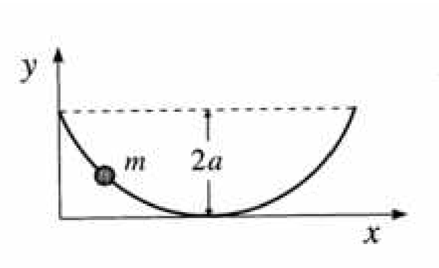
جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي	امتحان مقياس	السنة ثانية
كلية العلوم الدقيقة	ميكانيك التحليلي	ليسانس فيزياء
قسم الفيزياء	المدة: ساعة و نصف	2021-2020
	الدورة: العادية	

***ملاحظة: على الطالب ان يختار تمرين من بين التمارين (2 او 3) كعمل شخصي**

التمرين الأول:(8ن) * علامته تحسب كنقطة الفرض الاول*

الشكل المقابل يوضح حركة نقطة مادية كتلتها (m) تنزلق بدون احتكاك على مسار دويري المعطى بشعاع الموضع الاني :

$$\overrightarrow{o\quad} = a(\theta - s\qquad)\vec{i} + a(1 + c\qquad)\vec{j}$$



1. وضح على الشكل المستوي المرجعي لطاقة الكامنة ؟
2. اكتب تابع لاغرانج للنظام ؟
3. أجد معادلات لاغرانج للحركة ؟

التمرين الثاني:(6ن)

التابع اللاغرانجي لجسيم كتلته m و شحنته e يتحرك حقل مغناطيسي هو :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \alpha(x\dot{y} - y\dot{x})$$

حيث له ثلاث درجات حرية (x, y, z) و α ثابت .

1. حدد العزوم المرافقة للإحداثيات المعممة (x, y, z) ؟
2. حدد عبارة تابع هاملتون H ؟
3. هات المعادلات القانونية للحركة ؟
4. هات الثوابت الزمنية ان وجدت ؟

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(6ن) :

اذا كانت دالة لاغرانج لنظام ميكانيكي معرفة بـــ :

$$L = \frac{1}{2}k\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 s \qquad\right) + g$$

1. حدد العزوم المرافقة للإحداثيات المعممة (θ, φ) ؟
2. حدد عبارة تابع هاملتون H ؟
3. هات المعادلات القانونية للحركة ؟
4. هات الثوابت الزمنية ان وجدت ؟
5. هات حلول معادلات هاملتون للحركة؟ ❋هذا السؤال خاص بالامتحان فقط ❋

انتهى

فاصل بالانسكار
إحالة بالشؤر

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة لخضر - الوادي

جامعة الشهيد حمة لخضر - الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar El-Oued

كليــة : العلوم الدقيقة قسم: الفيزياء
الإسم واللقب : التصحيح النموذجي
مقياس: الميكانيك التحليلي الرقم: / الدفعة : ل2 الفوج: /
التاريخ: ....

رقم التسجيل : ....

الرقم السري: ....

يمنــع علــى الطــالب وضــع أي إشــارة على ورقــة الإمتحــان

الرقم السري
....

العلامة
20/ ....

ت (1) 06 نقاط

① التوضيح $U=0$ نأخذ اسفل المعلم $y=0$ (0,5)

② كتابة لاغرانج للنظام $L_s = T_s - U_s$ (0,5)

(0,25) $T_s = \frac{1}{2} m V_m^2$

$\vec{V}_m = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$

$\vec{V}_m = a\dot{\theta}(1-\cos\theta)\,\vec{i} + a\dot{\theta}(-\sin\theta)\,\vec{j}$

$V_m^2 = a^2\dot{\theta}^2\left[(1-\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2\right]$

$= a^2\dot{\theta}^2(1+1-2\cos\theta)$

$V_m^2 = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)$

$\boxed{T_s = T_m = m a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)}$ (1)

(0,25) $U_s = U_m = m g y_m = m g a(1+\cos\theta)$

$\boxed{U_s = m g a(1+\cos\theta)}$ (1)

$\boxed{L = m a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) - m g a(1+\cos\theta)}$ (1)

(1)

3 إيجاد معادلات الحركة

نوجد احداثية معممة وحيدة وهي

$$(q_1 = \theta)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}} \quad 0,5$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2ma^2\dot\theta(1-\cos\theta) \quad 0,25$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 2ma^2\left\{\ddot\theta(1-\cos\theta) + \dot\theta^2(\sin\theta)\right\} \quad 0,25$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ma^2\dot\theta^2\sin\theta + mga\sin\theta \quad 0,25$$

$$\Rightarrow 2\cancel{m}\cancel{a^2}\left\{\ddot\theta(1-\cos\theta) + \dot\theta^2\sin\theta\right\} = \cancel{m}\cancel{a^2}\dot\theta^2\sin\theta + \cancel{m}g\cancel{a}\sin\theta$$

$$\ddot\theta(1-\cos\theta) + \dot\theta^2\sin\theta = \frac{\dot\theta^2}{2}\sin\theta + \frac{g}{a}\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot\theta(1-\cos\theta) - \frac{\dot\theta^2}{2}\sin\theta - \frac{g}{a}\sin\theta = 0} \quad 0,25$$

ت2: 06 نقاط

1) تحديد العزوم المرافقة:

$$0{,}25 \quad P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \alpha y \Rightarrow \dot{x} = \frac{(P_x + \alpha y)}{m}$$

$$0{,}25 \quad P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \alpha x \Rightarrow \dot{y} = \frac{(P_y - \alpha x)}{m}$$

$$0{,}25 \quad P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m}$$

2) تحديد عبارة التابع H:

$$H = \sum_{j=1}^{3} \dot{q}_j P_j - L \quad 0{,}25$$

$$H = (\dot{x}P_x + \dot{y}P_y + \dot{z}P_z) - L \quad 0{,}125$$

بعد التعويض عن $\dot{x}$، $\dot{y}$، $\dot{z}$ بما سبق نجد

الأخير،

$$H = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) - L$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[(P_x + \alpha y)^2 + (P_y - \alpha x)^2 + P_z^2\right]} \quad 1{,}25$$

3) معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial P_x} = \dfrac{1}{m}(P_x + \alpha y) \\ \dot{P}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{1}{m}(P_y - \alpha x)(-\alpha) = \dfrac{\alpha}{m}(P_y - \alpha x) = \alpha\dot{y} \end{cases} \quad 0{,}75$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{1}{m}(P_y - \alpha x) \quad 0{,}75$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{m}(P_x + \alpha y)(\alpha) = -\frac{\alpha}{m}(P_x + \alpha y) = -\alpha\dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m} \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad 0,75$$

④ الثوابت الزمنية:

أ) z إحداثية مستترة: $p_z = c$ 0,25

ب) لأن t مستترة: $H = c$ 0,25

ت3: $L = \frac{K}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin\theta\right) + g\cos\theta$ معطاة

1) تحديد العزوم المرافقة:

0,5 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = K\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{K}$

0,5 $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = K\dot{\varphi}\sin\theta \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{K\sin\theta}$

② تحديد عبارة الدالة H:

$H = \sum_{j=1}^{2} \dot{q}_j p_j - L$ 0,5

$H = \dot{\theta} p_\theta + \dot{\varphi} p_\varphi - L$ 0,5

بعد التعويض عن $\dot{\theta}$ و $\dot{\varphi}$ بما سبق نجد العبارة الآتية:

$H = \frac{K}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin\theta\right) + g\cos\theta$

$$\boxed{H = \frac{1}{2K}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin\theta}\right) + g\cos\theta} \quad 1$$

③ معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{K} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\left[\dfrac{p_\varphi^2}{2K}\left(-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) + g\sin\theta\right] \end{cases}$$

$$= \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{2K\sin^2\theta} - g\sin\theta \quad 0,75$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{k \sin\theta} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

~~0,75~~

٤/ الثوابت الزمنية:

أ) φ مستترة $\Leftarrow$ $p_\varphi = c$ ثابت زمني 0,25

ب) t مستتر $\Leftarrow$ $H = c$ ثابت زمني 0,25

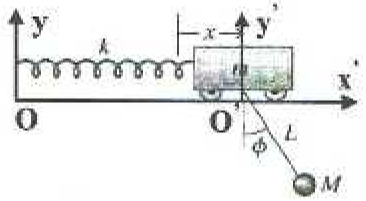
٥) حلول معادلات هاملتون الحركية: 02 نقاط

خاصة بالامتحان وليس بالحل الشخصي!

2

المستوى: السنة ثانية فيزياء **الفرض الاول لمقياس الميكانيكا التحليلية** **الموسم الجامعي: 2018/2017**

التمرين الأول :

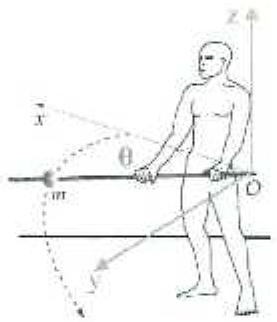


نعتبر النظام الميكانيكي المؤلف من نواس بسيط كتلته (M) وطول خيطه (l)؛ النواس محمول لعربة كتلتها (m) تهتز أفقيا بالمسافة x نتيجة وجود النابض ثابت مرونته k كما موضح في الشكل المقابل :

1. كم عدد الاحداثيات المعممة و درجات الحرية ؟
2. هات القوى المعممة ؟

مساعدة: العربة تعتبر معلم متحرك (معلم نسبي).

