حلول مفصلة للتمارين من 1 إلى 8.

ت 1. (1

a. $x_n = (-1)^n$

* $\limsup_n x_n = \inf_{n \geq 1} (\sup_{k \geq n} x_k)$

$= \inf_{n \geq 1} [\sup(x_n, x_{n+1}, \dots)]$

$= \begin{cases} \inf_{n \geq 1} [\sup(1, -1, 1, -1, \dots)] & \text{: زوجي } n \\ \inf_{n \geq 1} [\sup(-1, 1, -1, 1, \dots)] & \text{ فردي } n \end{cases}$

$= \begin{cases} \inf_{n \geq 1} (1) & \text{: زوجي } n \\ \inf_{n \geq 1} (1) & \text{: فردي } n \end{cases}$

$= 1$

بطريقة مشابهة نجد

* $\liminf_n x_n = -1$

b. $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

* $\limsup_n x = \inf_{n \geq 1} \{\sup_{k \geq n} (x_k)\}$

$$= \begin{cases} \inf\limits_{n\geq 1} \left\{ \sup\left(1+\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\} & : \text{زوجي } n \\ \inf\limits_{n\geq 1} \left\{ \sup\left(-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n+1}, -1+\frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\} & : \text{فردي } n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \inf\limits_{n\geq 1} \left\{ 1+\frac{1}{n} \right\} & : \text{زوجي } n \\ \inf\limits_{n\geq 1} \left\{ 1+\frac{1}{n+1} \right\} & : \text{فردي } n \end{cases}$$

$$= \inf_{n\geq 1} \left\{ 1+\frac{1}{n} \right\} = 1$$

$$* \liminf_n x_n = \sup_{n\geq 1} \left\{ \inf_{k\geq n} (x_k) \right\} \qquad (\forall n\geq 1)$$

$$= \sup_{n\geq 1} \left\{ \inf\left(x_n, x_{n+1}, \dots\right) \right\}$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{n\geq 1} \left\{ \inf\left(1+\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\} & \text{زوجي } n \\ \sup\limits_{n\geq 1} \left\{ \inf\left(-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n+1}, -1+\frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\} & \text{فردي } n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{n\geq 1} \left\{ -1+\frac{1}{n+1} \right\} & : \text{زوجي } n \\ \sup\limits_{n\geq 1} \left\{ -1+\frac{1}{n} \right\} & : \text{فردي } n \end{cases}$$

$$= \sup_{n\geq 1} \left\{ -1+\frac{1}{n} \right\} \qquad (\forall n\geq 1)$$

$$= -1$$

c. $x_n = \left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

لاحظ أن

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & ; \quad n = 4k \\ 1 & ; \quad n = 4k+1 \\ 0 & ; \quad n = 4k+2 \\ -1 & ; \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

* $\limsup_{n} x_n = \inf_{n\geq 1}\left\{\sup_{k\geq n} x_k\right\}$

$$= \begin{cases} \inf_{n\geq 1}\left\{\sup\left[1^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{1}{n+1}}, 1^{\frac{1}{n+2}}, 0^{\frac{1}{n+3}}, \dots\right]\right\} ; & n = 4k \\ \inf_{n\geq 1}\left\{\sup\left[2^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{1}{n+1}}, 0^{\frac{1}{n+2}}, 1^{\frac{1}{n+3}}, \dots\right]\right\} ; & n = 4k+1 \\ \inf_{n\geq 1}\left\{\sup\left[1^{\frac{1}{n}}, 0^{\frac{1}{n+1}}, 1^{\frac{1}{n+2}}, 2^{\frac{1}{n+3}}, \dots\right]\right\} : & n = 4k+2 \\ \inf_{n\geq 1}\left\{\sup\left[0^{\frac{1}{n}}, 1^{\frac{1}{n+1}}, 2^{\frac{1}{n+2}}, 1^{\frac{1}{n+3}}, \dots\right]\right\} : & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \inf_{n\geq 1}\left\{2^{\frac{1}{n+1}}\right\} ; & n = 4k \\ \inf_{n\geq 1}\left\{2^{\frac{1}{n}}\right\} ; & n = 4k+1 \\ \inf_{n\geq 1}\left\{2^{\frac{1}{n+3}}\right\} ; & n = 4k+2 \\ \inf_{n\geq 1}\left\{2^{\frac{1}{n+2}}\right\} ; & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$= \inf_{n\geq 1}\left\{2^{\frac{1}{n}}\right\} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

وبنفس الطريقة نواصل حساب $\liminf_n x_n$ ،
وسوف نجدها تساوي 0

d. $x_n = \frac{2}{n}$
نجد بعد الحساب: $\liminf_n x_n = 0$ ، $\limsup_n x_n = 0$

2). لتكن $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ،

* $\limsup_n x_n = \inf_{n\geq 1} X_n \mid X_n = \sup_{k\geq n} (x_k)$ , $\forall n \geq 1$

