جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى الطبولوجيا

حل السلسلة رقم 01

التمرين الأول: $E=\{a,b,c\}, \tau_1=\{E,\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$

(١). $E,\emptyset\in\tau$.

$$\forall A\in\tau, A\cup\emptyset=A\in\tau.$$

$$\forall A\in\tau, A\cup E=E\in\tau.$$

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=E\in\tau$$

$$\{a,b\}\cup\{a\}=\{a,b\}\in\tau$$

$$\{a,c\}\cup\{a\}=\{a,c\}\in\tau.$$

$$\forall A\in\tau, A\cap\emptyset=\emptyset\in\tau.$$

$$\forall A\in\tau, A\cap E=A\in\tau.$$

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a\}\cup\{a,c\}$$

$$=\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}\in\tau$$

(٢). المغلقات هي متممات عناصر τ.

$$\mathcal{F}=\{E,\emptyset,\{c\},\{b\},\{b,c\}\}.$$

(٣). $\tau_A=\{A\cap O, O\in\tau\}$

$$\tau_A=\{A,\emptyset,\{a\}\}.$$

التمرين الثاني:

(١). اذا كانت τ_1 **و** τ_2 **طبولجيتان على مجموعة** E **وبمان** $\tau_1\cap\tau_2\subseteq\tau_1$ **و** $\tau_1\cap\tau_2\subseteq\tau_2$ **وبالتالي فان التقاطع يعرف طبولوجيا على** E **ولنرى ذلك**

- $E,\emptyset\in\tau_1\cap\tau_2$
- $\forall O_i\in\tau_1\cap\tau_2, \cup_{i\in I}O_i\in\tau_1\cup_{i\in I}O_i\in\tau_1$

$$\cap_{1\leq n}O_i\in\tau1\cap\tau_2.$$

- $\forall O_i \in \tau_1 \cup \tau_2, \cup_{i\in I} O_i \in \tau_1 \cup_{i\in I} O_i \in \tau_1$

$$\cup_{i\in I} O_i \in \tau_1 \cap \tau_2.$$

(٢). بالنسبة للاتحاد ليس بالضرورة ان يبقى اتحادهما قي المجموعتين، اي قد نحصل على جزء من E لايكون من τ_1 او من τ_2 وبالتالي ليس بالضرورة ان يحقق خواصهما، ولذلك يمكن الاستدلال بالمثال المضاد التالي: $E = \{a, b, c\}, \tau_1 = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \tau_1 = \{E, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$ لناخذ مثلا

$$\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_1 \cup \tau_2.$$

التمرين الثالث:

(١). $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau.$

(٢). $\forall b_i \in \mathbb{R}, \cap_i]-\infty, b_i[=]-\infty, \inf_i b_i[\in \tau.$

(٣). $\forall b_i \in \mathbb{R}, \cup_{i\geq 0}]-\infty, b_i[=]-\infty, \sup_i b_i[\in \tau.$

التمرين الرابع:

$\tau_A = \{O \cap A, O \in \tau\}$ لنفرض اولا ان A مفتوحا في E وليكن O مفتوحافي τ وبمان تقاطع

التمرين الخامس:

(١). لنثبت ان τ طبولوجيا. $E \backslash E = \emptyset \Rightarrow E \in \tau, \emptyset \in \tau$.

$$\forall O_i \in \tau, E \backslash \bigcap_{1\leq i\leq n} O_i$$

$$= \bigcup_{1\leq i\leq n} (E \backslash O_i)$$

وبمان اتحاد مجموعات منتهية هو مجموعة منتهية، فان $\bigcap_{1\leq i\leq n} O_i \in \tau.$

$$\forall O_i \in \tau, E \backslash \bigcup_{i\geq 1} O_i$$

$$= \bigcap_{i\geq n} (E \backslash O_i) \subseteq E \backslash O_i \in \tau$$

ومنه τ طبولوجيا على E.

(٢). يكون جزءا F مغلقا في E' اذا كان متمم لمفتوح، اي ان $X - F$ مفتوح وهذا يعني ان ا $X \backslash (X \backslash F) = F$ جزءا منتهيا، اذن المغلقات هي الاجزاء المنتهية اضافة لى المجموعة X والمجموعة الخالية.

(٣). اذا كانت $\acute{A}$ منتهية فانها حسب السؤال السابق مغلقة، اذن

$$\overline{A} = A, \quad \mathring{A} = \emptyset, \quad Fr(A) = \overline{A}.$$

٤). اذا كانت A غير منتهية نناقش حالتين، اذا كانت متممتها منتهية، فان A مفتوح، وبالتالي $\mathring{A} = A$، واصغر مغلق يحويها يكون المجموعة الكلية X اي ان $\overline{A} = X, Fr(A) = X - A$ اما اذا كانت متممة A غير منتهية فان $\overline{A} = X, \mathring{A} = \emptyset, Fr(A) = X$.

التمرين السادس:

تذكير: نقول عن تطبيق من فضاء طبولوجي (X, τ_X) نحو ف ط (Y, τ_Y) انه مستمر عند x_0 اذا تحقق $\forall V \in V_f(x_0), \exists U \in V_x, f(U) \subseteq V$.

ايضا يكون تطبيقا f مستمرا اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لمفتوح في Y هي مفتوح في X.

$A = \{x \in X, f(x) = g(x)\}$ لاثبات ان A مغلق يكفي ان نثبت ان متممتها مفتوح، لتكن $b \in X \backslash A$ اذن $f(b) \neq g(b)$ بمان الفضاء منفصل فانه يوجد مفتوحان يخخقان $f(b) \in O, g(b) \in O'$ و $O \cup O' = \emptyset$ اذن $b \in f^{-1}(O) \cap g^{-1}(O')$ وبالتالي $X\ A \subseteq f^{-1}(O) \cap g^{-1}(O')$ من جهة اخرى لنفرض ان

$$b \in f^{-1}(O) \cap g^{-1}(O') \Rightarrow f(b) \in O, g(b) \in O'$$

حيث $O \cap O' = \emptyset$ لنبرهن ان $b \notin A$.

بالخلف لو نفرض ان $b \in A$ اذن $f(b) = g(b) \in O \cap O' = \emptyset$ $b \in X \backslash A$.

وهذا تناقض، اذن $b \in X \backslash A$.

و بالتالي $X \backslash A$ مفتوح.