التمرين الثاني (المقلاع) :

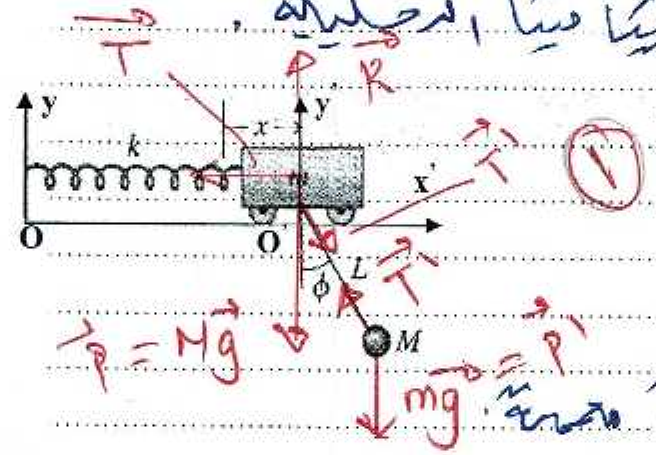


قضيب عديم الكتلة مثبت بيد شخص(المبدأ o)؛ هو يدور في المستوي الافقي حول (المبدأ o) بالسرعة الزاوية الثابتة ($\theta = \omega t$) (انظر الشكل المقابل). الكتلة النقطية m تنزلق بدون احتكاك على طول القضيب. الكتلة m تبدأ الحركة من النقطة A و بدون سرعة ابتدائية حيث ($OA=a$).

1. حدد الاحداثيات المعممة ؟
2. معادلات لاغرانج للحركة و حلولها ؟

التصحيح النموذجي للفرض الأول
مقياس الميكانيكا التحليلية.

06 نقاط



ت1:

1°) عدد من الإحداثيات المعممة:

$$n_j = 2 \cdot N = 4 \equiv (x, y, x', y')$$ 0,25

عدد درجات الحرية:

$$N_{dl} = n_j - l_{holonomic}$$

البحث عن القيود الهولونومية:

من الشكل لدينا

$$x' = l\sin\varphi$$
$$y' = -l\cos\varphi \Rightarrow x'^2 + y'^2 = l^2 \Rightarrow l_h^{(1)} = 1$$

لدينا كذلك

$y = const$ لا يتغير

$$\Rightarrow l_h = 2$$

ومنه

$$l_h = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow N_{dl} = 4 - 2 = 2 \equiv (\varphi, x)$$ 0,25

2°) تحديد القوى المعممة: (أنظر الشكل)

لدينا حسب التعريف

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$ 0,25

$\vec{F}_i$ = محصلة القوى المسلطة على الجسيم الواحد.

$$Q_j = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j}$$ 0,25

$$\vec{F}_1 = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{T}' \quad 0{,}25$$: على الجسم "M"

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 + 0 - T + T'\sin\varphi \\ -Mg + R + 0 - T'\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T + T'\sin\varphi \\ R - Mg - T'\cos\varphi \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

$$\vec{F}_2 = \vec{P}' + \vec{T}' \quad 0{,}25$$ على الجسم m.

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 - T'\sin\varphi \\ -mg + T'\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T'\sin\varphi \\ -mg + T'\cos\varphi \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

$$\underset{M}{\vec{r}_1} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}5 \qquad \underset{m}{\vec{r}_2} = \begin{pmatrix} x + l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}25, \qquad \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}25, \qquad \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

ومنه

$$Q_x = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial\vec{r}_1}{\partial x} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial x}$$

$$= \begin{pmatrix} -T + T'\sin\varphi \\ R - Mg - T'\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T'\sin\varphi \\ -mg - T'\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_x = -T + T'\underline{\sin\varphi} - T'\underline{\sin\varphi} = -T$$

$$\boxed{Q_x = -T = -kx} \quad 0{,}5$$

$$Q_\varphi = \vec{F_1}\cdot\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial \varphi} + \vec{F_2}\cdot\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial \varphi}$$

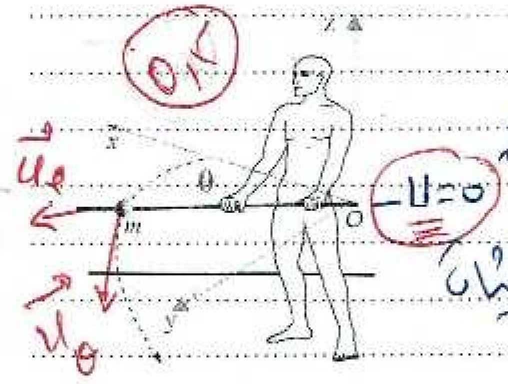
$$= \begin{pmatrix} -T+T'\sin\varphi \\ R-Mg-T'\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T'\sin\varphi \\ -mg+T'\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-T'l\sin\varphi}\cos\varphi + \underline{T'l\sin\varphi\cos\varphi} - mgl\sin\varphi$$

$$= -mgl\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_\varphi = -mgl\sin\varphi}$$ 0,5

ت02: المقلاع.



① نلاحظ أن الحركة في مستوي (O,x,y) وبالتالي نحتاج، الإحداثيات القطبية كإحداثيات معممة أي

(ρ,θ) 0,25

أما درجة الحرية هي واحدة لأن

$$\theta = \omega t \Rightarrow \theta - \omega t = 0$$

هو رابط هولونومي ومنه الإحداثية المعممة المتبقية هي "ρ". 0,25

② إعطاء معادلات الحركة، لدينا، نحدد تابع لاغرانج للنظام.

$$\mathcal{L} = T - U$$ 0,5

$$T = \frac{1}{2}mV^2 \quad , \quad \vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\rho\,\vec{u}_\theta$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 \right) \quad 01$$

$$U = mg\Delta h \quad , \quad h = \text{const} \Rightarrow \Delta h = 0$$

$$U = 0 \quad 01$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 \right)} \quad 0{,}5$$

أما معادلة لاغرانج ، لـ ρ معطاة من

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m\omega^2 \rho$$

$$\Rightarrow m\ddot{\rho} = m\omega^2 \rho$$

$$\boxed{\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0} \quad 01$$

وحلها ، معطى ، لا تعلق من ، الشكل

$$\rho(t) = A \sinh \omega t + B \cosh \omega t$$

حيث

$$\begin{cases} \dot{\rho}(0) = 0 \\ \rho(0) = a \end{cases}$$

$$\dot{\rho}(t) = A\omega \cosh \omega t + B\omega \sinh \omega t$$

$$\dot{\rho}(0) = 0 \Leftrightarrow A\omega \, 1 + B\omega \, (0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow \rho(t) = B \cosh \omega t$$

$$\rho(0) = OA = a \Rightarrow B \cdot 1 = a \Rightarrow B = a$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(t) = a \cosh \omega t}$$

01

امتحان في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(4ن)

نعتبر التحويل الآتي : $P = \frac{\sqrt{mk}}{q}$ $\qquad$ $Q = \frac{p.q^2}{\sqrt{mk}}$

احسب $\{Q,P\}_{q,p}$ ؟ ماذا تستنتج؟

* **يعطى:** $\{f,g\}_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$

التمرين الثاني:(5ن)

التابع الهاملتوني في بعد واحد لنظام ميكانيكي يعطى بــ : $H(q,p,t) = h(q,p) + \alpha[h(q,p)]^2$

حيث ان التابع $h(q\,,p)$ يعرف بـــ: $h(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$. q إحداثية معممة و p العزم المرافق لها؛ α و

ω ثوابت حقيقية موجبة. و يتم اعطاء الشروط الابتدائية الاتية :

$$q(0) = q_0 \quad ; \quad p(0) = p_0 \ ; \ \ h_0 = h(q_0\,,p_0)$$

أي من العبارات الاتية صحيحة او خاطئة مع إعطاء تبرير لإجابتك بشكل قصير جدا.

أ) H تكامل أولي.

ب) $h = h(q,p)$ تكامل أولي.

ج) $\dot{p} = -(1+2\alpha h)q$

د) $\dot{q} = (1+2\alpha h)p$

ه) $\ddot{q} = -\omega^2(1+2\alpha h_0)^2 q$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(5ن)

نعتبر لدينا هزاز توافقي يهتز في بعد واحد خاضع لقوة احتكاك يعطى تابع هاملتون لهذا النظام كالآتي :

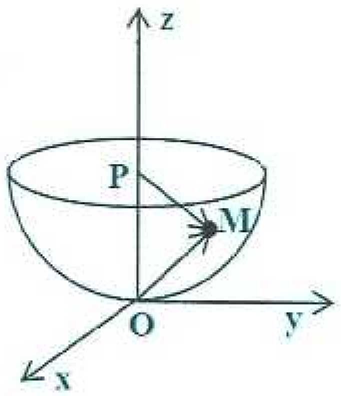
$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \gamma\omega q p$$

حيث **m** , **ω** ثوابت حقيقية موجبة و يمثلان الكتلة و النبض الطبيعي على الترتيب. **γ** ثابت حقيقي يمثل معامل التخامد .

1. استخلص معادلات هاملتون للحركة ؟
2. أثبت أن معادلة الحركة في الأخير تؤول إلى الشكل التالي : $\ddot{q} + \omega^2(1-\gamma^2)q = 0$.
3. ماهي قيم γ حتى تكون الحركة اهتزازية مستقرة حول وضع التوازن $q = 0$ ؟

التمرين الرابع:(6ن)

تنزلق نقطة مادية M كتلتها (m) بدون احتكاك ومقيدة على سطح نصف كرة (نصف قطرها R) من الداخل حيث تخضع النقطة المادية M لقوة الجاذبية (أنظر الشكل المقابل).



معطيات :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = R\vec{k} \\ \overrightarrow{PM} = R\vec{u}_r \end{cases}$$

1. حدد التابع اللاغرانجي لنقطة مادية M بدلالة الاحداثيات المعممة (θ, φ) ؟
2. حدد معادلات الحركة ؟
3. ماذا يمكننا القول عن الإحداثية φ و P_φ ؟

انتهى

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

الحل النموذجي لامتحان الميكانيك التحليلية

كلية : .... قسم ....

الإسم واللقب : ....

مقياس: .... الرقم: .... الدفعة : .... الفوج: ....

التاريخ: .... لسنة ثانية فيزياء

رقم التسجيل: 2017 / 2018

الرقم السري: ....

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري ....

