Université d' El-Oued 2021/2022
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques 1[ère] Année Master (Mathématiques Fondamentales)

Distributions et Analyse de Fourier **Résumé du Cours (Partie 3)**

Présenté par: NISSE Khadidja

Multiplication par une fonction de classe C^∞

Définition

Soient $T \in D'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire fT définie sur $D(\Omega)$ par

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad : \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

est une distribution appelée produit de f par T.

Remarque

Puisque $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$, alors $f\varphi \in D(\Omega)$ et par suite fT est bien définie, de plus, on peut vérifier facilement que c'est une distribution.

Proposition

Soient $T, S \in D'(\Omega)$ et $f, g \in C^\infty(\Omega)$. On a alors :

1. $(f+g)T = fT + gT$
2. $(f.g)T = f(gT)$
3. $f(T+S) = fT + fS$

Exemples

1. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors $fT_g = T_{fg}$. En effet :

   $$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad : \langle fT_g, \varphi \rangle = \langle T_g, f\varphi \rangle = \int_\Omega g(x)\left[f(x)\varphi(x)\right] dx = \int_\Omega (gf)(x)\varphi(x)dx = \langle T_{fg}, \varphi \rangle$$

   d'où, le résultat.

2. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, alors on a pour tout $\varphi \in D(\Omega)$:

   $$\langle f\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, f\varphi \rangle = (f\varphi)(x_0) = f(x_0)\ \varphi(x_0) = f(x_0)\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle f(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

   d'où $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$.

   En particulier, dans $\mathbb{R}$, pour $f(x) = x$ et $x_0 = 0$, on a : $x\delta_0 = 0$

Dérivation d'une Distribution

Définition (Dérivée partielle d'une distribution)

Soient $T \in D'(\Omega)$ et $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \Omega$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on appelle dérivée partielle, au sens des distributions, de T par rapport à x_i, et on note $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, la fonction définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$$

Remarques

1. La fonction $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, définie ci-dessus est une distribution. En effet : la linéarité est claire. Soit maintenant K un compact dans Ω, notons que si $\varphi \in D_K(\Omega)$ alors $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in D_K(\Omega)$.
   Alors, en se servant de la caractérisation de la distribution T, on déduit l'existence de $C_K > 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in D_K(\Omega)$, on a :

   $$|\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle| = |-\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leqslant m_K} \sup_{x \in K} \left| D^\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x) \right| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leqslant m_K + 1} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

   Donc, $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution.

2. On déduit de ce qui précède, que si T est une distribution d'ordre m, alors $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ est une distribution d'ordre au plus $m + 1$.

3. D'après la définition précédente, toute distribution est dérivable. Par suite, toute fonction localement intégrable est dérivable au sens des distributions (ce qui n'est pas le cas au sens classique).

Dérivée d'ordre supérieur

En itérant la formule définissant la dérivée partielle d'une distribution, on peut définir la dérivée de tous ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Définition

Soient $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On appelle dérivée d'ordre α, au sens des distributions, de T, et on note $D^\alpha T$, la distribution définie par :

$$D^\alpha T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Proposition

Soit $(T_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de distributions sur Ω. On a l'implication suivante :

Si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers T dans $D'(\Omega)$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, (D^\alpha T_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $D^\alpha T$ dans $D'(\Omega)$.

<u>Preuve</u>
Soit $\varphi \in D(\Omega)$, en appliquant la définition de la dérivée d'une distribution puis, en tenant compte de la convergence de $(T_n)_{n\geqslant 1}$ vers T, on obtient :

$$\langle D^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, D^\alpha\varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$$

d'où le résultat.

<u>Remarques</u>

1. On déduit de la proposition précédente que l'opérateur D^α défini sur $D'(\Omega)$ est continue. Notons qu'il est de plus linéaire.

2. Plus généralement, si $P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ est un opérateur différentielle à coefficients de classe $C^\infty(\Omega)$, si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers T dans $D'(\Omega)$ alors, $(PT_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers PT dans $D'(\Omega)$.

Exemples

1. $T = \delta_0 \in D'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \delta_0', \varphi\rangle = -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = \varphi'(0)$$

et

$$\forall m \in \mathbb{N} : \langle \delta_0^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m\langle \delta_0, \varphi^{(m)}\rangle = \varphi^{(m)}(0)$$

2. Montrons que $f\delta_0' = -\delta_0$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. En effet

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad : \langle f\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', f\varphi\rangle - \langle \delta_0, (f\varphi)'\rangle = -(f\varphi)'(0) = -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi\rangle$$

3. $T = H$ (La fonction de Heaviside)

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad : \langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = \int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

Donc : $H' = \delta_0$

<u>**Proposition**</u>

Soit $f \in C^1(\mathbb{R} - \{x_0\})$. On suppose que f admet des discontinuités de premières espèces en x_0, ç.a.d : $f(x_0^+), f(x_0^-)$ existent et sont finis. Alors :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma_{x_0}\delta_{x_0}$$

où : $\sigma_{x_0} = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ (le saut en x_0)

Preuve

Notons d'abord que la condition imposée sur f implique que f et f' appartiennent à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et par suite T_f et $T_{f'}$ ont bien un sens.
Maintenant, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{x_0^-} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0^+}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

En effectuant une intégration par parties, en tenant compte du fait que $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \left[f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \sigma_{x_0}\varphi(x_0) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle \\ &= \sigma_{x_0}\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \langle \sigma_{x_0}\delta_{x_0} + T_{f'}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

Généralisation (Formule des sauts)

Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R} - \cup_{j=1}^{m}\{x_j\}\right)$. *On suppose que* f *admet des discontinuités de premières espèces en* x_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$. *Alors :*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{x_j}\delta_{x_j}$$

où : $\sigma_{x_j} = f(x_j^+) - f(x_j^-)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Remarques

1. La proposition précédente et sa généralisation (formule des sauts), restent valables pour une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}$ tout entier.

