الجمهورية الجزائرية الديمقرطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

دروس وتمارين محلولة لمقياس رياضيات 1

سنة اولى جذع مشترك علوم المادة

اعداد : د. بالهادي احفوظه

استاذ محاضر بجامعة الوادي

المحتويات

1. نظرية المجموعات

1.1 – المنطق الرياضي

تعريف القضية : نسمي قضية كل جملة يمكن ان تكون صحيحة اوخاطلئة

نرمزلها بالرمز $P, Q, \ldots$

امثلة

(1) الجزائر بلد افريقي. قضية صحيحة

(2) $6 + 1 = 8$ قضية خاطئة

(3) $x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 = 3$ ليست قضية

نفي القضية : نفي قضية هو قضية و تكون صحيحة اذا كانت القضية خاطئة

و تكون خاطئة اذا كانت القضية صحيحة

نرمز لنفي القضية بالرمز $\bar{P}, \bar{Q}, \ldots$

جدول الحقيقة : اذا كانت القضية صحيحة نرمزلها بالرمز 1 اذا كانت خاطئة

نرمزلها بالرمز 0

القضايا المركبة :

الوصل : لتكن P, Q قضيتان

الوصل بين القضيتين P, Q هو القضية Q و P نرمزلها بالرمز $P \wedge Q$

وتكون صحيحة الا ادا كان Q و P صحيحتان معا

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الفصل : لتكن P, Q قضيتان

الفصل بين القضيتين P, Q هو القضية Q او P نرمزلها بالرمز $P \vee Q$

وتكون خاطئة الا ادا كان Q و P خاطئتان معا

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الاستلزام : لتكن P, Q قضيتان

الاستلزام بين القضيتين P, Q هو القضية $\bar{P} \vee Q$ نرمزلها بالرمز $P \Rightarrow Q$

وتكون خاطئة الا ادا كانت P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ : لتكن P, Q قضيتان

االتكافؤ بين القضيتين P, Q هو القضية $(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$

نرمزلها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

وتكون خاطئة الا ادا كان احداهما صحيحة و الاخرى خاطئة

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ملاحظات :

$\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P \quad (1)$

$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q} \quad (1)$

$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q} \quad (2)$

$S \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (S \wedge P) \vee (S \wedge Q) \quad (3)$ الوصل توزيعي على الفصل

$S \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (S \vee P) \wedge (S \vee Q) \quad (4)$ الفصل توزيعي على الوصل

المكممات :

الجملة المفتوحة :

نسمي جملة مفتوحة معرفة علئ المجموعة E كل جملة تحوي علئ متغير او اكثر وتصبح

قضية اذا استبدل المتغير بعنصر من E نرمز لها بالرمز $P(x), Q(x)$, ...

المكمم الكلي

العبارة : من اجل كل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\forall x \in E$

الرمز $\forall$ يسمئ المكمم الكلي اذا ادخل علئ جملة مفتوحة اصبحت قضية

العبارة : يوجد علئ الاقل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\exists x \in E$

الرمز $\exists$ يسمئ المكمم االوجودي اذا ادخل علئ جملة مفتوحة اصبحت قضية

امثلة

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad (1)$ قضية صحيحة

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$ قضية صحيحة

(3) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y$ قضية صحيحة

(3) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}, x < y$ قضية خاطئة

ملاحظة : ترتيب المكممات مهم

نفي المكممات : نفي المكمم االوجودي هو المكمم الكلي والعكس

نفي قضية مكممة هو نفي المكمم ونفي الجملة التي تلي المكمم

امثلة

(1) $\overline{\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 5$

(2) $\overline{\forall x \in \mathbb{R}\,, x^2 \geq 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\,, x^2 < 0$

(3) $\overline{\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}, x < y$

انماط البرهان :

(1) الاستنتاج : يعتمد على القاعدة التالية

اذا كانت P قضية صحيحة و القضية $P \Longrightarrow Q$ صحيحة فان Q قضية صحيحة

(2) البرهان بالخلف : لاثبات صحة قضية P نفرض ان $\bar{P}$ صحيحة ونبين ان

هذا يؤدي الي تناقض عندئذ نستنتج ان P سحيحة

مثال : اثبت ان $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

لنفرض ان $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ معناه $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ كسر غير قابل للاختزال

ينتج ان $a^2 = 2b^2$ اي a^2 زوجي وبالتالي a زوجي

$a = 2k$, $b^2 = 2k^2$ زوجي وبالتالي b زوجي

ومنه $\dfrac{a}{b}$ كسر قابل للاختزال وهذا تناقض مع الفرض

ومنه $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) البرهان بفصل الحالات : اذا كانت القضية $(P \Longrightarrow Q \wedge \bar{P} \Longrightarrow Q)$ صحيحة