العلامة ..../20

س ① (04 نقاط)

لدينا:

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p q^2}{\sqrt{km}} \\ P = \dfrac{\sqrt{km}}{q} \end{cases}$$

حساب $\{Q, P\}_{q,p}$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{2pq}{\sqrt{km}} \quad 0{,}5 \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{q^2}{\sqrt{km}} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 0 \quad 0{,}5 \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{-\sqrt{km}}{q^2} \quad 0{,}5$$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{2pq}{\sqrt{km}} \cdot 0 - \left(\frac{q^2}{\sqrt{km}}\right)\left(-\frac{\sqrt{km}}{q^2}\right) = -1(-1) = 1 \quad 0{,}5$$

فنستنتج أن التحويلة قانونية ①

حل 02 " 05 نقاط "
تمرين:

$H(q,p) = h(q,p) + \alpha\left(h(q,p)\right)^2$

أ) H تكامل أولي صحيح لأنه $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ 0,5 0,5

ب) $h = h(q,p)$ تكامل أول صحيحة من (أ) 0,5

$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dH}{dt} = \dot{h} + 2\alpha h\dot{h}$

$= \dot{h}(1 + 2\alpha h) = 0$

مادام $1 + 2\alpha h \neq 0 \Leftarrow$ $\boxed{\dot{h} = 0}$ 0,5

$\Rightarrow \boxed{h = Const}$ 0,5

ج) $\dot{p} = -(1 + 2\alpha h)q$ خطأ لأنه من معادلات هاملتون للحركة

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2(1 + 2\alpha h)q$ 0,5

د) $\dot{q} = (1 + 2\alpha h)p$ صحيحة لأنه من معادلات هاملتون للحركة 0,5

$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = (1 + 2\alpha h)p$ 0,5

هـ) $\ddot{q} = -\omega^2(1 + 2\alpha h_0)^2 q$ صحيحة لأنه من (ج) و (د) و (ب) 0,5

$\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q}) = (1 + 2\alpha h)\dot{p} + (2\alpha \underset{0}{\dot{h}})p$

2

$$\ddot{q} = (1+2\alpha h)\left[-\omega^2(1+2\alpha h)\right]q$$

$$= -\omega^2(1+2\alpha h)^2 q \qquad h = const = h_0$$

$$\boxed{\ddot{q} = -\omega^2(1+2\alpha h_0)^2 q}$$ 0,5

ت 03 (05 نقاط)

لدينا: $H(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \gamma\omega q p$

1) معادلات الحركة

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} & \ldots (1) \quad 0,25 \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} & \ldots (2) \quad 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\left[m\omega^2 q + \gamma\omega p\right] & \ldots (1) \quad 0,75 \\ \dot{q} = \dfrac{1}{m}p + \gamma\omega q & \ldots (2) \quad 0,75 \end{cases}$$

2) نشتق المعادلة (2) زمنيا ونعوض كل من $\dot{p}$ و $\dot{q}$ من (1) و (2)

$$\ddot{q} = \frac{1}{m}\dot{p} + \gamma\omega\dot{q}$$

$$\ddot{q} = \frac{1}{m}\left(-m\omega^2 q - \gamma\omega p\right) + \gamma\omega\left(\frac{p}{m} + \gamma\omega q\right)$$

$$= -\omega^2 q - \underbrace{\frac{\gamma\omega}{m}p + \frac{\gamma\omega}{m}p}_{0} + \gamma^2\omega^2 q$$

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + \gamma^2\omega^2 q = -(\omega^2 - \gamma^2\omega^2)q$$ 01

$$= -\omega^2(1-\gamma^2)q$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{q} + \omega^2(1-\gamma^2)q = 0}$$

وهو المطلوب.

03

03

تحديد مجال γ حتى تكون حركة اهتزازية مستقرة حول وضع التوازن $\varphi = 0$.

اي الشرط الرياضي هو $\omega^2(1-\gamma^2) > 0$

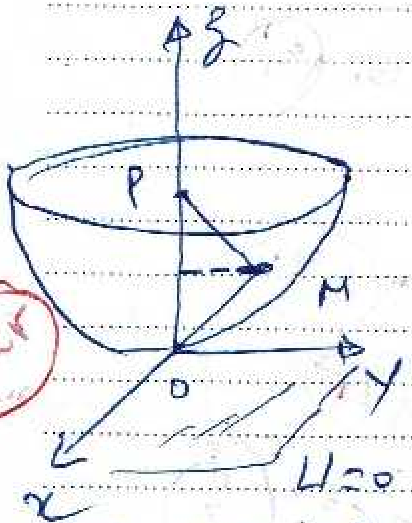
$\Rightarrow (1-\gamma^2) > 0 \Rightarrow \gamma \in]-1 \quad 1[$

02

ت 04) 06 نقاط)

ديناميكيا

1° تحديد تابع لاغرانج L



0,25

$L = T - U$ 0,25

$T = \frac{1}{2} m V_M^2 \qquad \vec{V}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

دينيا من المعطيات

$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$

$= R\vec{k} + R\vec{U}_r$

$\Rightarrow \vec{V}_M = \vec{0} + R\dot{\vec{U}}_r = R(\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi)$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$ 1

$U = +mg\Delta h = mg z_M$

دينيا

$\vec{OM} = R\vec{k} + R\vec{U}_r = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi + 0 \\ R\sin\theta\sin\varphi + 0 \\ R\cos\theta + R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U = mgR(1+\cos\theta)$ 1

$$\Rightarrow \boxed{L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgR(1+\cos\theta)}$$

0,5

ج2 تحديد معادلات الحركة:

$j=1$, $q_1=\theta$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial \theta}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta & 0,5 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta & 0,5 \end{cases}$$

$$\cancel{m}R^2\ddot\theta = \cancel{m}R^2\left(\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta\right)$$

$$\ddot\theta = \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta \quad 0,25$$

$j=2$, $q_2=\varphi$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial \varphi}$

$$0,5\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad 0,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mR^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = \text{Const} = P_\varphi \quad 0,25$$

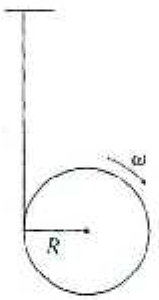
ومنه يمكننا القول عن

φ أحداثية مستترة 0,25

P_φ العزم المرافق لـ φ هو ثابت حركي 0,25

امتحان الاستدراكي في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(8ن)



الشكل المقابل يعرض نموذج yoyo و هو عبارة عن خيط عديم الكتلة معلق بشكل عمودي إلى نقطة ثابتة و نهايته الأخرى ملفوفة عدة مرات حول اسطوانة متجانسة كتلتها (m) نصف قطرها (R)؛ بينما يفك الخيط عندما تتحرك الاسطوانة بشكل عمودي نحو الأسفل (دوران و الانسحاب):

1. وضح المعلم والمستوي المرجعي للطاقة الكامنة ؛
2. اكتب تابع هاميلتون للنظام مع اخذ z الإحداثية المعممة ؟
3. حدد معادلات هاميلتون الحركة ؟
4. هات حلول معادلات هاميلتون للحركة ؟

يعطى : $J=(1/2)mR^2$

التمرين الثاني:(12ن)

إليك نظام ميكانيكي يصفه التابع الهاميلتوني الاتي :

$$H(q,p) = 2p^2 - 4pq^2 + q + 2q^4$$

1. حدد معادلات هاميلتون للحركة؟
2. نضع التحويل القانوني التالي:

$$Q = q + (p - q^2)^2 \qquad P = p - q^2$$

3. احسب $\{Q,P\}_{q,p}$ ؟ ماذا تستنتج؟
4. حدد H' هو تابع هاميلتون بدلالة الإحداثيات الجديدة (Q,P) الناتج عن التحويل القانوني السابق ؟
5. هات معادلات هاميلتون للحركة ؟
6. حدد $Q(t)$, $P(t)$ ؟
7. هل التابع $H'(Q,P)$ يتعلق بالزمن ؟

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

التصحيح النموذجي
ميكانيك التحليلية

كلية : .... قسم : ....
الإسم واللقب : ....
مقياس: .... الرقم: .... الدفعة: .... الفوج: ....
التاريخ: ....
رقم التسجيل : ....
الرقم السري: ....

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الامتحان

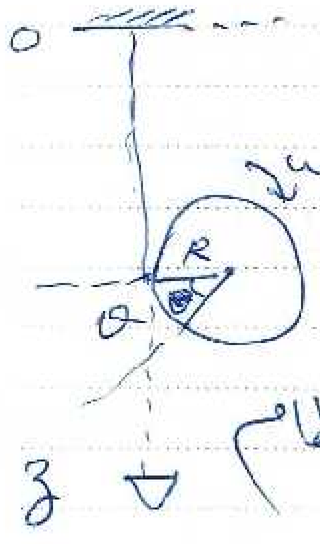
الرقم السري ....

العلامة
20/ ....

تمرين 1: (08 ن) (1.2)

$U = 0$
$z = 0$

$\dot\theta = \omega$



1) توضيح المعلم المستوى المرجعي للطاقة الكامنة انظر الشكل

2) كتابة تابع هاملتون H لهذا النظام بدلالة الاحداثية z

$$H(z, p_z) = \dot z p_z - L(z, \dot z, t)$$

3) كتابة تابع لاغرانج L لهذا النظام.

$$L(z, \dot z, t) = T(\dot z, t) - U(z)$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot z^2 + \frac{1}{2} J \dot\theta^2, \quad J = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\dot z = R \dot\theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot z^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot z^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m\right)\dot z^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m \dot z^2\right).$$

8

$U(z) = -mgz.$

$$\Rightarrow \boxed{L(z,\dot{z},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\right)\dot{z}^2 + mgz.}$$ 1,٢

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{3}{2}m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{2p_z}{3m}$$

$$\Rightarrow H(z,p_z,t) = \frac{2}{3}\frac{p_z}{m}\cdot p_z - L^*(z,\dot{z},t)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{3}{2}m\frac{4}{9}\frac{p_z^2}{m^2} - mgz$$

$$H(z,p_z,t) = \frac{1}{3}\frac{p_z^2}{m} - mgz$$ 1,٢

③ تحرير معادلة هاملتون الحركة.

$$\dot{j}=1 \quad \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{2}{3}\dfrac{p_z}{m} & — ① \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -(-mg) = +mg. & ② \end{cases}$$ ٨ ١

④ إعطاء حلول معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{2p_z}{3m} & — ① \\ \dot{p}_z = mg & ... ② \end{cases} \Rightarrow ①' = \frac{d①}{dt} = \ddot{z} = \frac{2\dot{p}_z}{3m}$$

ونعوض في $\dot{p}_z$ من ②

②

$$\ddot{z} = \frac{2}{3}\frac{\dot{p}_z}{\cancel{m}} = \frac{2}{3}\left(\frac{mg}{m}\right) = \frac{2}{3}\cancel{m}g$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة II

$$\dot{z} = \int \ddot{z}\,dt = \int \frac{2}{3}\cancel{m}g\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\cancel{m}gt + c_1$$

$$z(t) = \int \dot{z}(t)\,dt = \frac{\cancel{m}g}{3}t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\boxed{z(t) = \frac{\cancel{m}g}{3}t^2 + c_1 t + c_2}$$ (1.5)

حيث c_1 ، c_2 ثوابت تحدد من الشروط الابتدائية .

