

# Chapitre 1. Equations Différentielles Ordinaires

## 1. Principe général des méthodes numériques

Pour obtenir une approximation numérique de la solution  $y(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points  $x_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , constituant les nœuds du maillage. La solution numérique discrète obtenue aux points  $x_i$  est notée  $y_i = y(x_i)$ .

L'écart entre deux abscisses, noté  $h$ , est appelé pas de discrétisation. Ce pas, dans les méthodes les plus simples, est constant, mais il peut être judicieux de travailler avec un pas variable  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Le choix du maillage et de la répartition des nœuds peuvent s'avérer crucial.

Les techniques de résolution des Equations Différentielles Ordinaires (EDO) sont basées sur :

- L'approximation géométrique de la fonction.
- Les formules d'intégration numérique (rectangle, trapèze, Simpson...).
- Les développements de Taylor au voisinage de  $x_i$ .

## 2. Propriétés des méthodes numériques

Plusieurs notions mathématiques sont introduites lors de la résolution d'EDO au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance, permettant de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

A ces propriétés, il convient d'ajouter la notion de précision ainsi que des aspects informatiques comme la facilité de mise en œuvre, les coûts CPU (Central Processing Unit) et mémoire.

### 2.1. Consistance d'une méthode

La consistance est la propriété qui assure que la solution exacte de l'équation discrétisée tende vers la solution exacte de l'équation continue lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers 0.

### 2.2. Stabilité d'une méthode

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées reste bornée. La stabilité indique si l'erreur augmente ou non au cours du calcul.

Une méthode peut être stable sous condition (elle sera dite conditionnellement stable) ou toujours stable (elle sera dite inconditionnellement stable).

### 2.3. Ordre de précision d'une méthode

L'erreur de troncature  $\varepsilon$  est définie comme la différence entre la solution exacte  $y^*$  et l'approximation numérique obtenue  $y_n$ , soit :  $\varepsilon_n = |y^*(x_n) - y_n| = O(h^p)$ . L'ordre de précision de la méthode est donné par l'entier  $p$ .

### 2.4. Convergence et taux de convergence d'une méthode

Une méthode est convergente si, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, la solution numérique tend vers la solution exacte de l'équation continue.

Une méthode est convergente à l'ordre  $l$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_i |\varepsilon_i| = O(h^l) \quad (1.1)$$

### 3. Principales méthodes de résolution numériques

Les principales méthodes de résolution numérique des EDO sont séparées en deux grands types :

#### • Les méthodes à un pas

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète  $y_{n+1}$  au nœud  $x_{n+1}$  fait intervenir la valeur  $y_n$  obtenue à l'abscisse précédente. Les principales méthodes sont :

- Méthodes d'Euler explicite et implicite.
- Méthode d'Euler amélioré.
- Méthode d'Euler-Cauchy.
- Méthode de Crank-Nicholson.
- Méthodes de Runge et Kutta.

#### • Les méthodes à pas multiples

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète  $y_{n+1}$  au nœud  $x_{n+1}$  fait intervenir plusieurs valeurs  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$  obtenues aux abscisses précédentes. Les principales méthodes sont :

- Méthode de Nystrom ou saute-mouton.
- Méthodes d'Adams-Bashforth-Moulton.
- Méthodes de Gear.

# Partie 1 : Equations Différentielles avec Conditions Initiales

## 1.1. Introduction

On appelle équations différentielles ordinaires, une équation ou un système d'équations différentielles dont les fonctions et leurs dérivées successives ne dépendent que d'une variable, le temps par exemple. On oppose le terme ordinaire à équations différentielles aux dérivées partielles. On appelle ordre de l'équation différentielle le plus fort degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Elles sont de la forme :

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, f(x), x\right) = 0 \quad (1.1.1)$$

Où  $f$  est une fonction de  $x$  et  $n$  est l'ordre de l'équation.

Dans certains cas, il est possible de trouver des solutions analytiques aux équations différentielles. Cependant dans la majorité des cas, la solution analytique est impossible à obtenir et, même lorsqu'on peut la calculer, on évite parfois de le faire à cause des temps de calculs gigantesques.

Nous commençons par des méthodes relativement simples ayant une interprétation géométrique telle que la méthode d'Euler. Elles nous conduiront progressivement à des méthodes plus complexes telles que les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permettent d'obtenir des résultats d'une grande précision.