نستنتج ان القضية Q صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ مضاعف للعدد 2

(1) n زوجي نضع $n = 2k$

$$n(n+1) = 2k(2k+1) \text{ زوجي}$$

(2) n فردي نضع $n = 2k+1$

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) \text{ زوجي}$$

$$= 2(2k+1)(k+1)$$

ومنه $n(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ زوجي

(4) البرهان بعكس النقيض : يعتمد على التكافؤ $P \Longrightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$

فلكي نثبت صحة الاستلزام $P \Longrightarrow Q$ يكفي اثبات صحة الاستلزام $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 زوجي $\Longrightarrow$ n زوجي

يكفي اثبات ان n فردي $\Longrightarrow$ n^2 فردي

n فردي نضع $n = 2k+1$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ومنه n^2 فردي

(5) البرهان بمثال مضاد :

يتمثل في اثبات عدم صحة القضية $\forall x \in E, P(x)$ فيكفي ايجاد عنصر x_0

من E لا يحقق القضية

مثال : اثبت عدم صحة القضية $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

يكفي اخذ $n = 3$ $3^2 = 2^3$ خاطئة

(6) البرهان بالتراجع :

$P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$

لاثبات صحة القضية $\forall\, n \geq n_0 P(n)$ يكفي تحقيق الشرطين

(1) $P(n_0)$ محققة

(2) صحة الاستلزام $P(n) \implies P(n+1)$

يتمثل في : نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن ان $P(n+1)$ صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3

(1) من اجل $n = 0$

$0(0+1)(0+2) = 0 = 3.0$ محققة

(2) نفرض ان $n(n+1)(n+2) = 3k$

ونبرهن ان $(n+1)(n+2)(n+3) = 3k'$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$$

$$= 3k + 3(n+1)(n+2)$$

$$= 3[k + (n+1)(n+2)]$$

$$= 3k'$$

حيث $k' = 3 + (n+1)(n+2)$

2.1 المجموعات

المجموعة كائن رياضي يتكون من افراد تسمى عناصر المجموعة

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا من E نقول ان a ينتمي الى E ونكتب $a \in E$

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا ليس من E نقول ان a لا ينتمي الى E ونكتب $a \notin E$

ملاحظة

(1) نرمزب $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية, الاعداد الصحيحة

,الاعداد الناطقة, الاعداد الحقيقية, الاعداد المركبة على الترتيب

الاحتواء : نقول ان A مجموعة جزئية من B اذا كانت كل عناصر A موجودة في B

ونكتب $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

المساواة : نقول ان المجموعة A تساوي المجموعة B اذا كانت كل عناصر A

موجودة في B والعكس

ونكتب $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

التقاطع : لتكن B و A مجموعتان من E

مجموعة العناصر المشتركة بين B و A تسمى تقاطع المجموعتين B و A

ونرمز لها بالرمز $A \cap B$

ونكتب $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$

الاتحاد : لتكن B و A مجموعتان من E

نسمى اتحاد المجموعتين B و A مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة

بين B و A نرمز لها الرمز $A \cup B$

ونكتب $A \cup B = \{x \in E / x \in A$ او $x \in B\}$

متممة مجموعة : لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E

متممة A هي المجموعة التي نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ والمعرفة ب

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A \}$$

الفرق بين مجموعتين :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

الفرق التناظري لمجموعتين :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

الجمع : لتكن E و F مجموعتين

الجمع بين E و F هو المجموعة $E + F$ والمعرفة ب

$$E + F = \{ x + y / x \in E \text{ و } y \in F \}$$

الجداء الديكارتي لمجموعتين : لتكن E و F مجموعتين

الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F هو المجموعة $E \times F$ والمعرفة ب

$$E \times F = \{ (x, y) / x \in E \text{ و } y \in F \}$$

ملاحظة :

(1) اذا كان $E = F$

$$E^2 = E \times E = \{ (x, y) / x \in E \text{ و } y \in E \}$$

(2) بصفة عامة

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E_k$$

مثال :

$$F = \{3,4\} \qquad E = \{1,2\}$$

$$E \times F = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4) \}$$

تجزئة مجموعة :

لتكن E مجموعة غيرخالية

نقول عن جملة اجزاء $(E_i)_{i \in I}$ انها تشكل تجزئة ل E اذا تحقق

$$\forall \, i \in I \,, E_i \neq \phi \quad (1)$$

$$\forall \, i,j \in I \,, i \neq j \quad E_i \cap E_j = \phi \quad (2)$$

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E \quad (3)$$

$$E = \{1,2,3\}$$

$$E_3 = \big\{\{1\}\{2\}, \{3\}\big\} \qquad E_2 = \big\{\{2\}, \{1,3\}\big\} \qquad E_1 = \big\{\{1\}, \{2\}, \{2,3\}\big\}$$