ت2 12

$$H(q,p) = 2p^2 - 4pq^2 + q + 2q^4$$

1° تحديد معادلات الحركة .

$f = 1$. $q = q$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 4p - 4q^2 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(-4p\,2q + 1 + 8q^3\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = 4p - 4q^2 & -(1) \quad (1) \\ \dot{p} = 8pq - 8q^3 - 1 & -(2) \quad (1) \end{cases}$$

(2) بيّن أن التحويل القانوني التالي .

$$\begin{cases} Q = q + (p - q^2)^2 \\ P = p - q^2 \end{cases}$$

(1.2 = 3) حساب $\{Q,P\}_{q,p}$ والاستنتاج .

$$\{Q,P\}_{qp} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$ (0.5)

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 1 + (p-q^2)(2)(-2q) \quad 0,5$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 1 \quad 0,5$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = 2(p-q^2)(1) \quad 0,5$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -2q \quad 0,5$$

$$\{Q, P\}_{qp} = \left[1 + \cancel{4q(p-q^2)}\right] 1 - 2\cancel{(p-q^2)}(-2q)$$

$$= 1 \quad 0,5$$

ومنه التحويل هو قانوني . 1

4) تحديد عبارة H'

$$H'(Q, P) = H\left(q(Q, P), p(Q, P)\right)$$

$$= 2p^2 - 4pq^2 + 2q^4 + q$$

$$= 2\left(p^2 - 2pq^2 + q^4\right) + q = 2\left(p - q^2\right)^2 + q$$

$$= 2\left[\ P\ \right]^2 + \left(Q - P^2\right)$$

$$= 2P^2 - P^2 + Q$$

$$= P^2 + Q$$

$$\boxed{H'(Q, P) = Q + P^2} \quad 1,5$$

5) معادلات الحركة القانونية

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial H'}{\partial P} = 2P & (1) \quad 1 \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q} = -1 & (2) \quad 1 \end{cases}$$

6) حل المعادلات

$$\ddot{Q} = 2\dot{P} = 2(1) = 2 \Rightarrow Q(t) = t^2 + C_1 t + C_2 \quad 1$$

$$\dot{P} = 1 \Rightarrow P(t) = 2t + C \quad 1,5$$

7) لا، H' تتعلق بالزمن 0,5

ومنه لم نحتج تعلق $P(t)$، $Q(t)$ بالزمن

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي	كلية العلوم الدقيقة	قسم الفيزياء

المقياس: الميكانيكا التحليلية	المستوى: السنة الثانية
المدة: ساعة و نصف	الدورة: العادية (2017/16)

امتحان في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(4ن)

نفترض التحويل القانوني الآتي : $P = q\cot p$ $\qquad Q = Ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$

- احسب $\{Q,P\}_{q,p}$ ؟ ماذا تستنتج؟

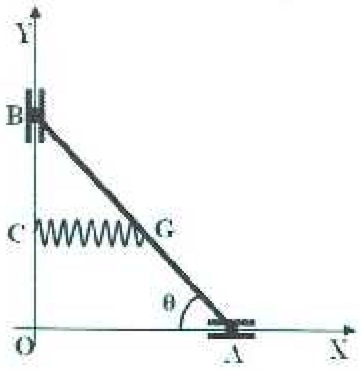
التمرين الثاني:(6ن)

1. لدينا التحويل القانوني المولد بالتابع الآتي: $F(q,Q,t) = \frac{m\omega q^2}{2}\cot Q$
   - احسب $\{q,p\}_{Q,P}$ ؟ ماذا تستنتج؟
2. إذا كان التابع الهاميلتوني H الذي يصف حركة هزاز توافقي يهتز في فضاء الطور (q,p,t) هو:

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

- اكتب التابع الهاميلتوني الجديد H' الذي يصف حركة الهزاز توافقي في فضاء الطور (Q,P,t) الناتج عن التحويل القانوني المعطى في السؤال 1؟
- ماذا تمثل كلا من Q و P ؟

التمرين الثالث:(10ن)



إليك نظام ميكانيكي هولونومي مؤلف من ساق (AB) كتلته m و طوله (2a) نهايتي الساق A وB بإمكانهما الانزلاق بدون احتكاك على المحورين (OX) و(OY) ؛ مركز عطالة الساق G متصل إلى نقطة ثابتة C من المحور (OY) بواسطة نابض مرن ثابت مرونته k و طوله أصلي L_0 (حيث$L_0 > a$) . النابض خلال الحركة يبقى موازي للمحور (OX) (انظر الشكل المقابل) .

الاسئلة:

- عبر عن الإحداثيات (x,y) لمركز عطالة الساق G بدلالة الزاوية θ ؟
- هات عبارة الطاقة الحركية للنظام ؟
- هات عبارة الطاقة الكامنة للنظام ؟

اقلب الصفحة

- استنتج عبارة تابع لاغرانج للنظام ؟
- حدد عبارة تابع هاميلتون لهذا النظام ؟
- هل H يمثل الطاقة الكلية ؟ علل أجابتك ؟
- هات معادلات هاميلتون للحركة ؟
- من اجل الزوايا الصغيرة لـ θ اثبت أن معادلة الحركة تؤول إلى الشكل $\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = C$ ؟ محددا Ω و C ؟

* **يعطى:** $\{f,g\}_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$

التوابع المولدة	التحويلات القانونية
$F = F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F = F_2(q, P, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$
$F = F_3(p, Q, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F = F_4(p, P, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

كليـة : .... قسم: فيزياء

الإسم واللقب : التصحيح النموذجي

مقياس: الميكانيكا التحليلية الرقم: — الدفعة: 1 ماستر الفوج: —

التاريخ: ....

رقم التسجيل : ....

الرقم السري: ....

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري ....

العلامة .... /20

حل التمرين الأول : 04

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p$$

حساب $\{Q, P\}_{q,p}$

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \quad 0,25$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{1}{q} \quad 0,25 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \cot p \quad 0,25$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \cot p \quad 0,25 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{\sin^2 p} \quad 0,25$$

$$\Rightarrow \{Q, P\}_{q,p} = -\frac{1}{q} \cdot -\frac{q}{\sin^2 p} - \cot^2 p$$

$$= \frac{1}{\sin^2 p} - \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 \quad 1$$

نستنتج أن التحويل قانوني. 0,25

8

$$1+\cot^2 Q = \cancel{\frac{1}{\sin^2 Q}} \quad 1+\frac{\cos^2 Q}{\sin^2 Q} = \frac{1}{\sin^2 Q}$$

التمرين الثاني: 06

① لدينا الدالة المولدة للتحويل القانوني:

$$F(q,Q,t) = \frac{m\omega q^2}{2}\cot Q$$

نلاحظ أن $F \equiv F_1$ 0,5

$$\Rightarrow p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q & \cdots ① \quad 0,25 \\ P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = -\dfrac{m\omega q^2}{2}\left(\dfrac{-1}{\sin^2 Q}\right) & ② \quad 0,25 \end{cases}$$

حساب:

$$\{q,p\}_{Q,P}$$

لابد أولاً من إيجاد عبارتي q و p بدلالة Q,P

من المعادلة ② نجد $q^2 = \frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$$

نعوض عن q في المعادلة ① نجد $p = m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \times \cot Q$

2

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q & (0,25) \\ p = \sqrt{m\omega 2P}\cos Q & (0,25) \end{cases}$$

نجد .

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q}$$

$$= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q \cdot \frac{m\omega}{\sqrt{m\omega 2P}}\cos Q + \frac{1}{m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}}\sin Q\,\sqrt{m\omega 2P}\sin Q$$

(0,125) (0,125) (0,125) (0,125)

$$= \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1 \quad (0,25)$$

نستنتج أن التحويل المولد بـ F هو تحويل قانوني . (0,25)

② لدينا تابع الهاملتوني H في فضاء الطور الأصلي (q,p,t) هو .