Nous prenons comme point de départ la formulation générale d'une équation différentielle d'ordre 1 avec condition initiale. La tâche consiste à déterminer une fonction  $y(t)$  solution de :

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

La variable indépendante  $t$  représente très souvent (mais pas toujours) le temps. La variable dépendante est notée  $y$  et dépend bien sûr de  $t$ . La fonction  $f$  est une fonction quelconque de deux variables que nous supposons suffisamment différentiables. La condition  $y(t_0) = y_0$  est la Condition Initiale (CI).

Il s'agit d'obtenir  $y(t)$  pour  $t \gg t_0$ , si on cherche une solution analytique, ou une approximation de  $y(t)$ , si on utilise une méthode numérique.

## 1.2. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler (Leonhard Euler 1707-1783) est la méthode la plus simple de résolution, numérique d'équations différentielles ordinaires avec CI. Cette méthode est rarement utilisée en raison de manque de précision et de leur instabilité. Le but est d'obtenir une approximation de la solution en  $t = t_1 = t_0 + h$ .

Nous n'avons pas l'équation de la courbe  $y(t)$ , mais nous en connaissons la pente  $y'(t)$  en  $t = t_0$ . En effet, l'équation différentielle assure que :

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0) \quad (1.1.3)$$

On peut donc suivre la droite passant par  $(t_0, y_0)$  et de pente  $f(t_0, y_0)$ . L'équation de cette droite, notée  $d_0(t)$ , est :

$$d_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad (1.1.4)$$

La Figure 1.1 donne l'interprétation de la méthode d'Euler comme méthode de la tangente. En chaque point  $t_n$ , utiliser un développement de Taylor à l'ordre un revient à remplacer la courbe solution par sa tangente.

La méthode d'Euler est une méthode à pas séparé du premier ordre. Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation  $d/dx$  par le schéma discret  $(y_{i+1} - y_i)/h$ . Le développement en série de Taylor permet d'approximer la solution :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (1.1.5)$$

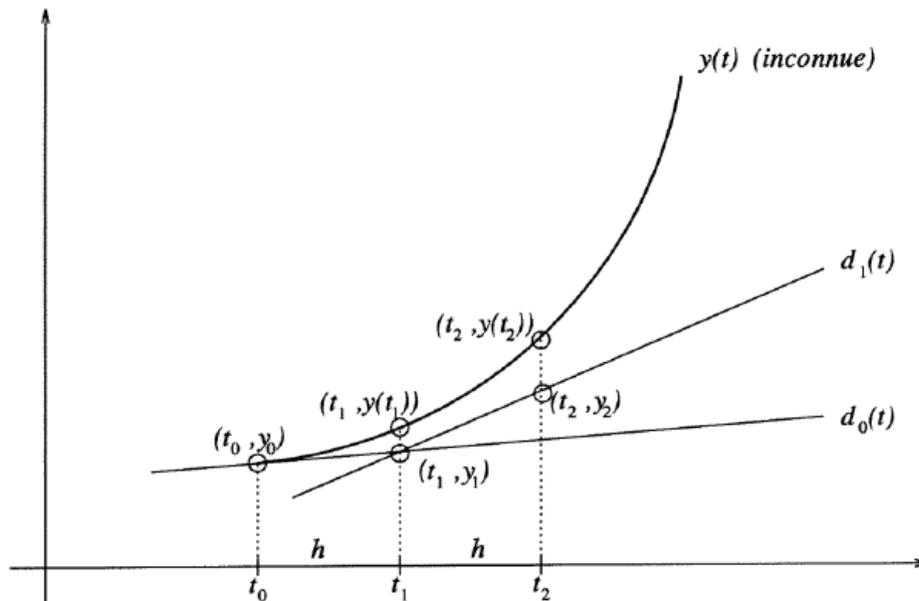


Figure 1.1. Méthode d'Euler

### Algorithme de la méthode d'Euler

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ ;
2. Pour  $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Écrire  $t_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt.

### Exemple :

Soit l'équation différentielle :  $y'(t) = -y(t) + t + 1$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$ . On a donc  $t_0 = 0$  et  $y_0 = 1$ , et on prend un pas de temps  $h = 0.1$ .