نميز حالتين

أ. $(x_n)$ غير محدودة ، يعني $X_n = \sup_{k\geq n} (x_k) = +\infty$
أو $X_n = \sup_{k\geq n}(x_k) = -\infty$ وعليه
$\inf_{n\geq 1} X_n = +\infty$ أو $\inf_{n\geq 1} X_n = -\infty$

ب. $(x_n)$ محدودة ، ومن جهة $(X_n)$ متناقصة ، لأن

$$X_{n+1} = \sup_{k\geq n+1} (x_k) = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$
$$\leq \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$
$$= X_n , \quad \forall n \geq 1 .$$

(وذلك حسب الخاصية: $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$)

نستنتج أن $(X_n)$ تتقارب نحو حدها الأدنى ، أي

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \inf_{n\geq 1} X_n = \ell \in \mathbb{R}$$

ومنه $\limsup_n x_n = \ell \in \mathbb{R}$ .

* $\liminf_n x_n = \sup_{n\geq 1} X_n \mid X_n = \inf_{k\geq n} (x_k)$ , $\forall n \geq 1$

أ- $(x_n)$ غير محدودة ، يعني $X_n = +\infty$ أو $X_n = -\infty$ ،
وبالتالي النهاية السفلى هي $+\infty$ أو $-\infty$ .

ب- $(x_n)$ محدودة ، ومن جهة $(X_n)$ متزايدة ،
لأن $X_{n+1} = \inf_{k\geq n} (x_k$

$$= \inf(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \geq \inf(x_n, x_{n+1}, \dots)$$
$$= X_n, \forall n$$

[حسب الاستلزام : $A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$ ]

وبالتالي فإن $(X_n)$ متزايدة نحو حدها الأعلى و

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = \sup_{n \geq 1} X_n = L \in \mathbb{R}$$

ومنه $\limsup_n x_n = L \in \mathbb{R}$

استنتاج

$$\liminf_n x_n = \lim_{n \to +\infty} \left( \inf_{k \geq n} x_k \right)$$

$$\limsup_n x_n = \lim_{n \to +\infty} \left( \sup_{k \geq n} x_k \right)$$

13. a. $\limsup_{n \to +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} x_n + \limsup_{n \to +\infty} y_n$

نفرض $\{\limsup_n x_n, \limsup_n y_n\} \neq \{-\infty, +\infty\}$

من أجل تفادي حالة عدم التعيين ؛

أما الحالات الأخرى هي

p. $\limsup_n x_n = +\infty$ أو $\limsup_n y_n = +\infty$ :

القضية واضحة ولا نحتاج إلى برهان

b. $\limsup_n y_n = \limsup_n x_n = -\infty$ ;

$\forall A > 0 \ \exists n_0 \geq 1 \ X_n = \sup_{k \geq n} x_k \leq -\frac{A}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$\forall A > 0 \ \exists n_1 \geq 1 \ Y_n = \sup_{k \geq n} y_k \leq -\frac{A}{2} \quad \forall n \geq n_1$

هذا حسب التعريف النهاية ؛

$\lim_{n \to +\infty} X_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \ \exists p \geq 1 \ X_n < -A \quad \forall n \geq p$

$\forall \lambda > 0 \quad \exists n_0, n_1 \geq 1 \quad x_n + y_n \leq -\frac{2\lambda}{2} \quad \forall n \geq p$

حيث $\quad p = \max(n_0, n_1)$

ومنه $\quad \lim_{n \to +\infty} (x_n + y_n) = -\infty$

أي $\quad \limsup_n (x_n + y_n) = -\infty$

اذن $\quad -\infty \leq -\infty$ العلاقة محققة

د. $\quad \limsup x_n = \alpha \,, \quad \limsup y_n = \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\limsup_n x_n = \inf_n X_n = \alpha \ \backslash \ X_n = \sup_{k \geq n} x_k \quad \forall n \geq 1$

$\limsup_n y_n = \inf_n Y_n = \beta \ \backslash \ Y_n = \sup_{k \geq n} y_k \quad \forall n \geq 1$

حسب الخاصية المميزة للحد الأدنى

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \geq 1 \quad \alpha \leq X_{n_0} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \geq 1 \quad \beta \leq Y_{n_1} < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$

بالجمع : $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, n_1 \geq 1 \quad \alpha + \beta \leq X_{n_0} + Y_{n_1} \leq \alpha + \beta + \varepsilon$