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

كتابة عبارة H' التابع الهاملتوني الذي يصف حركة الهزاز التوافقي في فضاء الطور (Q,P,t)

$$H'(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(m\omega 2P\cos^2 Q + m^2\omega^2\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q\right)$$

$$\boxed{H'(Q,P,t) = \omega P} \quad (1)$$

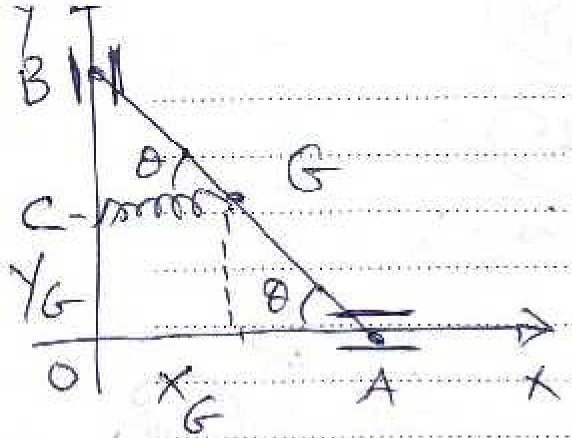
Q تمثل إحداثية مستمرة . (0,25)

P تمثل كمية محفوظة أو ثابتة زمنية

أو تكامل أولي (0,25)

3/

التمرين الثاني



الاجوبة :

① عبارة x_G و Y_G بدلالة θ .

$$\begin{cases} x_G = a\cos\theta \quad 0,25 \\ Y_G = a\sin\theta \quad 0,25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{x_G} = -a\dot{\theta}\sin\theta \quad 0,25 \\ V_{y_G} = a\dot{\theta}\cos\theta \quad 0,25 \end{cases}$$

② عبارة الطاقة الحركية T للنظام

$$T_{S/0} = T_{G/0} + \frac{1}{2} J_{/G}\,\dot{\theta}^2$$

$$T_{G/0} = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) \quad \text{حيث}$$

$$= \frac{1}{2} m\left(a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} \quad 0,75$$

$$\frac{1}{2} J_{/G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ma^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{6} \quad 0,75$$

$$\boxed{T_S = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{6} = \frac{2}{3} ma^2\dot{\theta}^2}$$

③ الطاقة الكامنة للنظام

$$U_S = U_m + U_k = mgy_G + \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

$$U_S = mg\,a\sin\theta + \frac{k}{2}(a\cos\theta - l_0)^2 \quad 0,75 \quad 0,75$$

④ استنتاج عبارة تابع لاغرانج للنظام

$$\boxed{L = T - U = \frac{2}{3} ma^2\dot{\theta}^2 - mga\sin\theta - \frac{k}{2}(a\cos\theta - l_0)^2}$$

0,5

⑤ تحديد عبارة تابع هاملتون H لهذا النظام.

$$\begin{cases} H(q,p,t) = \dot{\theta} P_\theta - L \quad 0,25 \\ P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} ma^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3P_\theta}{4ma^2} \quad 0,25 \end{cases}$$

4

$$H = \frac{3 p_\theta}{4ma^2} \cdot p_\theta - \frac{2}{3} ma^2 \left(\frac{3 p_\theta}{4ma^2}\right) + mga\sin\theta + \frac{k}{2}(a\cos\theta - l_0)^2$$

$$H = \frac{3}{8ma^2} p_\theta^2 + mga\sin\theta + \frac{k}{2}(a\cos\theta - l_0)^2$$ 1,5

⑥ واضح انه

$H = T + U$

ومنه H يمثل الطاقة الكلية

والتعليل $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ 0,5

⑦ معادلات الحركة "معادلات القانونية"

$$\begin{cases} \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{3}{4} \frac{p_\theta}{ma^2} \\ \dot p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\left[mga\cos\theta - k(a\cos\theta - l_0)a\sin\theta\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\theta = \frac{3}{4} \frac{p_\theta}{ma^2} \quad (1) \quad 0,75 \\ \dot p_\theta = -mga\cos\theta + ka(a\cos\theta - l_0)\sin\theta \quad (2) \quad 0,75 \end{cases}$$

⑧ من اجل $\theta \ll 10$

$\sin\theta \simeq \theta$
$\cos\theta \simeq 1$

$(1)' \Leftrightarrow \ddot\theta = \frac{3}{4} \frac{\dot p_\theta}{ma^2}$

$\frac{4}{3} ma^2 \ddot\theta = \dot p_\theta = -mga\cos\theta + ka(a\cos\theta - l_0)\sin\theta$

$\frac{4}{3} ma^2 \ddot\theta = -mga + ka(a - l_0)\theta$

$\frac{4}{3} \ddot\theta + \frac{k}{ma}(l_0 - a)\theta = -\frac{g}{a}$ 0,5

$\ddot\theta + \frac{3}{4a} \cdot \frac{k}{m}(l_0 - a) = -\frac{3g}{4a}$

$\Omega^2 = \frac{3}{4a} \cdot \frac{k}{m}(l_0 - a)$, $C = -\frac{3g}{4a}$ ..

/5

امتحان الاستدراكي في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(6ن)

يترك طيار قذيفة كتلتها M بدون سرعة ابتدائية من ارتفاع z_0 ؛ بفرض أن الحركة تتم في المستوي (o,x,z) :

1. ماهي الإحداثيات المعممة لهذا النظام ؟
2. اكتب تابع لاقرانج للنظام ؟
3. حدد معادلات الحركة ؟
4. هات حلول معادلات الحركة ؟

التمرين الثاني:(14ن)

نعتبر لدينا هزاز توافقي يهتز في بعد واحد (OX) خاضع لقوة احتكاك يعطى تابع لاقرانج لهذا النظام كالآتي :

$$L(x,\dot{x},t) = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right]e^{2\beta t}$$

حيث ω_0 , β ثوابت موجبة و يمثلان معامل التخامد و النبض الطبيعي على الترتيب .

1. برهن أن العزم المرافق (p_x) للإحداثية (x) لا يكون كمية حركة المعتادة ؟ علل؟
2. أعطي عبارة تابع هاميلتون $H(x,p_x,t)$ للنظام ؟
3. برهن أن $H(x,p_x,t)$ ليس تكامل أولي ؟

لنضع التحويل القانوني التالي:$(x,p_x) \xrightarrow{F_2} (Q,P)$ المولد بالتابع $F_2 = F_2(x,P,t) = xPe^{\beta t}$ ونذكر أن في هذه الحالة التحويل القانوني متعلق بالزمن و يكون معين بالمعادلات الآتية:

$$p_x = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \qquad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

حيث H' هو تابع هاميلتون بدلالة الإحداثيات الجديدة (Q,P) الناتج عن التحويل القانوني .

4. برهن أن $H'(Q,P)$ يكون تكامل أولي ؟
5. اكتب معادلات هاميلتون للحركة ؟
6. أثبت أن معادلة الحركة في الأخير تؤول إلى الشكل التالي : $\ddot{Q} + (\omega_0^2 - \beta^2)Q = 0$
7. ناقش حلول المعادلة الأخيرة حسب قيم β ؟
8. أرسم الحلول على نفس المعلم ؟

التصحيح النموذجي لامتحان الاستدراكي في الميكانيكا التحليلية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر. الوادي

كليــة : .... قســم: ....

الإسم واللقب : ....

مقياس: .... الرقم: .... الصفحة : .... الفوج: ....

التاريخ: ....

رقم التسجيل : ....

الرقم السري : ....

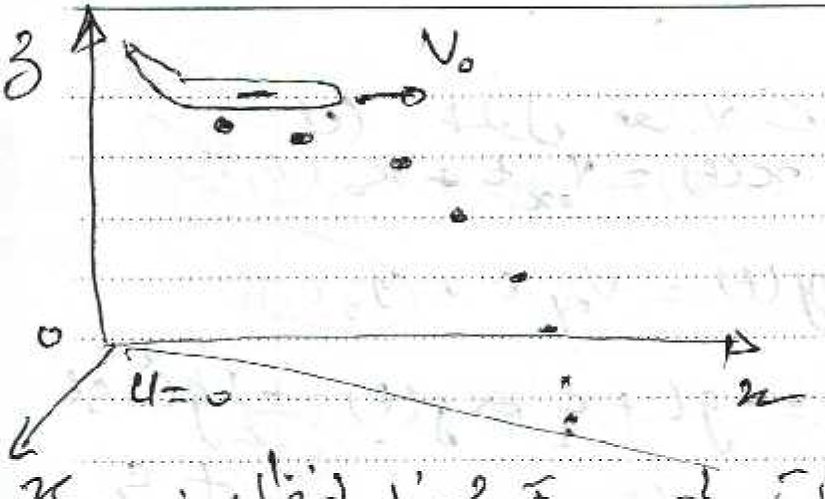
يمنـــع علــى الطـــالب وضـــع أي إشـــارة على ورقـــة الإمتحـــان

الرقم السري ....

العلامة

.... /20

ت ① :



① الاحداثيات المعممة لهذا النظام هي :

$(x . y . z)$ 0,25

② كتابة تابع لاغرانج لهذا النظام

$$\mathcal{L} = T - U \quad 0,25$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} M\left[(V_{0x}+\dot{x})^2 + (V_{0y}+\dot{y})^2 + \dot{z}^2\right] & 1 \\ U = Mgz & 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} M\left[(V_{0x}+\dot{x})^2 + (V_{0y}+\dot{y})^2 + \dot{z}^2\right] - Mgz}$$

③ معادلات الحركة :

a) $q_1 = x$: $M\ddot{x} = 0$ 0,25 $\quad q_3 = z$: $M\ddot{z} = -Mg$ 0,25 (-)

b) $q_2 = y$: $M\ddot{y} = 0$

ج) حلول معادلات الحركة: 0,25

$q_1 = x \Rightarrow \dot{x} = c^{st} \Rightarrow x(t) = V_{0x}\, t + x_0$ 0,25

$q_2 = y \Rightarrow \dot{y} = c^{st} \Rightarrow y(t) = V_{0y}\, t + y_0$ 0,25 0,25

$q_3 = z \Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + c_1 \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$ 0,25 0,25 0,25

من الشروط الابتدائية $t = 0$ $z = z_0$

$\dot{z} = 0$

$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$ 0,75

ت 02:

$$L(x, \dot{x}, t) = \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2\right] e^{2\beta t}$$

1) برهان أن P_x لـ x تكون كمية حركة الطاقة:

$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\, e^{2\beta t} \neq m\dot{x}$. 0,25

وجود الحد الزمني. 0,25

2) أعطاء عبارة تابع هاملتون H.

$$H(x, p_x, t) \overset{Def}{=} \sum \dot{q}_i\, p_q - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$ 0,5

$$H(x,p_x,t) = \dot{x}p_x - \mathcal{L}(x,\dot{x},t)$$

$$p_x = m\dot{x}e^{2\beta t}$$

$$H(x,p_x,t) = m\dot{x}^2 e^{2\beta t} - \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right]e^{2\beta t}$$

$$H(x,p_x,t) = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right]e^{2\beta t} = \frac{p_x^2}{2m}e^{-2\beta t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 e^{2\beta t}$$ 1

③ برهان أن $H(x,p_x,t)$ ليس تكامل أولي:

$\dfrac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ متعلقة بالزمن (بصراحة) 1

④ برهان أن $H'(Q,P)$ يكون تكامل أولي:

