

### Exercice 1

Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui définissent une distribution sur  $\mathbb{R}$  et préciser son ordre.

1.  $\langle T_a, \varphi \rangle = a + \int_0^1 \varphi(t) dt .$

2.  $\langle T_b, \varphi \rangle = b \int_{-1}^1 \varphi(t) dt .$

3.  $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \ln|t| \varphi(t) dt, \quad \text{où } H \text{ est la fonction de Heaviside.}$

4.  $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi(n)$

### Exercice 2

Donner une condition suffisante sur la suite numérique  $\{a_n\}$  pour que l'application définie sur  $D(\mathbb{R})$  par  $\varphi \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \varphi(\frac{1}{n})$ , soit une distribution sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 3

Calculer les dérivées au sens des distributions des fonctions suivantes

1.  $f(x) = x \ln|x| .$

2.  $f(x) = |\cos(x)|$

3.  $f(x) = (\cos(x) - x \sin(x)) \chi_{]0, \infty[}(x) + (x \sin(x) - \cos(x)) \chi_{]-\infty, 0[}(x)$

4.  $f(x) = (-2x + 4) \chi_{]1, 3[}(x) + (2x - 4) \chi_{]-\infty, 1[ \cup ]3, \infty[}(x)$

### Exercice 4

Soit  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  la suite des fonctions réelles définie par :  $f_n(x) = \begin{cases} n & : x \in ]0, \frac{1}{n}[ \\ 0 & : \quad \quad \sin x \end{cases}$

1. Déterminer la limite simple de  $\{f_n\}$  .

2. Montrer que  $\{f_n\}$  converge dans  $D'(\mathbb{R})$  vers la distribution de Dirac  $\delta_0$  et que la suite  $\{f_n^2\}$  n'est pas convergente dans  $D'(\mathbb{R})$ .

### Exercice 5

Trouver les limites des suites des distributions suivantes :

1.  $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2 x^2}$

2.  $f_n(x) = \sin(nx)$

### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{\sin(x)}{2} \chi_{]-\infty, \frac{\pi}{2}[}(x)$ .

Déterminer  $f'$  et  $f''$  au sens des distributions, puis déduire une équation différentielle dont  $f$  est solution.

**Exercice 7**

Soient  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $(fT)' = f'T + fT'$ .
2. Déterminer la distribution  $e^{\frac{x^2}{2}} \delta_0$ .
3. Montrer que si  $\left(e^{\frac{x^2}{2}} T\right)' = \delta_0$ , alors  $T$  est solution de l'équation différentielle  $T' + xT = \delta_0$ .

**Exercice 8**

Déterminer le support de la distribution  $T = H + \delta_0$ .

**Exercice 9**

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$

1. Donner une condition sur  $f$  pour que  $f\delta'_0 = 0$ .
2. Dédire que  $x\delta'_0 \neq 0$
3. Si  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \text{Supp}(T)$ , a t'on  $fT = 0$ ?