ومنه $\quad \inf_{n,m \geq 1} (X_n + Y_m) = \alpha + \beta$

ومن جهة $\quad X_p + Y_p < X_n + Y_m \quad \forall n, m \geq 1$

حيث $\quad p = \max(n, m)$

وذلك لأن $(X_n)$ و $(Y_m)$ متتاليتين متناقصتين

ومنه

$$\inf_{p \geq 1} (X_p + Y_p) \leq \inf_{n,m \geq 1} (X_n + Y_m)$$

$$= \alpha + \beta$$

$$= \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$$

حيث أن $\quad \inf_{p \geq 1} (X_p + Y_p) = \limsup_n (x_n + y_n)$ #

b. $\liminf_n (x_n + y_n) \geq \liminf_n x_n + \liminf_n y_n$

حسب العلاقة $A \subset \mathbb{R} : \sup(-A) = -\inf A$

ينتج

$$\liminf_n (x_n + y_n) = \sup_{n\geq 1} \left[ \inf_{k \geq n} (x_k + y_k) \right]$$

$$= \sup_{n \geq 1} \left\{ -\sup_{k\geq n} (-x_k - y_k) \right\}$$

$$= -\inf_{n\geq 1} \left\{ \sup_{k \geq n} (-x_k - y_k) \right\}$$

$$\geq -\limsup_n (-x_n - y_n)$$

$$\geq -\limsup_n (-x_n) - \limsup_n (-y_n)$$

$$= \liminf_n (x_n) + \liminf_n (y_n)$$

c.

نفرض أن $x_n \leq y_n \ \forall n \geq 1$

$$\sup_{k\geq n} x_k \leq \sup_{k\geq n} y_k \Rightarrow \inf_{n\geq 1} \sup_{k \geq n} x_k \leq \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k$$

$$\Rightarrow \limsup_n x_n \leq \limsup_n x_n$$

بنفس الطريقة نبرهن الآخرى

4. نفرض أن $\lim x_n = \ell$ إذن

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0 \geq 1, \ \forall n \geq p_0 \ \ \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \geq 1 \ \forall n \geq p \quad \ell - \varepsilon < x_n \ \wedge \ x_n < \ell + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \geq 1 \ \forall n \geq p \quad \ell - \varepsilon < \inf_{n \geq p} x_n \ \wedge \ \sup_{n\geq p} x_n < \ell + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \geq 1 \quad x_p > \ell - \varepsilon \ \wedge \ x'_p < \ell + \varepsilon$

مع $\quad x_p = \inf\limits_{n \geq p} x_n \quad x'_p = \sup\limits_{n \geq p} x_n$ .

حسب الخاصية المميزة للحد الأدنى والحد الأعلى نجد

$$\sup_{p \geq 1} x_p = \ell \ \wedge \ \inf_{p \geq 1} x'_p = \ell$$

ومنه

$$\sup_{p \geq 1}\left(\inf_{n \geq p} x_n\right) = \inf_{p \geq 1}\left(\sup_{n \geq p} x_n\right) = \ell$$

الاستلزام العكسي نمكن البرهان بطريقة معاكسة.

تمرين 2.

a. $A_n = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

$= \{-1, 1\}$

* $\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n \geq 1} B_n \quad , B_n = \bigcup\limits_{k \geq n} A_k$

$B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots = \{-1, 1\}$

$\Rightarrow \limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n \geq 1} \{-1, 1\} = \{-1, 1\}$

* $\liminf\limits_n A_n = \{-1, 1\}$ بنفس الطريقة نجد

b. $A_{2n} = [0, 1] \ , \ A_{2n+1} = [1, 2]$

$\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n \geq 0} B_n$

$$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k = \begin{cases} [0,1] \cup [1,2] \cup [0,1] \cup \cdots & n \text{ زوجي} \\ [1,2] \cup [0,1] \cup [1,2] \cup \cdots & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$= [0, 2] \quad \forall n \geq 0$

$\limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n \geq 0} [0, 2] = [0, 2]$

$\bullet\ \liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 0} B_n \quad \backslash \quad B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$

$$B_n = A_n \cap A_{n+1} \cap \cdots = \begin{cases} [0,1] \cap [1,2] \cap \cdots & n \text{ زوجي} \\ [1,2] \cap [0,1] \cap \cdots & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$= \{1\} \quad \forall n \geq 0$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 0} \{1\} = \{1\} \cup \{1\} \cup \cdots = \{1\}$$

c. $A_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$

$\ast\ \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n \quad \backslash \quad B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$

$$B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k = \begin{cases} \left[0, 1+\frac{1}{n}\right] \cup \left[0, 1-\frac{1}{n+1}\right] \cup \cdots & n \text{ زوجي} \\ \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \cup \left[0, 1+\frac{1}{n+1}\right] \cup \cdots & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[0, 1+\frac{1}{n}\right] & : n \text{ زوجي} \\ \left[0, 1+\frac{1}{n+1}\right] & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$= \left[0, 1+\frac{1}{2n}\right], \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} \left[0, 1+\frac{1}{2n}\right]$$

$$= \left[0, 1+\frac{1}{2}\right] \cap \left[0, 1+\frac{1}{4}\right] \cap \cdots$$

$$= [0, 1]$$

$\ast\ \liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n \quad \backslash \quad B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$