لنحسب (نجد) عبارة $H'(Q,P)$

$$H'(Q,P) = H(Q,P) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

انطلاقا من التحويل القانونية:

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = Pe^{\beta t} \\ Q = \dfrac{\partial F_2}{\partial P} = xe^{\beta t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = Pe^{\beta t} & 0{,}25 \\ x = Qe^{-\beta t} & 0{,}25 \end{cases}$$

نعوض كل من x و p_x في عبارة H نجد:

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}P^2\underbrace{e^{2\beta t}\cdot e^{-2\beta t}}_{1} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2\underbrace{e^{-2\beta t}\cdot e^{2\beta t}}_{1}$$

$$H(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2$$ 1

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = xP\beta e^{\beta t} = \left(Qe^{-\beta t}\right)P\beta e^{\beta t} = \beta QP$$ 1

ومنه

$$H'(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2 + \beta QP$$ 1

$\dfrac{\partial H'}{\partial t} = 0$ ومنه هو تكامل أولي

5 كتابة معادلات هاملتون:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} & (1) \\ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} & (2) \end{cases}$$

0,25

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{P}{m} + \beta Q & (3) \\ \dot{P} = -\left(m\omega_0^2 Q + \beta P\right) & (4) \end{cases}$$

0,25 0,25

6 إثبات أن معادلة حركة تؤول إلى الشكل.

$$\ddot{Q} + (\omega_0^2 - \beta^2)Q = 0$$

نشتق المعادلة 3 نجد

$$\ddot{Q} = \frac{\dot{P}}{m} + \beta \dot{Q} \quad (3')$$

0,25

$$\dot{P} = -m\omega_0^2 Q - \beta P \quad (4)$$

نعوض 4 في $3'$ وباستخدام المعادلة 3 نجد

$$\boxed{\ddot{Q} + (\omega_0^2 - \beta^2)Q = 0}$$

1

7 مناقشة الحلول للمعادلة الأخيرة حسب قيم β.

نضع:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

أ) إذا كان $\omega_0 > \beta \Leftarrow \omega > 0$ ومنه

$$Q(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

1

ب) إذا كان $\omega_0 < \beta \Leftarrow 0 < \omega$ ومنه

$$Q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

1

ج) إذا كان $\omega_0 = \beta \Leftarrow \omega = 0$

$\ddot{Q} = 0$

$$\dot{Q} = cst \Rightarrow Q(t) = c_1 t + c_2$$

1

الفرض الثاني لمقياس الميكانيكا التحليلية

التابع الهاميلتوني لجسيم يتحرك عموديا في حقل الجاذبية (g) هو :

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+mgq$$

حيث له درجة حرية واحدة يوصف بواسطة الاحداثية q و العزم المرافق لها p .ليكن لدينا التحويل الاتي :

$$(q,p)\leftrightarrow(Q,P) \qquad \begin{cases} q=P-AQ^2 \\ p=-Q \end{cases}$$

1. أحسب معترض بواصون $\{q,p\}_{Q,P}$ ؟ وماذا تستنتج ؟
2. حدد H' هو تابع هاميلتون بدلالة الإحداثيات الجديدة (Q,P) الناتج عن التحويل القانوني السابق ؟
3. حدد الشرط الذي يوضع على الثابت A حتى تكون Q إحداثية مستترة بالنسبة للتابع H' ؟
4. بعد هذا الاختيار للثابت A حدد معادلات هاميلتون للحركة ؟
5. حدد $Q(t)$, $P(t)$ ؟
6. حدد باستخدام التحويل القانوني الحلول في فضاء الطور الاصلي أي $p(t)$ و $q(t)$ ؟

08 نقاط

التصحيح النموذجي للفرض الثاني.
ميكانيكا التحليلية.

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

حيث q الموضع الاحداثية، و p العزم المرافق لها.

$$(q,p) \longleftrightarrow (Q,P)$$

تحويل

$$\begin{cases} q = P - AQ^2 \\ p = -Q \end{cases}$$

1) حساب معترض بواصون:

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} \quad 0{,}25$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = -2AQ \; 0{,}25 \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial P} = 1 \; 0{,}25$$

$$\frac{\partial p}{\partial P} = 0 \; 0{,}25 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -1 \; 0{,}25$$

$$\{q,p\}_{Q,P} = (-2AQ)(0) - (1)(-1) = +1 \; 0{,}25$$

ونستنتج أن التحويل السابق تحويل قانوني. 0,25

2) تحديد عبارة H':

$$H' = H(q(Q,P), p(Q,P))$$

$$H' = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

$$H' = \frac{1}{2m}(-Q)^2 + mg(P - AQ^2)$$

$$\boxed{H' = mgP + \left(\frac{1}{2m} - mgA\right)Q^2} \quad 01$$

3) تحديد الشرط الرياضي الذي يوضع على الثابت A حتى تكون Q إحداثية مستترة بالنسبة لـ H'

هذا يعني

$$\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial H'}{\partial Q} = \left(\frac{1}{2m} - mgA\right)(2Q) = 0$$

$$\forall Q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2m} - mgA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2m^2 g}} \quad 0{,}2$$

4) معادلات الحركة:

$$0{,}2 \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0$$
$$0{,}2 \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = mg$$
$$\Rightarrow \begin{cases} P = \text{Const} = P_0 \\ Q = mgt + Q_0 \end{cases}$$

5) الحلول هي الحلول:

$$\begin{cases} P = P_0 & 0{,}5 \\ Q = mgt + Q_0 & 0{,}5 \end{cases}$$

6) الحلول في فضاء الطور الأولي:

من التحويل

$$q = P - AQ^2$$

$$\boxed{q = P - \frac{1}{2m^2 g} Q^2 = P_0 - \frac{1}{2m^2 g}\left(mgt + Q_0\right)^2} \quad 0{,}2$$

$$\boxed{p = -Q = -mgt - Q_0} \quad 0{,}2$$

امتحان في مقياس الميكانيكا التحليلية

التمرين الأول:(5ن)

نفترض التحويل القانوني الآتي :

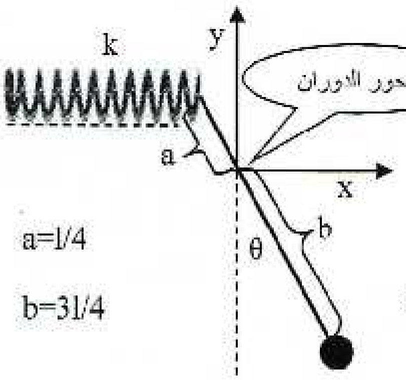
$$(q,p) \to (Q,P) \qquad \begin{cases} Q = q \\ P = p + mq \end{cases}$$

- احسب $\{Q,P\}_{q,p}$ ؟ ماذا تستنتج؟

* يعطى: $\{f,g\}_{x,y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$

التمرين الثاني:(7ن)

ملاحظة: وضح شعاع الموضع و المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية.



a=l/4

b=3l/4

نظام ميكانيكي مؤلف ساق **عديم الكتلة** طوله (l) بإمكانه الدوران حول المحور " مبدأ المعلم"؛ نهايته الاولى تثبت بها كتلة نقطية (m) اما النهاية الثانية متصلة بنابض مرن ثابت مرونته (k) بإمكانه الانزلاق افقيا بدون احتكاك. نزيح الساق عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية صغيرة (θ_0) ثم يترك حرا ليهتز حول وضع توازنه تحت تأثير قوة الجاذبية المفروضة من كتلة نقطية (m) (أنظر الشكل المقابل).

1. حدد عبارة تابع لاغرانج للنظام مستخدما (θ) كالإحداثية معممة ؟
2. حدد معادلات الحركة و ذلك من اجل الزوايا الصغيرة؟ ولاحظ أن هذا النواس وكأنه نواس بسيط يهتز في حقل جاذبية جديد $\left(g + \frac{kl}{12m}\right)$ ؟

التمرين الثالث:(8ن)

نعتبر لدينا هزاز توافقي يهتز في بعد واحد خاضع لقوة احتكاك يعطى تابع هاملتون لهذا النظام كالآتي :

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 e^{2\gamma t} q^2$$

حيث γ , ω_0 ثوابت موجبة و يمثلان معامل التخامد و النبض الطبيعي على الترتيب .

1. برهن أن $H(q,p,t)$ ليس تكامل أولي ؟
2. هات معادلات الحركة الخاصة بالتابع $H(q,p,t)$ للنظام ؟

لنضع التحويل القانوني التالي: $(q,p) \xrightarrow{F} (Q,P)$ المولد بالتابع $F = F(q,P,t) = qPe^{\gamma t} - \frac{1}{2}me^{2\gamma t}q^2$ ونذكر أن في هذه الحالة التحويل القانوني متعلق بالزمن و يكون معين بالمعادلات الآتية:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P} \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

حيث H' هو تابع هاملتون بدلالة الإحداثيات الجديدة (Q,P) الناتج عن التحويل القانوني .