2. La formule des sauts s'étend aux dérivées successives. Par exemple, pour la dérivées seconde, on a :
   Si $f \in C^2\left(\mathbb{R} - \cup_{j=1}^{m}\{x_j\}\right)$, f et f' admettent des discontinuités de premières espèces en x_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Alors :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{x_j}\delta'_{x_j} + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\sigma}_{x_j}\delta_{x_j}$$

   où : $\widetilde{\sigma}_{x_j} = f'(x_j^+) - f'(x_j^-)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Lemme

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, *alors* $(T_f)' = T_{f'}$

Preuve

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \langle T'_f, \varphi\rangle$$

Théorème

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$, alors $T' = 0$ si et seulement si T est constante, ç.à.d : $T = T_f$ où f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Preuve

On suppose que $T = T_f$ avec f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. D'après le Lemme précédent, on a $(T_f)' = T_{f'} = T_0 = 0$.

On suppose maintenant que $T' = 0$. Alors :

$$\forall \theta \in D(\mathbb{R}) : \langle T', \theta\rangle = -\langle T, \theta'\rangle = 0$$

Donc T s'annule sur toute les fonctions $\psi \in D(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \theta'$ où $\theta \in D(\mathbb{R})$.
Rappelons qu'on a la caractérisation suivante :

$$\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \Longleftrightarrow \psi \in D(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$$

Fixons $\chi \in D(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)dx = 1$.
Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, posons :

$$\psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt\right)\chi(x)$$

Alors : $\psi \in D(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$
Ainsi, d'après la caractérisation précédente, il existe $\theta \in D(\mathbb{R})$ tel que $\psi = \theta'$. Donc :

$$\langle T, \psi\rangle = \langle T, \theta'\rangle = -\langle T', \theta\rangle = 0$$

Puisque

$$\varphi(x) = \psi(x) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt\right)\chi(x)$$

on a :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\rangle + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt\right)\langle T, \chi\rangle = 0 + C\langle 1, \varphi\rangle = \langle C, \varphi\rangle, \quad \text{où} \qquad C = \langle T, \psi\rangle$$

d'où le résultat.

Théorème

Pour tout $T \in D'(\mathbb{R})$, il existe $S \in D'(\mathbb{R})$ tel que $S' = T$.

Idée de la preuve

On définie $S \in D'(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}) : \langle S, \varphi \rangle = -\langle T, \theta \rangle$$

où θ est l'unique fonction dans $D(\mathbb{R})$ définie par (voir la preuve du théorème précédent)

$$\theta' = \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \chi$$

on montre que S est une distribution (linéaire et continue). De plus, on vérifie (grâce à l'unicité de θ) que $\varphi = \psi$. Par suite

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

D'où le résultat.

Restriction d'une distribution

Rappelons que si $\mathcal{U}$ et Ω sont deux ouverts, tels que $\mathcal{U} \subset \Omega$ et si $\varphi \in D(\mathcal{U})$, alors le prolongement de φ par zéro sur Ω appartient à $D(\Omega)$:

$$\varphi \in D(\mathcal{U}) \Longrightarrow \widetilde{\varphi} \in D(\Omega) \quad \text{où} \quad \forall x \in \Omega : \widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \mathcal{U} \end{cases}$$

Définition

Soient $\mathcal{U}$ et Ω deux ouverts, tels que $\mathcal{U} \subset \Omega$ et $T \in D'(\Omega)$.
On appelle restriction de T sur $\mathcal{U}$ et on note par $T|_{\mathcal{U}}$, la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in D(\mathcal{U}) : \langle T|_{\mathcal{U}} \, , \, \varphi \rangle = \langle T \, , \, \widetilde{\varphi} \rangle$$

Translation d'une distribution

Définition

Soient $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle translatée $\tau_a T$ de T, la distribution définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a T \, , \, \varphi \rangle = \langle T \, , \, \tau_{-a} \varphi \rangle \quad \text{où} \quad \tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Remarque

La définition précédente est une extension de ce que nous obtenons dans le cas où $T = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En effet, en utilisant la définition puis le changement de variable $y = x - a$, on obtient :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a f \, , \, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y+a) dy = \langle f \, , \, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

Dilatation d'une distribution

Définition

Soient $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \neq 0$. On appelle la dilatée de T de rapport λ, qu'on note T_λ, la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \langle T_\lambda\,,\,\varphi\rangle = |\lambda|^n \langle T\,,\,\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle \quad \textit{où} \quad \varphi_{\frac{1}{\lambda}}(x) = \varphi(\lambda x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Remarque

La définition précédente est une extension de ce que nous obtenons dans le cas où $T = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (à vérifier !)

Cas particuliers

Pour $\lambda = -1$, on note $\check{\varphi}$ au lieu de φ_{-1} , ç.à.d :

$$\check{\varphi}(x) = \varphi_{-1}(x) = \varphi(-x)$$

Définition (Parité d'une distribution)

Soit $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, posons $\check{T} = T_{-1}$

1. *On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$.*
2. *On dit que T est une distribution impaire si $\check{T} = -T$.*
3. *On dit que T est homogène d'ordre m si $\quad \forall \lambda > 0 : \quad T_\lambda = \lambda^{-m}\, T$.*

Exemple

la distribution de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}^n$ est une distribution homogène d'ordre $(-n)$. En effet, on a pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle (\delta_0)_\lambda\,,\,\varphi\rangle = \lambda^n \langle \delta_0\,,\,\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle = \lambda^n \varphi_{\frac{1}{\lambda}}(0) = \lambda^n \varphi(0) = \lambda^n \langle \delta_0\,,\,\varphi\rangle$$