E_1 ليست تجزئة بينما كل من E_2 و E_3 تمثل تجزئة

خواص :

$$A \cup B = B \cup A \,, \;\; A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (2)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \,, \;\; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (4)$$

(5)اذا كان $A \subset B$ فان $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

(6) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

اذا كان $A \subset B$ فان $|A| \leq |B|$

(7) مجموعة اجزاء المجموعة :

المجموعات الجزئية ل E تسمى مجموعة اجزاء المجموعة E ونرمز

لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$. اذا كانت $A \in \mathcal{P}(E)$ فان $A \subset E$

مثال :

$$E = \{a, b\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$$

الدالة المميزة

نسمى الدالة المميزة للمجموعة الجزئية $A \subset E$ الدالة التي نرمز لها

χ_A والمعرفة كما يلي : $\chi_A : A \longrightarrow \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

خواص :

(1) $A = B \Longrightarrow \chi_A = \chi_B$

(2) $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$

(3) $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

(4) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

(5) $\chi_{A \cap B} = \chi_A . \chi_B$

3.1 العلاقات

العلاقة بين مجموعتين : لتكن E و F مجموعتان غير خاليتين

تعريف : تسمى علاقة بين E و F كل خاصية ترفق بعناصر من E يعناصر من F

ونرمز لها بالرمز $\mathfrak{R}$

اذا كان $x \in E$ يرفق ب $y \in F$ نكتب $x\ \mathfrak{R}y$

بيان العلاقة : لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة بين E و F

بيان العلاقة $\mathfrak{R}$ هو المجموعة الجزئية من $E \times F$ والمعرفة ب

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(x, y) \in E \times F, \qquad x\ \mathfrak{R}y\ \}$$

مثال : $E = \{1, ,3\}, F = \{2,4,6, \}$

$\mathfrak{R}$ علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

$$E \times F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$$

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(x, y) \in E \times F, \qquad x\ \mathfrak{R}y\ \}$$

$$= \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,6)\}$$

العلاقة العكسية : :لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة بين E و F

العلاقة العكسية للعلاقة $\mathfrak{R}$ هي العلاقة بين F و E والمرموز لها بالرمز $\mathfrak{R}^{-1}$

$$\forall (x, y) \in E \times F\ y\ \ \mathfrak{R}^{-1}\ x$$

مثال : $E = \{1, ,3\}, F = \{2,4,6, \}$

$\mathfrak{R}$ علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

هي$\mathfrak{R}^{-1}$ العلاقة بين F و E معرفة ب y مضاعف x

$$G_{\mathfrak{R}^{-1}} = \{(x, y) \in E \times F,\ \ y\ \mathfrak{R}^{-1}x\ \}$$

$$= \{(2,1),(4,1),(6,1),(6,3)\}$$

العلاقة في مجموعة : اذا كانت $\Re$ علاقة من E في E نقول ان $\Re$ علاقة في E

خواص :

(1) $\Re$ علاقة انعكاسية في E اذا وفقط اذا كان $\forall\, x \in E, x\, \Re x$

(2) $\Re$ علاقة تناظرية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall\, x,y \in E, x\, \Re y \Longrightarrow y\, \Re x$$

(3) $\Re$ علاقة ضد تناظرية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall\, x,y \in E, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re x \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

(4) $\Re$ علاقة متعدية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall\, x,y,z \in E, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re z \end{cases} \Longrightarrow x \Re z$$

مثال :

$\Re$ علاقة $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x,y \in \mathbb{Z}, x\, \Re y \iff x - y \text{ مضاعف ل } 3$$

$\Re$ علاقة انعكاسية في $\mathbb{Z}$ لان :

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x - x = 0 = 3.0 \iff \forall\, x \in \mathbb{Z}, x - x \text{ مضاعف ل } 3$$

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{Z}, \qquad x \Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة انعكاسية في $\mathbb{Z}$

(2) $\Re$ علاقة تناظرية في $\mathbb{Z}$ لان

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}\,, x\, \Re y \Longrightarrow$ 3 مضاعف ل $x - y$

$$\Longrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}\;\; x - y \;\; = 3k \;\; / \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}\;\; y - x \;\; = 3(-k) \;\; / \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall\, x, y \in \mathbb{Z}\,, y\, \Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة تناظرية في $\mathbb{Z}$

(4) $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$ لان

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 3k \\ \text{و} \\ y - z = 3k' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x - z \;\; = 3(k + k')/k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow x\, \Re z$$