3. برهن أن $H'(Q,P)$ يكون تكامل أولي ؟
4. هات معادلات هاملتون للحركة ؟
5. أثبت أن معادلة الحركة في الأخير تؤول إلى الشكل التالي : $\ddot{Q} + (\omega_0^2 - \gamma^2)Q = 0$
6. حدد الحلول $P(t)$, $Q(t)$ ؟
7. حدد باستخدام التحويل القانوني الحلول في فضاء الطور الاصلي أي $p(t)$ و $q(t)$ ؟

للأستاذ رحال ع

الحل النموذجي

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر . الوادي

كليـة : العلوم الدقيقة قسم: فيزياء

الإسم واللقب :

مقياس: ميكانيكا التحليلية الرقم: الدفعة : 2018/2019 الفوج:

التاريخ: جانفي 2019

رقم التسجيل :

الرقم السري :

يمنع على الطالب وضع أي إشارة على ورقة الإمتحان

الرقم السري

العلامة

/20

ت 1 "5 نقاط"

$$\begin{cases} Q = q \\ P = p + mq \end{cases}$$

• حساب المعترض $\{Q,P\}_{q,p}$

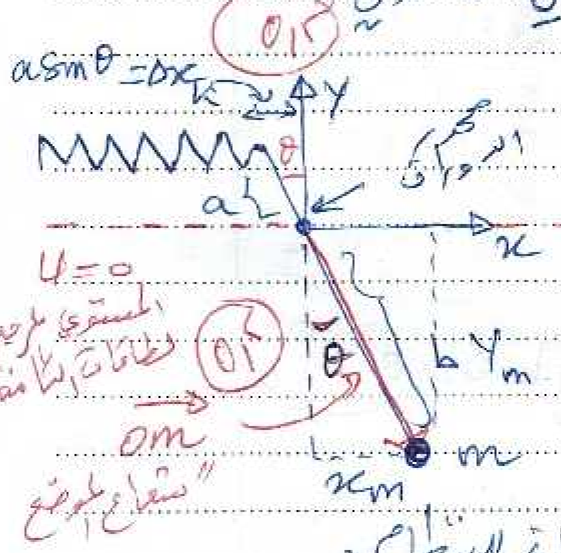
$$\{Q,P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 1 \ (0{,}75), \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 1 \ (0{,}75), \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \ (0{,}75), \quad \frac{\partial P}{\partial q} = m \ (0{,}75)$$

$$\Rightarrow \{Q,P\}_{q,p} = 1\times 1 - 0.m = 1 \quad (0{,}5)$$

• نستنتج أن هذا التحويل قانوني (0,5)

ت 2 "7 نقاط"



$$\begin{cases} x_m = b\sin\theta \\ Y_m = -b\cos\theta \end{cases}$$ الكتلة m

النابض $\Delta x_k = a\sin\theta$

1: تحديد عبارة تابع لاغرانج للنظام:

$L = T - U$ (0,25)

0,25

$T_s = T_k + T_m$, T_k غير موجودة

$= T_m = \frac{1}{2} m V_m^2$. $\vec{V}_m = \frac{d\vec{om}}{dt} = \begin{pmatrix} b\dot{\theta}\sin\theta \\ -b\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$ 0,2

$= \begin{pmatrix} b\ddot{\theta}\cos\theta \\ b\ddot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$

$= b\ddot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V_m^2 = b^2\ddot{\theta}^2$ 0,25

ومنه

$T_s = T_m = \frac{1}{2} m b^2 \ddot{\theta}^2$ 0,25

$U_s = U_m + U_k$ 0,25

$U_m = \cancel{\ } - mg\, oh = -mg\,\overline{Y}_m = -mgb\cos\theta$ 0,75

$U_k = \frac{1}{2} k (ox_k)^2 = \frac{1}{2} k [a\sin\theta]^2$

$= \frac{1}{2} k a^2 \sin^2\theta$ 0,75

إذن

$U_s = \frac{1}{2} k a^2 \sin^2\theta - mgb\cos\theta$.

$$L = T_s - U_s$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + m g b \cos\theta - \frac{1}{2} k a^2 \sin^2\theta}$$

2 - تحديد معادلة الحركة من أجل الزوايا الصغيرة :

أ) لدينا معادلة لاغرانج للحركة في شكلها العام

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad 0,25$$

$$j = 1 \quad q_j = \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad 0,25$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m b^2 \ddot{\theta} \quad 0,25$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = - m g b \sin\theta - k a^2 \sin\theta \cos\theta \quad 0,25$$

$$\Rightarrow m b^2 \ddot{\theta} - \left(- m g b \sin\theta - k a^2 \sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

$$m b^2 \ddot{\theta} + m g b \sin\theta + k a^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

من أجل $\theta \ll 10^\circ$

$$\begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{cases} \quad 0,25$$

$$m b^2 \ddot{\theta} + m g b \theta + k a^2 \theta = 0$$

$$m b^2 \ddot{\theta} + (m g b + k a^2)\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{k a^2}{m b}\right)\theta = 0} \quad \text{I} \quad 0,25$$

ب) ملاحظة أن حد التواتر ... كأنه نواس بسيط في حقل جاذبية جديد $\left(g + \frac{kl}{12m}\right)$

بعد التعويض عن a و b في المعادلة I نجد

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{k\left(\frac{l}{4}\right)^2}{m\left(\frac{3l}{4}\right)}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{kl^2}{16m\frac{3l}{4}}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{kl}{12m}\right)\theta = 0 \quad \ldots \text{II}$$ 0,25

انطلاقا من المعادلة التفاضلية للنواس البسيط:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

حيث

l هو طول الخيط النواس البسيط

وهنا في هذا التمرين يكون "b"

g يمثل حقل الجاذبية الأرضية

وهنا في هذا التمرين يكون $g + \frac{kl}{12m}$ 0,25

ومنه فعلا المعادلة التفاضلية II تعبر عن

حركة نواس بسيط في حقل جاذبية جديد

وهو "$g + \frac{kl}{12m}$".

ت3: "8 نقاط"

I) لدينا تابع هاملتون للهزاز التوافقي هو:

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 e^{2\gamma t} q^2$$

1. برهان أن H ليس تكامل أولي:

لدينا:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}(-2\gamma)e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\gamma)e^{2\gamma t}q^2$$

$$\neq 0$$

ومنه

$$\frac{dH}{dt} \neq 0 \Rightarrow H \neq C^{st}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{k\left(\frac{b}{4}\right)^2}{m\left(\frac{3b}{4}\right)}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{kl^2}{16m\frac{3l}{4}}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{b}\left(g + \frac{kl}{12m}\right)\theta = 0 \quad \ldots \text{II}$$

0,25

انطلاقا من المعادلة التفاضلية للنواس البسيط:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

حيث

و l هو طول خيط النواس البسيط

وهنا في هذا التمرين يكون "b"

و g يمثل حقل الجاذبية الأرضية

وهنا في هذا التمرين يكون $g + \frac{kl}{12m}$

0,25

ومنه نجد المعادلة التفاضلية II تعبر عن

حركة نواس بسيط في حقل جاذبية جديد

هو "$g + \frac{kl}{12m}$".

ت3: "8 نقاط"

I) لدينا تابع هاملتون للهزاز التوافقي هو:

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 e^{2\gamma t} q^2$$

1: برهان أن H ليس تكامل أولي:

لدينا

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{p}{2m}(-2\gamma)e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(2\gamma)e^{2\gamma t}q^2$$

$$\neq 0$$

ومنه

$$\frac{dH}{dt} \neq 0 \Rightarrow \underline{H \neq C^{st}}$$

1

2. معادلات هاملتون للحركة.

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$ (1)

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{p}{m} e^{-2\gamma t} \\ \dot{p} = -\{ m\omega_0^2 e^{2\gamma t} q \} \end{cases}$$ (1,5)

نلاحظ أن هذه المعادلات ليست سهلة الحل نظرا لوجود الزمن "الأسية" ، لهذا عادة ما نختار تحويلات قانونية مناسبة لتبسيط الحل ، وهذا ما سنشاهده في ما يلي.

II لدينا التحويل القانوني التالي والمولد بالتابع

$$F(q,P,t) = qP e^{\gamma t} - \frac{1}{2} m e^{2\gamma t} q^2$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} = P e^{\gamma t} - m e^{2\gamma t} q \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P} = q e^{\gamma t} \end{cases}$$ (0,5) (0,5)

3. برهان أن H' يكون تكامل أول:

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} , \quad \frac{\partial F}{\partial t} = qP\gamma e^{\gamma t} - m\gamma e^{2\gamma t} q^2$$ (0,5)

$$H' = \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma t} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 e^{2\gamma t} q^2 + qP\gamma e^{\gamma t} - m\gamma e^{2\gamma t} q^2 \quad \ldots *$$

حيث هنا نقوم بتعويض الاحداثيات الاصلية (q,p) بدلالة الاحداثيات الجديدة (Q,P) (0,25)

$$\begin{cases} q = Q e^{-\gamma t} \\ p = P e^{\gamma t} - mQ e^{\gamma t} = (P - mQ) e^{\gamma t} \end{cases}$$ (0,5)

نعوض على q, p في المعادلة * نجد

$$H' = \frac{(P - mQ)^2}{2m} \cancel{e^{2\gamma t}}\,\cancel{e^{-2\gamma t}} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \cancel{e^{2\gamma t}} \left(Q^2 \cancel{e^{-2\gamma t}}\right)$$

$$+ \left(Q \cancel{e^{-\gamma t}}\right) P \gamma \cancel{e^{\gamma t}} - m\gamma \cancel{e^{2\gamma t}} \left(Q^2 \cancel{e^{-2\gamma t}}\right)$$

$$= \frac{(P - mQ)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2 - m\gamma Q^2 + \gamma Q P$$ ١

معادلات هاملتون :

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial H'}{\partial P} \\[2ex] \dot{P} = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q} \end{cases}$$ 0,5

١ معادلات بعد إجراء الاشتقاقة

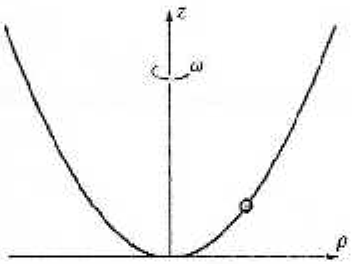
، نحصل على العبارة السابقة

فرض العمل الشخصي لمقياس الميكانيكا التحليلية

ملاحظة1: في التمرين 1 و 2 وضح شعاع الموضع و المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة الثقالية.

ملاحظة2: على كل طالب(ة) ان يختار أحد التمرين 1 و 2 مع التمرين 3 اجباري لكل الطلبة.

التمرين الأول :

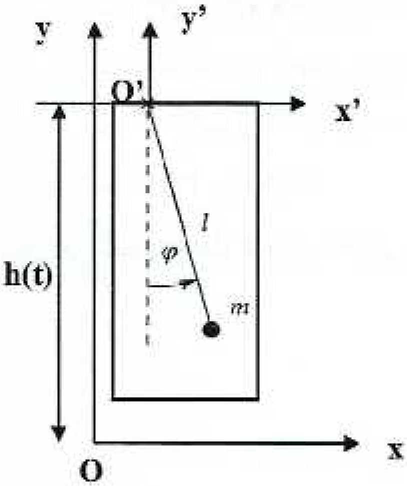


تنزلق خرزة كتلتها (m) بدون احتكاك ومقيدة على طول سلك "بشكل قطع مكافئ" الذي بدوره يلف حول المحور (OZ) بالسرعة الزاوية الثابتة ω ؛ حيث الخرزة تخضع لقوة الجاذبية (أنظر الشكل المقابل).