إتبع نفس الطريقة مع استبدال $\cup$ بـ $\cap$ من الحالتين

$n$ زوجي وفردي سوف نجد

$$B_n = \left[0, 1 - \frac{1}{2n+1}\right], \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \liminf_{n} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \left[0, 1-\frac{1}{2n+1}\right] = [0,1[$$

.٢

$$* \quad [a,b] = \bigcap_{n\geq 1} \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[$$

أ/ $\subset$ .

$$[a,b] \subset \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[ \quad \forall n\geq 1$$

$$\Rightarrow [a,b] \subset \bigcap_{n\geq 1} \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[$$

أ/ $\supset$ .

$$x\in \bigcap_{n\geq 1} \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[ \Leftrightarrow$$

$$a-\frac{1}{n} < x < b-\frac{1}{n} \quad \forall n\geq 1 \Rightarrow$$

$$a\leq x\leq b \Rightarrow$$ "نجعل $n\to+\infty$"

$$x\in[a,b]$$

ومنه المساواة.

$$* \quad ]a,b[ = \bigcup_{n\geq 1} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

$$\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \subset ]a,b[ \quad \forall n\geq 1$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \subset ]a,b[$$

الاحتواء العكسي ، ليكن $x\in]a,b[$ ، أي

$$a<x<b$$

المطلوب إثبات

$$x\in \bigcup_{n\geq 1} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

أي إثبات

$$\exists n_0\geq 1 \quad x\in \left[a+\frac{1}{n_0}, b-\frac{1}{n_0}\right]$$

يعني البحث عن $n$ بحيث:

$$a+\frac{1}{n_0} \leq x \leq b-\frac{1}{n_0}$$

ومنه

$$a+\frac{1}{n_0} \leq x \quad \wedge \quad x\leq b-\frac{1}{n_0}$$

ومنه

$$n_0 \geq \frac{1}{x-a} \quad \wedge \quad n_0 \geq \frac{1}{b-x}$$

يكفي أن نأخذ

$$n_0 = \max\left( \left[\frac{1}{b-x}\right], \left[\frac{1}{x-a}\right] \right) + 1$$

يحقق المطلوب.

* $[a,b[ = \bigcup_{n\geq 1} [a, b-\frac{1}{n}]$

* $]a,b] = \bigcap_{n\geq 1} ]a, b+\frac{1}{n}[$

a. $\overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n$

مساعدة : ☆ $\quad \psi_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim}\, \psi_{A_n}$

$x \in \overline{\lim} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 1 \;\; \exists k \geq n \;\; x \in A_k$

$\Updownarrow$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 1 \;\; \exists k \geq n \;\; \psi_{A_k}(x) = 1$

$\psi_{\overline{\lim} A_n}(x) = 1$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 1 \;\; \therefore \;\; \sup_{k\geq n} \psi_{A_k}(x) = 1$

$\Leftrightarrow \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} \psi_{A_k}(x) = 1$

$\Leftrightarrow \overline{\lim_n}\, \psi_{A_n}(x) = 1$

ومنه $\psi_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim_n}\, \psi_{A_n}(x) = 1$

لما : $x \in \overline{\lim} A_n$ ,

النفي : $x \notin \overline{\lim} A_n \Leftrightarrow \psi_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim}\, \psi_{A_n}(x) = 0$

ومنه المساواة ☆ صحيحة.

الآن نستعمل الخاصية

$A \subset B \Leftrightarrow \psi_A \leq \psi_B$

$$\Psi_{\overline{\lim}(A_n \cap B_n)} = \overline{\lim}\, \Psi_{A_n \cap B_n}$$

$$= \overline{\lim}\left(\Psi_{A_n} \times \Psi_{B_n}\right)$$

$$\leq \overline{\lim}\, \Psi_{A_n} \times \overline{\lim}\, \Psi_{B_n}$$

$$= \Psi_{\overline{\lim} A_n} \times \Psi_{\overline{\lim} B_n}$$

$$= \Psi_{\overline{\lim} A_n \cap \overline{\lim} B_n}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim}\, A_n \cap \overline{\lim}\, B_n$$

المتباينة "$\leq$" من السطر الثالث تأتي من العلاقة

$$\sup(f \times g) \leq \sup f \times \sup g$$

حذاري إنها ليست مساواة.

b. $\underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n \subset \underline{\lim}\,(A_n \cup B_n)$

مساعدة:

$$\underline{\lim}\, A_n = \left(\overline{\lim}\, A_n^c\right)^c$$

$$\underline{\lim}\, B_n = \left(\overline{\lim}\, B_n^c\right)^c$$

وإثباتها يأتي من كون تقاطع المتممات يساوي متممة الاتحاد.