De plus, on a :

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

$$y_1 = y_0 + h.f(t_0, y_0) = 1 + 0.1 f(0, 1) = 1.$$

$$y_2 = y_1 + h.f(t_1, y_1) = 1 + 0.1 f(0.1, 1) = 1.01$$

$$y_3 = y_2 + h.f(t_2, y_2) = 1.029$$

$t_i$	$y(t_i)$	$y_i$	$ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000 000
0,1	1,004 837	1,000 000	0,004 837
0,2	1,018 731	1,010 000	0,008 731
0,3	1,040 818	1,029 000	0,011 818
0,4	1,070 302	1,056 100	0,014 220
0,5	1,106 531	1,090 490	0,016 041
0,6	1,148 812	1,131 441	0,017 371
0,7	1,196 585	1,178 297	0,018 288
0,8	1,249 329	1,230 467	0,018 862
0,9	1,306 570	1,287 420	0,019 150
1,0	1,367 879	1,348 678	0,019 201

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessus avec  $y(t_i)$  sont les valeurs de la solution analytique.

La méthode d'Euler est une méthode numérique peu coûteuse numériquement, mais peu précise quand on intègre sur plusieurs pas de temps. Des améliorations sont possibles dès que l'on considère des points intermédiaires, ce que nous allons voir ci-dessous en considérant des méthodes dites de Taylor.

### 1.3. Méthodes de Taylor

L'idée consiste à remplacer sur  $[t_i, t_{i+1}]$  la courbe  $y(t)$  solution de l'équation différentielle non plus par une droite mais par une parabole. Le développement de Taylor autorise une généralisation immédiate de la méthode d'Euler :

$$y_{n+1} = y(t_n + h) = y(t_n) + y'(t_n)h + \frac{y''(t_n)}{2}h^2 + E(h^3) \quad (1.1.6)$$

En se servant de l'équation différentielle 2, on trouve :

$$y_{n+1} = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{f'(t_n, y(t_n))}{2}h^2 + E(h^3) \quad (1.1.7)$$

La règle de dérivation en chaîne assure que :

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)) \quad (1.1.8)$$

on obtient donc :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + E(h^3) \quad (1.1.9)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, on en arrive à poser :  $E(h^3) = 0$ .

### Algorithme de la méthode de Taylor

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ ;
2. Pour  $0 \leq n \leq N$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Écrire  $t_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt.

### Exemple :

Soit l'équation différentielle :  $y'(t) = -y(t) + t + 1$  et la condition initiale  $y(0) = 1$ . On a donc  $t_0 = 0$  et  $y_0 = 1$ , et on prend un pas de temps  $h = 0.1$ . De plus, on a :

$$f(t, y) = -y + t + 1 ; \frac{\partial f}{\partial t} = 1 ; \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

L'algorithme devient :

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}(1 + (-1)(-y_n + t_n + 1))$$

$$y_1 = 1.005$$

$$y_2 = 1.019025$$

Les résultats sont compilés dans le tableau ci-dessous

$t_i$	$y(t_i)$	$y_i$	$ y(t_i) - y_i $
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000 000
0,1	1,004 837	1,005 000	0,000 163
0,2	1,018 731	1,019 025	0,000 294
0,3	1,040 818	1,041 218	0,000 400
0,4	1,070 302	1,070 802	0,000 482
0,5	1,106 531	1,107 075	0,000 544
0,6	1,148 812	1,149 404	0,000 592
0,7	1,196 585	1,197 210	0,000 625
0,8	1,249 329	1,249 975	0,000 646
0,9	1,306 570	1,307 228	0,000 658
1,0	1,367 879	1,368 541	0,000 662

### Remarque :

Il est possible d'obtenir des méthodes de Taylor encore plus précises en poursuivant le développement de Taylor jusqu'à des termes d'ordre élevé. Nécessite le calcul  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}, \dots$

Pour cette raison, les méthodes obtenues sont difficiles à utiliser. Il existe cependant un moyen de contourner cette difficulté en développant les méthodes de Runge-Kutta.

## 1.4. Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta (Carle Runge 1856-1927 et Martin Kutta 1867-1944) sont les méthodes préférées des ingénieurs, mais on ne peut pas dire pour autant quelles sont les meilleures. En effet, à chaque problème, une méthode optimale de résolution. Les méthodes de Runge-Kutta échouent notamment lorsque le système présente à la fois des dynamiques rapides et lentes.

