1}\\T\_{2}\\\begin{matrix}T\_{3}\\T\_{4}\\T\_{5}\end{matrix}\end{matrix}\right]$=$\left[\begin{matrix}100\\\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\\\begin{matrix}\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\\\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\\\frac{q\_{2}∆x^{2}}{k}\end{matrix}\end{matrix}\right]$