نستعمل a من أجل $A_n^c$ و $B_n^c$ أي

$$\overline{\lim}\,(A_n^c \cap B_n^c) \subset \overline{\lim}\, A_n^c \cap \overline{\lim}\, B_n^c$$

ومنه

$$\overline{\lim}\,(A_n \cup B_n)^c \subset (\underline{\lim}\, A_n)^c \cap (\underline{\lim}\, B_n)^c$$

ومنه

$$\left(\underline{\lim}\,(A_n \cup B_n)\right)^c \subset \left(\underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n\right)^c$$

إذن

$$\left(\underline{\lim}\,(A_n \cup B_n)\right) \supset \left(\underline{\lim}\, A_n \cup \underline{\lim}\, B_n\right)$$

c. $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

مسألة :

$$\Psi_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \sup_{n\geq 1} \Psi_{A_n}$$

$$\Psi_{\bigcup_{n\geq 1} A_n}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n \\ 0 & : x \notin \bigcup_{n\geq 1} A_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \exists n \geq 1\ x \in A_n \\ 0 & : \forall n \geq 1\ x \notin A_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \exists n \geq 1\ \Psi_{A_n}(x) = 1 \\ 0 & : \forall n \geq 1\ \Psi_{A_n}(x) = 0 \end{cases}$$

ومن جهة

$$\sup_{n\geq 1} \Psi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & : \exists n \geq 1\ \Psi_{A_n}(x) = 1 \\ 0 & : \forall n \geq 1\ \Psi_{A_n}(x) = 0 \end{cases}$$

إذن المساواة محققة.

لنفرض أن $\forall n \geq 1$ $A_n \subset A_{n+1}$ ولنثبت أن

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

لأن $\bigcap_{k\geq n} A_k = A_n \cap A_{n+1} \cap \cdots = A_n$

وهذا حسب تزايد $(A_n)$.

نبرهن الآن $\overline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

$/\subset/$

$$x \in \overline{\lim}\, A_n \Leftrightarrow \Psi_{\overline{\lim} A_n}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{\lim}\, \Psi_{A_n}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} \Psi_{A_k}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1 \quad \sup_{k\geq n} \Psi_{A_k}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n\geq 1 \quad \Psi_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1 \quad x \in \bigcup_{k\geq n} A_k \Rightarrow x \in \bigcup_{k\geq 1} A_k$$

$/\supset/$

$$x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n \Leftrightarrow \Psi_{\bigcup_{n\geq 1} A_n}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sup_{n\geq 1} \Psi_{A_n}(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sup_{n\geq 1} \Psi_{A_{n+1}}(x) = 1 \quad (\text{لأن: } \Psi_{A_n} \leq \Psi_{A_{n+1}})$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 1 : \sup_{k\geq n} \Psi_{A_k}(x) = 1$$

$\Leftrightarrow \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} \psi_{A_k}(x) = 1$

$\Leftrightarrow \overline{\lim}\, \psi_{A_n}(x) = 1$

$\Leftrightarrow \psi_{\overline{\lim} A_n}(x) = 1$

$\Leftrightarrow x \in \overline{\lim}\, A_n$

d. $A_{n+1} \subset A_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$

مساعدة : إستعمل

$$\psi_{\bigcap_{n\geq 1} A_n} = \inf_{n\geq 1} \psi_{A_n}$$

أحد المحاسبات الاستنتاج من C بالمدور إلى النتيجة .

تمرين 3 . 1)

* $$\psi_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A\cap B \\ 0 & : x \notin A\cap B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : x \in A \wedge x \in B \\ 0 & ; x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \psi_A(x) = 1 \wedge \psi_B(x) = 1 \\ 0 & : \psi_A(x) = 0 \vee \psi_B(x) = 0 \end{cases}$$

$\psi_{A\cap B} = \psi_A \times \psi_B$ نجد في الحالتين

* $A \subset B \Rightarrow \psi_A \leq \psi_B$ ,

نبرهن بفصل الحالات، هناك ثلاث حالات فقط .

$1 \leq 1$

$x \in A \wedge x \in B$ : $1 \leq 1$

$x \notin A \wedge x \notin B$ : $0 \leq 0$

$x \notin A \wedge x \in B$ : $0 \leq 1$

محققة ومنه $\psi_A \leq \psi_B$

$\cdot\ A \subset B \Rightarrow \psi_{B-A} = \psi_B - \psi_A$

نفس الحالات السابقة

$x \in A \wedge x \in B$ $\quad 0 = 1 - 1$

$x \notin A \wedge x \notin B$ $\quad 0 = 0 - 0$

$x \notin A \wedge x \in B$ $\quad 1 = 1 - 0$

محققة

2). نفرض $A \cap B = \phi$ ، نبين ان

$$\psi_{A \cup B} = \psi_A + \psi_B$$

$x \in A \wedge x \notin B$ : $1 = 1 + 0$

$x \notin A \wedge x \in B$ : $1 = 0 + 1$

$x \notin A \wedge x \notin B$ : $0 = 0 + 0$

محققة.