ومنه $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$

علاقة التكافؤ : $\Re$ علاقة لتكافؤ قي E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة انعكاسية تناظرية و متعدية

اصناف التكافؤ : $\Re$ علاقة لتكافؤ قي E و $x \in E$

صنف تكافؤ العنصر x هي مجموعة العناصرمن E التي تحقق العلاقة $\Re$ مع x

والتي نرمز لها بالرمز $\dot{x}$ والمعرفة كمايلي

$$\dot{x} = \{\, y \in E \;/\; x \Re y \}$$

مثال :

$\Re$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, x\, \Re y \iff$ 3 مضاعف ل $x - y$

$$\dot{0} = \{\, y \in E \;/\; 0 \Re y \}$$

$$= \{ y \in E / y - 0 = 3k \}$$

$$= \{ \dots - 9, -6, -3,0,3,6,9 \dots \}$$

$$\dot{1} = \{ y \in E \ / \ 1\Re y \}$$

$$= \{ y \in E / y - 1 = 3k \}$$

$$= \{ \dots - 10, -7, -4,0,4,7,10 \dots \}$$

علاقة الترتيب : $\Re$ علاقة ترتيب في E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية

علاقة الترتيب الكلي : $\Re$ علاقة ترتيب كلي في E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة ترتيب في E و $y \Re x$ او $x \Re y$ $\quad \forall x, y \in E ,$

اذا كانت $\Re$ ليست علاقة ترتيب كلي في E فانها علاقة ترتيب جزئي

علاقة الترتيب في $\mathbb{R}$:

نعرف في $\mathbb{R}$ العلاقة $'' \cdots \leq \dots ''$ وهي علاقة ترتيب كلي في $\mathbb{R}$

مثال :

$\Re$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \Re y \iff x \leq y$$

$\Re$ علاقة انعكاسية لان $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة انعكاسية

(2) $\Re$ علاقة ضد تناظرية في $\mathbb{R}$ لان

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \Re y \\ \text{و} \\ y \Re x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x = y$$

ومنه $\Re$ علاقة ضد تناظرية قي $\mathbb{R}$

(4) $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$ لان

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x \leq z$$

$$\Longrightarrow x\, \Re z$$

ومنه $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{R}$

بمان $\Re$ علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية اذا فهي علاقة ترتيب قي $\mathbb{R}$

بمان $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ او $y \leq x$

اذا $\Re$ علاقة ترتيب كلي قي $\mathbb{R}$

خواص علاقة الترتيب قي $\mathbb{R}$:

(1) الجزء الصحيح :

من اجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح $[x]$ او $E(x)$ يحقق

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$ يسمى الجوء الصحيح للعدد x

امثلة :

$x = 2{,}6$ اذا $2 \leq 2{,}6 < 3$ ويكون $[2{,}6] = 2$

$x = -2{,}6$ اذا $-3 \leq -2{,}6 < -1$ ويكون $[-2{,}6] = -3$

(2) كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ ; x < y \Longrightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q} \quad x < r < y$$

(3) الحواد العليا و السفلى :

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$

نقول عن A انه محدود من الاعلى اذا وجد العدد M يحيث :

$$\forall\, x \in A\,, \qquad x \le M$$

نقول عن A انه محدود من الاسفل اذا وجد العدد m يحيث :

$$\forall\, x \in A\,, \qquad x \ge m$$

نقول عندئذ ان M حاد اعلى ل A (علوي) وm حاد ادنى (سفلي) ل A

نقول عن A انه محدود اذا كان محدود من الاعلى و من الاسفل اي

$$\forall\, x \in A\,, \exists\, M, m \quad m \le x \le M$$

(4) الحد الاعلى – الحد الادنى

ليكن A جزء غير خال من $\mathbb{R}$ ومحدود من الاعلى (من الاسفل من)

نسمي اصغر الحواد العليا بالحد الاعلى ونرمز له بالرمز $supA$

نسمي الكبر الحواد الدنيا بالحد الادنى ونرمز له بالرمز $infA$

امثلة :

$$A =]-1,3]$$

$$supA = 3\,, \qquad infA = -1$$

(5)الحد الاكبر والحد الاصغر

اذا كان $supA \in A$ فانه في هذه الحالة يسمى بالحد الاكبر ونرمز له بالرمز $maxA$

اذا كان $infA \in A$ فانه في هذه الحالة يسمى بالحد الاصغر ونرمز له بالرمز $minA$

مثال :

$$A =]-1,3]$$

$maxA \ = supA = 3 \in A$, $\qquad$ غير موجود $minA$ اذا $infA = -1 \notin A$

تمرين (1) :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}, 2 + \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{R}^*\right\}$$