معطيات : معادلة القطع مكافئ هي ($z=a\rho^2$) .

1. حدد التابع اللاغرانجي للخرزة بدلالة الاحداثية (ρ) ؟
2. حدد معادلة الحركة ؟

التمرين الثاني :



نواس بسيط كتلته (m) وطول خيطه (l) يهتز بالزوايا الصغيرة (φ)؛ معلق الى سقف مصعد الذي يرتفع نحو الاعلى بالمسافة h التي تتعلق الزمن ($y=h(t)$) كما موضحة في الشكل المقابل :

1. حدد التابع اللاغرانجي للخرزة مستخدما (φ , h) كالإحداثيات معممة ؟
2. حدد معادلات الحركة ؟ ولاحظ أن هذا النواس وكأنه نواس بسيط يهتز في حقل جاذبية جديد ($g+\ddot{h}$) ؟

التمرين الثالث :

نظام ميكانيكي مع درجة حرية واحدة لديه التابع الهاميلتوني التالي :

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+p.A(q)+B(q)$$

حيث A و B دوال في الاحداثية المعممة q ؛ p هو العزم المرافق لـ q .

1. حدد السرعة المعممة $\dot{q}$؟
2. هات عبارة التابع اللاغرانجي للنظام السابق $L(q,\dot{q})$ ؟

ص -01-

الحل النموذجي لفرض الأعمال الشخصية .

التمرين الإجباري : 08 نقاط

لدينا $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + p\cdot A(q) + B(q)$

1°) تحديد السرعة المعممة $\dot{q}$

من معادلات الحركة لدينا: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

$$\dot{q} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{2m} + p\cdot A(q) + B(q)\right)$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m} + A(q) \quad \dots (1)$$

2°) تحديد عبارة دالة اللاغرانجي

$$L(q,\dot{q},t)$$

لدينا من التعريف:

$$H = \dot{q}p - L \Rightarrow L = \dot{q}p - H$$

$$L = \dot{q}p - \frac{p^2}{2m} - pA(q) - B(q)$$

لدينا أيضاً من المعادلة (1)

$$\dot{q}p = \frac{p^2}{m} + p\cdot A(q)$$

ونعوض عن $\dot{q}p$

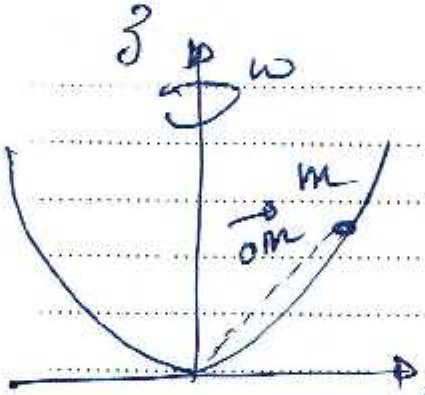
في عبارة L نجد

$$L = \left(\frac{p^2}{m} + pA(q)\right) - \frac{p^2}{2m} - pA(q) - B(q)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - B(q) \qquad p = m\left[\dot{q} - A(q)\right]$$

من المعادلة (1) :

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2m}\left\{m\left[\dot{q} - A(q)\right]\right\}^2 - B(q) = \boxed{\frac{m}{2}\left[\dot{q} - A(q)\right]^2 - B(q)}$$



الحصة 12

حل التمرين الأول.

ص -02-

$z = a\rho^2$

$U = 0 / z = 0$

1° تحديد تابع لاغرانج للجملة بدلالة (ρ)

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2 , \quad \vec{V}_m = \dot{\vec{om}} = \dot\rho \vec{u}_\rho + \rho\omega \vec{u}_\theta + \dot z \vec{k}$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2 + \dot z^2) . \quad z = a\rho^2$$

$$\Rightarrow \dot z = 2a\rho\dot\rho$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2 + 4a\rho^2\dot\rho^2)$$

$$U = mgz = mg(a\rho^2)$$

ومنه:

$$L(\rho,\dot\rho,t) = \frac{1}{2} m(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2 + 4a\rho^2\dot\rho^2) - mga\rho^2$$

2° تحديد معادلة الحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\right) = \frac{\partial L}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = m(\dot\rho + 4a\rho^2\dot\rho)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\right) = m\left\{\ddot\rho + 4a(2\rho\dot\rho\cdot\dot\rho + \rho^2\ddot\rho)\right\}$$

$$= m\left\{\ddot\rho + 8a\rho\dot\rho^2 + 4a\rho^2\ddot\rho\right\}$$

$$= m(1 + 4a\rho^2)\ddot\rho + 8ma\rho\dot\rho^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\left(\rho\omega^2 + 4a\rho\dot{\rho}^2\right) - mga2\rho$$

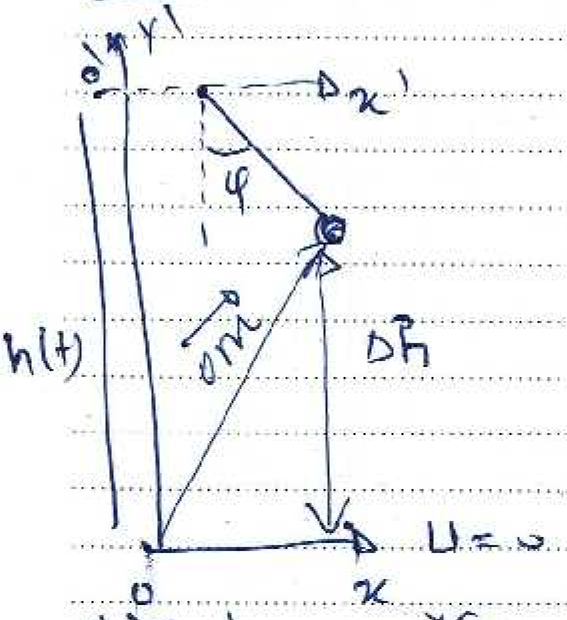
$$= 4ma\dot{\rho}^2\rho + m(\omega^2 - 2ag)\rho$$

ومنه

$$m(1+4a\rho^2)\ddot{\rho} + 8ma\rho\dot{\rho}^2 = 4ma\dot{\rho}^2\rho + m(\omega^2 - 2ag)\rho$$

$$(1+4a\rho^2)\ddot{\rho} + 4ma\dot{\rho}^2\rho = (\omega^2 - 2ag)\rho$$

$$\boxed{(1+4a\rho^2)\ddot{\rho} + 4a\dot{\rho}^2\rho = (\omega^2 - 2ag)\rho}$$



حل التمرين الثاني

12 نقطة

1) تحديد التابع اللاغرانجي للكتلة m باستخدام

الاحداثيات المعممة (φ, h)

$$T_m = \frac{1}{2} m V_m^2 \qquad \vec{V}_m = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\vec{V}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} l \cos\varphi \\ +\dot{\varphi} l \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\vec{i} = \vec{i}'$

$\vec{j} = \vec{j}'$

$$\vec{V}_m = \begin{pmatrix} +\dot{\varphi} l \cos\varphi \\ \dot{h} + \dot{\varphi} l \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} l \cos\varphi \\ \dot{h} + \dot{\varphi} l \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$T_m = \frac{1}{2} m V_m^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{h} \dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{h}^2 \right\}$$

$$U = + m g \Delta h = m g \left(h - Y_m' \right)$$

$$U = m g \left(h - l \cos\varphi \right)$$

ومنه :

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{h} \dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{h}^2 \right) - m g \left(h - l \cos\varphi \right)$$

1° معادلة لاغرانج :

$$j = 1 \quad q_1 = \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \left(l^2 \dot{\varphi} + l \dot{h} \sin\varphi \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left(l^2 \ddot{\varphi} + l \ddot{h} \sin\varphi + l \dot{h} \dot{\varphi} \cos\varphi \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m l \dot{h} \dot{\varphi} \cos\varphi - m g l \sin\varphi$$

$$\Rightarrow l^2 \ddot{\varphi} + l \ddot{h} \sin\varphi + \underline{l \dot{h} \dot{\varphi} \cos\varphi} = \underline{l \dot{h} \dot{\varphi} \cos\varphi} - g l \sin\varphi$$

$$l^2 \ddot{\varphi} + l \ddot{h} \sin\varphi = - g l \sin\varphi$$

$$l^2 \ddot{\varphi} + l \left(\ddot{h} + g \right) \sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(\ddot{h} + g \right)}{l} \sin\varphi = 0 . \quad \sin\varphi \simeq \varphi$$

من أجل
الاهتزازات
الصغيرة

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\ddot{h} + g}{l} \right) \varphi = 0 \quad \dots (1)$$

ص
-05-

$j = 2,\quad q_2 = h$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot h} = m\left(\ell\dot\varphi\sin\varphi + \dot h\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot h}\right) = m\left\{\ell\ddot\varphi\sin\varphi + \ell\dot\varphi^2\cos\varphi + \ddot h\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -mg$$

$$\Rightarrow \ell\ddot\varphi\underbrace{\sin\varphi}_{\varphi} + \ell\underbrace{\dot\varphi^2}_{0}\underbrace{\cos\varphi}_{1} + \ddot h = -mg$$

$$\ell\ddot\varphi\varphi + \ddot h = -mg \quad \ldots (2)$$

نلاحظ من المعادلة (1) أنه

$$\begin{cases} \ddot\varphi + \dfrac{(\ddot h + g)}{\ell}\varphi = 0 \\ \ddot\theta + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0 \end{cases}$$

هي معادلة نواس بسيط.

وبالمقارنة، كأن هذا النواس هو نواس بسيط يهتز في حقل جاذبية شدته $(g+\ddot h)$

وهو المطلوب.