3) . نفرض أن $\{A_n\}$ غير متقاطعة مثنى مثنى

$$\psi_{\bigcup_{n \geq 1} A_n}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n \\ 0 & : x \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \exists ! n \quad x \in A_n \\ 0 & : \forall n \quad x \notin A_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \exists ! n \geq 1 \quad \psi_{A_n}(x) = 1 \\ 0 & : \forall n \geq 1 \quad \psi_{A_n}(x) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & : \sum_{n \geq 1} \psi_{A_n}(x) = 1 \\ 0 & : \sum_{n \geq 1} \psi_{A_n}(x) = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \psi_{A_n}(x)$$ "المساواة في الحالتين"

السلسلة $\sum_{n \geq 1} \psi_{A_n}$ تتقارب نحو التابع

المميز $\psi_{\bigcup_{n \geq 1} A_n}$

4. نفرض أن $\text{Card}\, f(X) = n < \infty$

ونضع $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\}$

حيث: $\forall i \neq j : \alpha_i \neq \alpha_j$

$j = 1, \dots n$ ، $A_j = \{x \in X ; \; f(x) = \alpha_j\}$

$\{A_j\}_{1 \leq j \leq n}$ تشكل تجزئة لـ $X$.

i $A_j \neq \phi$

ii $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

لأنه لو فرضنا العكس، يعني $A_i \cap A_j \neq \phi$

إذن يوجد $x \in A_i \cap A_j$ بحيث،

ومنه $f(x) = \alpha_i \wedge f(x) = \alpha_j$

نجد $\alpha_i = \alpha_j$ تناقض.

iii $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X$

/⊂/ واضح

/⊃/ $x \in X \Rightarrow f(x) \in \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$

$$\Leftrightarrow (f(x)=\alpha_1) \vee (f(x)=\alpha_2) \vee \cdots \vee (f(x)=\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \cdots \vee (x \in A_n)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

$$f(x) = 1 \times f(x)$$

$$= \varphi_X(x) \times f(x) \qquad \text{“} \forall x \in X ; \varphi_X(x) = 1 \text{”}$$

$$= \varphi_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}(x) \times f(x)$$

$$= \left( \sum_{j=1}^{n} \varphi_{A_j}(x) \right) \times f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{A_j} \times f)(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{A_j}(x) \qquad \forall x \in X$$

ومنه $$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{A_j}$$

تمرين 4.

1. نفرض أن $\mathcal{A}$ عشيرة على $X$. نبرهن أن $\mathcal{A}$ فئة رتيبة.

نعلم أن العشيرة مستقرة بالنسبة للاتحاد القابل للعد والتقاطع القابل للعد؛ إذن

$$\forall \{A_n\} \subset \mathcal{A} : A_n \subset A_{n+1} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

$$\forall \{A_n\} \subset \mathcal{A} : A_{n+1} \subset A_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

ومنه $\mathcal{A}$ فئة رتيبة.

العكس غير صحيح، مثلا $X = \mathbb{R}$

$$\mathcal{M} = \{I_n = ]-n, n[ \,,\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$$

$$I_n \subset I_{n+1} \ \forall n \geq 0 \ . \ \bigcup_{n\geq 0} I_n = \bigcup_{n\geq 0} ]-n, n[ = \mathbb{R}$$

و $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$

لكن $\mathcal{M}$ ليست عشيرة على $X$، لأن $\mathcal{M}$ ليست مستقرة بالنسبة للمتممة.

2. ليكن $\mathcal{A}$ جبر مستقرا (مغلقا) بالنسبة إلى نهايات متتالياته المتزايدة، يحقق:

$$(*) \quad \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A} \quad A_n \subset A_{n+1} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

نبرهن أن $\mathcal{A}$ عشيرة على $X$، حسب تعريف 3 العشيرة، يجب أن نتأكد أن الجبر $\mathcal{A}$ مستقر بالنسبة للاتحاد القابل للعد

من أجل $\{A_n\}_{n\geq 1}$ كيفية من $\mathcal{A}$ نضع

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_1 \cup A_2$

$\vdots$

$B_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

واضح أن $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة : $\forall n\geq 1 \quad B_n \subset B_{n+1}$

ثم إن $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ ، لأن كل عنصر $B_n$ هو إتحاد منته لعناصر من الجبر $\mathcal{A}$ ،

حسب الفرضية $(*)$

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{A}$$

ومن جهة

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

نجد

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

إذن $\mathcal{A}$ عشيرة على $X$.

تمرين 5.

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$$

نفرض أن $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ، ونبرهن $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.