عين $supA$ و $infA$, $maxA$ و $minA$

الحل

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Longrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3 \Longrightarrow 2 < A \leq 3$$

$$maxA \ = supA = 3 \in A$$

غير موجود $minA$ اذا $infA = 2 \notin A$

تمرين (2) :

$(1) \quad sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0 \ \}$ اوجد

$$(2) \quad inf\left\{x + \frac{1}{x}; \quad x > 0\right\}$$

$$(3)^* \quad inf\left\{2^x + 2^{\frac{1}{2}}; \quad x > 0\right\}$$

الحل :

$$(1)\ \Delta = -7 < 0 \quad \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + x + 2 > 0$$

ومنه انه غير موجود $sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0 \ \} = +\infty$

$(2) f(x) \ = \ x + \frac{1}{x}; \quad x > 0$ $\qquad$ نضع

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\forall x > 0 \quad f(x) \geq f(1) = 2$$

$$inf\left\{x + \frac{1}{x}; \quad x > 0\right\} = 2$$

الخاصية المميزة للحد الاعلى (الادنى) :

ليكن $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$

$$supA = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A\ , x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x \end{cases}$$

$$infA = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A\ , x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad x < m + \varepsilon \end{cases}$$

الاثبات

لنفرض $supA = M$ وليكن $\varepsilon > 0$ نضع $M_0 = M - \varepsilon$

نجد $M_0 < M$ وبمان M اصغر الحواد العليا وبالتالي M_0 ليس حاد ا من الاعلى

اذا يوجد $x \in A$ يحيث $M_0 < x$ ومن جهة اخرى $x \leq M$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x \leq M$$

4.1 التطبيقات

4.1.1 التطبيق : نقول عن f انه تطبيق من E نحو F اذا كان كل عنصر x من E يرفق بعنصر وحيد y من F ونكتب :

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \longrightarrow y = f(t)$$

تسمى E مجموعة السوابق او (البدء) و F مجموعة الصور او (الوصول)

x يسمى سابقة y و y صورة x

التطبيق المطابق : نسمي التطبيق المطابق كل تطبيق I_E من E في E المعرف كمايلي

$$I_E : E \to E$$

$$x \to I_E(x) = x$$

اقتصار وتمديد تطبيق : ليكن f تطبيق من E في F و g تطبيق من G في H بحيث $G \subset E$ و $F \subset H$ نقول ان g اقتصار f علىG و fامتداد g على E

تركيب تطبيقات : ليكن f تطبيق من E في F و g تطبيق من F في G التطبيق من Eنحو Gالمرموزله بالرمز $g \circ f$ والمعرف كمايلي

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

يسمى مركب التطبيقين fو g

الصورة المباشرة والصورة العكسية : ليكن f تطبيق من E في F

الصورة المباشرة : ليكن f تطبيق من E في F و $A \subset E$ الصورة المباشرة ل A هي مجموعة صورعناصر A وفق f نرمز لها ب $f\ (A)$ والمعرفة كمايلي

$$f\ (A) = \{f\ (x)\ , x \in A\} \subset F$$

الصورة العكسية : ليكن $B \subset F$

مجموعة عناصر E صورها وفق f في B نرمز لها ب $f^{-1}(B)$ والمعرفة كمايلي

والمعرفة كمايلي

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \} \subset E$$

خواص : ليكن f تطبيق من E في F

ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من E و C, D مجموعتين جزئيتين من F

يكون لدينا عندئذ

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \, . \; f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1)$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad (2)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \; , \; f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C \quad (3)$$

$$f^{-1}(C_F C) = C_E\big(f^{-1}(C)\big)$$

مثال : ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2$

(1) $A = [-3:3] \subset \mathbb{R}$ عين $f(A)$

(2) $B = [0,4] \subset \mathbb{R}^+$ عين $f^{-1}(B)$

الحل :

$$f(A) = \{f(x) = x^2 \, / \, x \in [-3:3]\} = [0,9] \quad (1)$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \, / \, f(x) = x^2 \in [0:4]\} \quad (2)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \, / \, 0 \leq x^2 \leq 4\} = [-2,2]$$

التطبيقات المتباينة – الغامرة – المتقابلة :

ليكن f تطبيق من E في F

التطبيق المتباين :

f تطبيق متباين من E في F $\Leftrightarrow \ \forall\, x, x' \ \in E \ / \ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$

$\Leftrightarrow \ \forall\, x, x' \ \in E / f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

التطبيق الغامر :

f تطبيق غامر من E في F $\Leftrightarrow \ \forall\, y \in F, \exists\, x \in E / y = f(x)$

التطبيق التقابلي :

f تطبيق تقابلي من E في F $\Leftrightarrow \ \forall\, y \in F, \exists!\ \ x \in E / y = f(x)$

f تطبيق تقابلي من E في F $\Leftrightarrow$ f متباين وغامر من E في F

مثال :