Les deux méthodes de Runge-Kutta les plus employées sont l'algorithme dit (Runge-Kutta d'ordre 2) et l'algorithme dit (Runge-Kutta d'ordre 4) .

### Remarque :

Matlab dispose de solveurs d'équations différentielles : les principaux sont ode45, et ode23 qui utilisent des méthodes de type Runge-Kutta.

### 1.4.1. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Le développement de Taylor :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) + E(h^3) \quad (1.1.10)$$

Le but est de remplacer cette dernière relation par une expression équivalente :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + a_1 hf(t_n, y(t_n)) + a_2 hf(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) \quad (1.1.11)$$

Où on doit déterminer les paramètres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  de telle sorte que les expressions (1.1.10) et (1.1.11) aient toutes les deux une erreur en  $E(h^3)$ . On doit recourir au développement de Taylor en deux variables au tour du point  $(t_n, y(t_n))$  :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + E(h^2) \quad (1.1.12)$$

La relation (1.1.11) devient alors :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2) hf(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + E(h^3) \quad (1.1.13)$$

On voit que les expressions (1.1.10) et (1.1.13) sont du même ordre. Pour déterminer les coefficients  $a_i$ , il suffit de comparer ces deux expressions terme à terme :

$$\begin{aligned} h &= (a_1 + a_2)h \\ \frac{h^2}{2} &= a_2 a_3 h^2 \\ \frac{h^2}{2} f(t_n, y(t_n)) &= a_2 a_4 h^2 \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

On obtient un système non linéaire de 3 équations comprenant 4 inconnues :

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 + a_2 \\ \frac{1}{2} &= a_2 a_3 \\ \frac{f(t_n, y(t_n))}{2} &= a_2 a_4 \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Ce système est sous-déterminé en ce sens qu'il y a moins d'équations que d'inconnues et qu'il n'a donc pas de solution unique. Cela offre une marge de manœuvre qui favorise la mise au point de plusieurs variantes de la méthode de Runge-Kutta. Le choix le plus utilisé est : La Méthode d'Euler modifiée et la Méthode du point milieu.

#### 1.4.1.1 Méthode d'Euler modifiée

Pour obtenir une solution approchée de la solution  $y(t)$  du problème par la méthode d'Euler modifiée, nous procédons de la manière suivante :

$$a_1 = a_2 = 1/2, a_3 = 1 \text{ et } a_4 = f(t_n, y(t_n)) \quad (1.1.16)$$

#### Algorithme de la méthode d'Euler Modifiée

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ ;
2. Pour  $0 \leq n \leq N$

$$\bar{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, \bar{y}))$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Écrire  $t_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt.

#### Exemple :

Soit l'équation différentielle :  $y'(t) = f(t, y(t)) = t^3 + y^2(t)$  ;  $t \in [0, 2]$  et la condition initiale  $y(0) = 0$ . On a donc  $t_0 = 0$  et  $y_0 = 0$ , et on prend un pas de temps  $h = 0.2$ . En utilisant la méthode d'Euler Modifiée, calculer  $y_1 = y(0.2)$  et  $y_2 = y(0.4)$  approximations de la solution exacte  $y(t)$  du problème aux points  $t_1 = 0.2$  et  $t_2 = 0.4$ .

L'algorithme devient :

$$\bar{y} = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(t_0^3 + y_0^2) = 0$$

$$y_1 = y_0 + h/2(f(t_0, y_0) + f(t_1, \bar{y})) = 0.0008$$

$$\bar{y} = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + h(t_1^3 + y_1^2) = 0.0024$$

$$y_2 = y_1 + h/2(f(t_1, y_1) + f(t_2, \bar{y})) = 0.008$$

#### 1.4.1.2 Méthode du point milieu

Nous avons :

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1/2 \text{ et } a_4 = f(t_n, y(t_n))/2 \quad (1.1.17)$$

## Algorithme de la méthode du point milieu

1. Étant donné un pas de temps  $h$ , une condition initiale  $(t_0, y_0)$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ ;
2. Pour  $0 \leq n \leq N$

$$\bar{y} = hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\bar{y}}{2}\right) \right)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Écrire  $t_{n+1}$  et  $y_{n+1}$

3. Arrêt.