لدينا $\mathcal{A} \in \sigma(\mathcal{A})$ . نميز الحالتين

a. إذا كان $A \in \mathcal{A}$ نستنتج مباشرة $A \in \mathcal{M}$

b. إذا كان $A \notin \mathcal{A}$، فإنه توجد عائلة $\{A_j\}_j$ قابلة للعد عناصرها من $\mathcal{A}$ بحيث:

$$\bigcup_{j \geq 1} A_j = A$$

نضع: $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \forall n \geq 1$

(نفس فكرة التمرين 4 سؤال 2)، لدينا:

$B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \quad , \quad \{B_n\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$

كون $\mathcal{M}$ فئة رتيبة إذن

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{M}$$

ومنه $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$

تمرين 6.

$f: X \to Y$ تطبيق، $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$

برهان: $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma f^{-1}(\mathcal{C})$

رد/ ⊃

$$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \sigma f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

الاستلزام (1) تأتي من خواص الصورة العكسية.

" (2) تأتي من كون $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ عشيرة $\sigma$ و

من كون $\sigma\, f^{-1}(\mathcal{C})$ عشيرة ${}^{2}$ معزية .

/ج/ . واضح أن

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma f^{-1}(\mathcal{C})$$

ومنه تكتب بصيغة مكافئة :

$$\forall B \in \mathcal{C} \ : \ f^{-1}(B) \in \sigma f^{-1}(\mathcal{C})$$

اين

$$\forall B \in \mathcal{C} \qquad B \in \mathcal{J}$$

ومنه

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{J}$$

كون $\mathcal{J}$ عشيرة على $Y$ ينتج

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{J}$$

وتكتب بصيغة مكافئة

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{C}) \ : \quad B \in \mathcal{J}$$

اذن

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{C}) : \ f^{-1}(B) \in \sigma f^{-1}(\mathcal{C})$$

ومنه $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma f^{-1}(\mathcal{C})$

ومنه المساواة .

تمرين 7 . $(X,\tau)$ ف.قيوس، أي $\tau$ عشيرة على $X$ .

$$\mathcal{J}_A = \{A \cap C : C \in \mathcal{J}\}$$

1 . برهن $\mathcal{J}_A$ عشيرة على $A$ ، نتأكد من الشروط الثلاث:

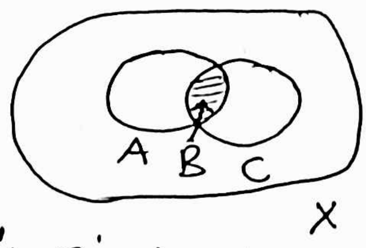
i. $\mathcal{J}_A \neq \phi$ . " لأن $\phi = A \cap \phi$ مع $\phi \in \mathcal{J}$ "

ii. $B \in \mathcal{J}_A \Leftrightarrow B = A \cap C \mid C \in \mathcal{J}$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \complement_A B = A \cap \complement_X C \mid \complement_X C \in \mathcal{J}$$

(لأن $\mathcal{J}$ عشيرة على $X$، إذن هي مستقرة بالنسبة للمتممة)

$$\Rightarrow \complement_A B \in \mathcal{J}_A$$




$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ رسم يوضح

iii. $\forall \{B_j\}_{j\geq 1} \subset \mathcal{J}_A : \bigcup_{j\geq 1} B_j \in \mathcal{J}_A$ ?

لتكن $\{B_j\}_{j\geq 1}$ من $\mathcal{J}_A$

$$B_j \subset \mathcal{J}_A \Leftrightarrow \exists C_j \in \mathcal{J} : B_j = A \cap C_j$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} B_j = \bigcup_{j\geq 1} (A \cap C_j)$$

$$= \bigcup_{j\geq 1} A \cap \bigcup_{j\geq 1} C_j$$

$$= A \cap \bigcup_{j\geq 1} C_j$$

كون $\mathcal{J}$ عشيرة فإن $\bigcup_{j\geq 1} C_j \in \mathcal{J}$

ومنه

$$\bigcup_{j\geq 1} B_j \in \mathcal{J}_A$$

نستنتج أن $\mathcal{J}_A$ عشيرة على $A$.

ج. تعيين $\mathcal{J}_A$ لما $A\in\mathcal{J}$.

$$\mathcal{J}_A = \{A\cap C : C\in\mathcal{J}\}$$
$$= \{B = A\cap C : C\in\mathcal{J}\}$$
$$\subset \mathcal{P}(A)\cap\mathcal{J}$$

الاحتواء $\subset$ واضح حسب تعريف $\mathcal{J}_A$،
لنبرهن الاحتواء العكسي،

$$B\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{J} \Leftrightarrow B\in\mathcal{P}(A)\wedge B\in\mathcal{J}$$
$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} B = A\cap B \wedge B\in\mathcal{J}$$
$$\Leftrightarrow B\in\mathcal{J}_A$$

ومنه $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{J}\subset\mathcal{J}_A$، إذن

$$\mathcal{J}_A = \mathcal{P}(A)\cap\mathcal{J}.$$

توضيح الاستلزام $(**)$:

$$B\in\mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B\subset A \Rightarrow B\cap A = B$$

تمرين 8 .

• $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{C}_0)$ ?