ليكن تطبيق من $\mathbb{R} - \{3\}$ في $\mathbb{R} - \{-2\}$ المعرف كمايلي

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

بين f متباين وغامر

$$\forall x, x' \ \in \mathbb{R} - \{3\} : \ \ f(x) = f(x') \ \Leftrightarrow \forall x, x' \ \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\frac{2x + 4}{x - 3} = \frac{2x' + 4}{x' - 3} \Leftrightarrow (2x + 4)(x' - 3) = (2x' + 4)(x - 3)$$

$$\Longrightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

$$\forall\, y \in, \mathbb{R} - \{2\} \exists\, x \in \mathbb{R} - \{3\} / y = f(x)$$

$$y = \frac{2x + 4}{x - 3} \Longrightarrow x = \frac{3y + 4}{y - 2}$$

ومنه f غامر

تمارين محلولة

التمرين الاول :

(1) هل القضايا التالية صحيحة ؟

(ا) $1-1=0$ او $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$

(ب) $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

الحل :

(1) حسب جدول الحقيقة فان القضيتين (ا) و (ب) صحيحتين

(2) نفي القضية (ا) هو $1-1 \neq 0$ و $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

نفي القضية (ا) $x \notin E$ و $x \in \emptyset$ لان $x \in E$ او $x \notin \emptyset$ هو

$$\overline{x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E} \Longleftrightarrow \overline{x \notin \emptyset \text{ او } x \in E}$$

$$\Longleftrightarrow x \in \emptyset \text{ و } x \notin E$$

كتابة القضية (ا) على شكل استلزام

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \text{ او } 1-1=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \Longrightarrow x \in E$$

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجزاء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset C_E^B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

(3)* $A \subset B \quad C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap B$

الحل :

(1) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

لنبرهن ان $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \subset C_E^B$

لنفرض ان $A \cap B = \emptyset$ ونبرهن ان $A \subset C_E^B$

$\forall x \in A \Longrightarrow x \notin B$ (لان $A \cap B = \emptyset$)

$\Longrightarrow x \in C_E^B$

ومنه $A \subset C_E^B$

لنبرهن ان $A \subset C_E^B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$

لنفرض ان $A \subset C_E^B$ ونبرهن ان $A \cap B = \emptyset$

نستعمل البرهان بالخلف لنفرض ان $A \cap B \neq \emptyset$

$\forall x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ و $x \in B$

$\Longrightarrow x \notin B$ و $x \in B$ (لان $A \subset C_E^B$)

وهذا تناقض ومنه $A \cap B = \emptyset$

ومنه ان $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

لنبرهن ان $A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

لنفرض ان $A \subset B$ ونبرهن ان $C_E^B \subset C_E^A$

$$\forall\, x \in C_E^B \Longrightarrow x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \notin A \quad (A \subset B \quad \text{لان})$$

$$\Longrightarrow x \in C_E^A$$

ومنه $C_E^B \subset C_E^A$

بنفس الطريقة نبرهن ان $C_E^B \subset C_E^A \Longrightarrow A \subset B$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجزاء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$

*(2) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

الحل :

لنفرض ان $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ونبرهن ان $B = C$

$$B = B \cap (A \cup B)$$

$$= B \cap (A \cup C) \quad (A \cup B = (A \cup C) \quad \text{لان})$$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap C) \quad (\text{لان } \cap \text{ توزيعي على } \cup)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cup B) \cap C$$

$$= (A \cup C) \cap C = C$$

التمرين االرابع :

لتكن A و B و C مجموعات جزئية للمجموعة E اثبت ان

$$C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B \qquad (1)$$

$$C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B \qquad (2)^*$$

$$A - B = A \cap C_E^{A\cap B} = A \cap C_E^B \qquad (3)$$

$$(\overline{A \cap B}) \cup \left(\overline{C \cap \bar{A}}\right) = E \text{ و } (\overline{A \cup B}) \cap \left(\overline{C \cup \bar{A}}\right) = \phi \qquad (4)^*$$

الحل :

(1) البرهان على $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

للبرهان على $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ يكفي البرهان على $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$ و $C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A\cap B}$

البرهان على $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

$$\forall\, x \in C_E^{A\cap B} \Longrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Longrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B$$

$$\Longrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B$$

ومنه $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

بنغس الطريقة نبرهن ان $C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A\cap B}$

(3) البرهان على $A - B = A \cap C_E^{A\cap B} = A \cap C_E^B$ يكفي البرهان

الاحتواء من الجهاتين

البرهان على $A - B \subset A \cap C_E^{A\cap B}$

$$\forall x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in C_E^B$$

$$\Longrightarrow x \in A \cap C_E^B$$

ومنه $A - B \subset A \cap C_E^{A \cap B}$

بنغس الطريقة نبرهن ان $A \cap C_E^{A \cap B} \subset A - B$

التمرين الخامس :

لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ قي $\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ A \cap B = \phi \Longrightarrow f\ (A \cup B) = f(A) + f(B)$$

(1) اثبت ان $f(\phi) = 0$

(2) اثبت انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

*(3) احسب $f\ (A \cup B \cup C)$ حيث $A, B\ , C \in \mathcal{P}(E)$

الحل :

(1) اثبات ان $f(\phi) = 0$

$$\phi \cap \phi = \phi \Longrightarrow f\ (\phi \cup \phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Longrightarrow f\ (\phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Longrightarrow f\ (\phi) = 0$$

(2) اثبات انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

$\{A - B, A \cap B\}\{A - B, B\}$ تجزئة ل A, $A \cup B$ على الترتيب

$$(A-B) \cap B = \phi \,, \qquad (A-B) \cap (A \cap B) = \phi$$

$(A-B) \cup B = A \cup B$ و $(A-B) \cup (A \cap B) = A$

ومنه حسب (1) نجد

$$f\,(A \cup B) = f\left((A-B) \cup B\right) = f\,(A-B) + f\,(B)$$

$$f(A) = f\,(A-B) + f\,(A \cap B)$$

بطرح العبارتين طرف لطرف

$$f\,(A \cup B) - f(A) = f\,(B) - f\,(A \cap B)$$

$$f\,(A \cup B) = f(A) + f\,(B) - f\,(A \cap B)$$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E قي F و $A\,,B$ مجموعتين جزئيتين من E و D,C من F

(1) اثبت ان $A \subset B \Longrightarrow f\,(A) \subset f(B)$

و $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(2) اثبت ان $f\,(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{-1}\,(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}\,(D)$

(3) اثبت ان $f\,(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{-1}\,(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}\,(D)$

الحل :

(1) اثبات ان $A \subset B \Longrightarrow f\,(A) \subset f(B)$

نفرض ال $A \subset B$ ونبرهن ان $f\,(A) \subset f(B)$

$$\forall\, y \in f\,(A) \Longrightarrow \exists x \in A \,/ y = f\,(x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \in B \ / y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow y \in f\ (B)$$

ومنه $f\ (A) \subset f(B)$

(1) اثبات ان $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

نفرض ال $C \subset D$ ونبرهن ان $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

$$\forall\ x \in\ f^{-1}(C) \Longrightarrow f\ (x) \in C \subset D$$

$$\Longrightarrow f\ (x) \in D$$

$$\Longrightarrow x \in\ f^{-1}(D)$$

ومنه $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(2) اثبات ان $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{-1}\ (C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}\ (D)$

للبرهان على $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ يكفي ان نبرهن على

$f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$ و $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

للبرهان على $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$\forall\ \mathrm{y} \in\ f\ (A \cup B) \Longrightarrow \exists x \in (A \cup B)\ / y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \in A\ \vee x \in B / y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \in A\ / y = f\ (x) \vee x \in B / y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$$

$$\Longrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

اذا$(A) \cup f(B)$ $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ... (1)
$\subset f\ (A \cup B)(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$

للبرهان على $f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$

$$A \subset A \cup B \Longrightarrow f(A) \subset f\ (A \cup B)$$

$$B \subset A \cup B \Longrightarrow f(B) \subset f\ (A \cup B)$$

وعليه فان $f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$ ... (2)

من (1) و (2) نجد ان $(A) \cup f(B) = f\ (A \cup B)$

البرهان على $f^{-1}\ (C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}\ (D)$

$$\forall x \in\ f^{-1}\ (C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \vee f(x) \in f^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

(3) اثبات ان $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{-1}\ (C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}\ (D)$

البرهان على $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

البرهان على $f^{-1}\ (C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}\ (D)$

$$\forall x \in\ f^{-1}\ (C \cap D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge f(x) \in f^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E في F و $A\,,B$ مجموعتين جزئيتين من E و D,C من F

(1) اثبت ان $f^{-1}\,(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}\,(D)$

(2) اثبت ان $f^{-1}\,(C_F^B)=C_F^{f^{-1}(B)}$

اكتب المعادلة هنا.