نعلم أن $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\overline{\tau})$

حيث $\overline{\tau}$ هي التبولوجيا الاعتيادية على $\overline{\mathbb{R}}$،

وبالتالي نبرهن

$$\sigma(\overline{\tau}) = \sigma(\mathcal{C}_0) \; ?$$

لدينا :

$$\mathcal{C}_0 \subset \overline{\tau} \Rightarrow \mathcal{C}_0 \subset \overline{\tau} \subset \sigma(\overline{\tau})$$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_0) \subset \sigma(\overline{\tau})$$

نبرهن الآن الاحتواء العكسي، أي :

$$\sigma(\overline{\tau}) \subset \sigma(\mathcal{C}_0) \; ?$$

للحصول على ذلك، يكفي برهنة

$$\overline{\tau} \subset \sigma(\mathcal{C}_0) \; ?$$

ليكن $V \in \overline{\tau}$، يعني أن $V$ مفتوح في $\overline{\mathbb{R}}$ الاعتيادية

ومنه $V \cap \mathbb{R}$ مفتوح في $\mathbb{R}$، إذن

$V \cap \mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} V_i$ / مجالات مفتوحة $V_i = ]a_i, b_i[$

مع $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty$

و $I \subset \mathbb{N}^*$ .

ومنه $\bigcup_{i \in I} V_i \in \sigma(\mathcal{C}_0)$، إذن $V \cap \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{C}_0)$

ومنه $V \cap \mathbb{R} \in \sigma(\tau)$ لكون

$$\sigma(\mathcal{C}_0) \subset \sigma(\tau) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

حيث $\tau$ هي التبولوجيا الاعتيادية على $\mathbb{R}$.

تحصلنا على

$$V \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ومنه $V \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

باعتبار $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ عشيرة أثر لـ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ على $\mathbb{R}$.

ومنه المساواة.

لإكمال البرهان، يكفي برهنة:

$$\sigma(\mathcal{C}_0) \subset \sigma(\mathcal{C}_{+\infty}) \subset \sigma(\mathcal{C}_{-\infty}) \subset \sigma(\mathcal{C}_0)$$

لأجل الحصول على المساواة.

* $\mathcal{C}_0 \subset \sigma(\mathcal{C}_{+\infty})$ ?

ليكن $V = ]\alpha, \beta[ \in \mathcal{C}_0$

$$V = ]\alpha, \beta[ = \bigcup_{n \geq 1} ]\alpha, \beta - \frac{1}{n}]$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} \left\{ ]\alpha, +\infty] - ]\beta - \frac{1}{n}, +\infty] \right\}$$

أي أن $V$ كتب على شكل اتحاد معدود، فرق لعناصر من $\sigma(\mathcal{C}_{+\infty})$ فقط، ومنه نستنتج

$V \in \sigma(\mathcal{C}_{+\infty})$

* $\mathcal{C}_{+\infty} \subset \sigma(\mathcal{C}_{-\infty})$

لتكن $V \in \mathcal{C}_{+\infty}$ ، لدينا

$V = ]\alpha, +\infty] \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

$$V = \bigcup_{n \geq 1} [\alpha + \frac{1}{n}, +\infty]$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} [-\infty, \alpha + \frac{1}{n}[^{c} \in \sigma(\mathcal{C}_{-\infty})$$

لأنه كتب على شكل إتحاد عدود ومتممة لعناصر من $\mathcal{C}_{-\infty}$ .

* $\mathcal{C}_{-\infty} \subset \sigma(\mathcal{C}_{0})$

لتكن $V \in \mathcal{C}_{-\infty}$ ، أي

$V = [-\infty, \beta[ \quad , \beta \in \mathbb{R}$

ومنه

$$V \cap \mathbb{R} = ]-\infty, \beta[ = \bigcup_{n \geq 1} ]-n, \beta[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

لأنه اتحاد عدود لمجالات مفتوحة من $\mathbb{R}$ .

وجدنا $V \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ومنه $V \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

اذن $V \in \sigma(\mathcal{C}_{0})$ (لأننا برهنا: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{C}_{0})$ )

طريقة أخرى باستعمال

$$\{-\infty\} = \bigcap_{n\geq 1} [-\infty, -n[$$

إن $\{-\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ لأنها تقاطع عدود لمجالات مفتوحة في $\overline{\mathbb{R}}$ .

لتكن $V \in \mathcal{C}_{-\infty}$ ، أي

$$V = [-\infty, \beta[ \quad , \beta \in \mathbb{R} .$$

$$= \{-\infty\} \cup ]-\infty, \beta[$$

$$= \{-\infty\} \cup \{ \bigcup_{n\geq 1} ]-n, \beta[ \}$$

$$\in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

ومنه $V \in \sigma(\mathcal{C}_0)$ .

دوما هناك أكثر من طريقة للبرهان، وذلك على حسب الأدوات المستعملة في الاثبات .