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$$

$$x\to\frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ؟

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R}-\{2\}$ في $\mathbb{R}-\{a\}$ $g(x)=f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غامر في هذه الجالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad(3)$$

$$x\to 2x+3$$

عين $h\circ g$ و $g\circ h$ عين مجموعة تعريف كلا من $h\circ g$ و $g\circ h$

الحل :

$$\forall x,x'\ \in\mathbb{R}-\{2\}:\ \ f(x)=f(x')\ \Leftrightarrow\forall x,x'\ \in\mathbb{R}-\{2\}$$

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x'+1}{x'-2}\Leftrightarrow(x+1)(x'-2)=(x'+1)(x-2)$$

$$\Longrightarrow x=x'$$

ومنه f متباين

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\,, \exists\, x \in \mathbb{R} - \{3\}/y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Longrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

اذا كان $y = 1$ فان x غير موجود ومنه غير غامر

$g(x) = f(x)$ $\mathbb{R} - \{a\}$ في

$$\forall\, y \in, \qquad \exists\, x \in \mathbb{R} - \{3\}/y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Longrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

حتى يكون غامر يجب ان يكون $y \neq 1$ بمعنى $y \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} \;= g^{-1}(y)$$

ومنه $g^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$

$$x \to g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (3)$$

$$x \to 2x+3$$

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = 2g(x) + 3 = 2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3 = \frac{5x-4}{x-2}$$

$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = \frac{(2x+3)+1}{(2x+3)-2} = \frac{2x+4}{2x-1}$$

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f , g حيث f من E في F و g من F في G

بين ان :

(1) f متباين $\Longrightarrow g \circ f$ متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow f$غامر و $g \circ f$ متباين

*(3) g غامر $\Longrightarrow g \circ f$ غامر

*(4) f غامر $\Longrightarrow g$ متباين و $g \circ f$ غاتر

الحل :

(1) اثبات f متباين $\Longrightarrow g \circ f$ متباين

لنفرض ان $g \circ f$ متباين ونثبت ان f متباين

$$\forall x, x' \in E: \ f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ (لان g تطبيق) $\Leftrightarrow x = x'$ (لان $g \circ f$ متباين)

وعليه فانه اذا كان $g \circ f$ متباين فان f متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow f$غامر و $g \circ f$ متباين

$g \circ f$ متباين فان f متباين ومنه f تقابلي وعليه فان التطبيق f^{-1} موجود

$$[\forall x, x' \in E \ (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Longrightarrow x = x'] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, [(g \circ f) \circ f^{-1}](x) = [(g \circ f) \circ f^{-1}](x') \Longrightarrow x = x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, [g \circ (f \circ f^{-1})](x) = [g \circ (f \circ f^{-1})](x') \Longrightarrow x = x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, g(x) = g(x') \Longrightarrow x = x'$$

$\Leftrightarrow$ gمتباين

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) ليكن $I = [0, \infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \quad \circ \ f$$

الحل :

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+|x'|}$$

$$\Rightarrow |x| = |x'|$$

$$\Rightarrow x = x' \vee x = -x'$$

ومنه fليس متباين

التمرين الحادي عشر :

$\Re$ علاقة قي $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}, x\ \Re y \iff 7 \text{ مضاعف ل } x - y$$

(1) بين ان $\Re$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{Z}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ $\mathbb{Z}\ /\ \Re$

التمرين الثاني عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathfrak{R}y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathfrak{R}y \iff x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب في $\mathbb{R}$

(2) هل $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب كلي في $\mathbb{R}$?

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \qquad A\,\mathfrak{R}B \iff A \subset B$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب في $\mathcal{P}(E)$

(2) هل $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب كلي في $\mathcal{P}(E)$?

التمرين الخامس عشر :

عين $supA$, infA , maxA minA في كل حالة

(1) $A = \{-x^2 + 2x, x \in]1,2[\}$

$$A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\quad(2)$$

$$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\quad(3)$$

$$A=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x^3>8\}\quad(4)^*$$

الحل

$$A=\{-x^2+2x, x\in\,]1,2[\}\quad(1)$$

$$f(x)=-x^2+2x$$

$$f'(x)=-2x+2$$

اذا كان $x\in\,]1,2[$ فان $f'(x)<0$

$$supA=f(1)=1\notin A\ , infA=f(2)=0\notin A$$

ومنه $maxA, minA$ غير موجود

$$A=\{1+\ ;n\in\mathbb{N}^*\}\quad(2)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-1\le(-1)^n\le1\Longrightarrow\ -1\le\frac{(-1)^n}{n}<1$$

$$\Longrightarrow 0\le1+\frac{(-1)^n}{n}<2$$

$$supA=2\notin A\ , infA=0\in A$$

ومنه $minA=0$ و $maxA$ غير موجود

$$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\quad(3)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}=1-\frac{1}{4n+2}$$

$$n>0\Longrightarrow\frac{1}{2}<1-\frac{1}{4n+2}<1$$

$$supA = 1 \notin A \,, infA = \frac{1}{2} \notin A$$

ومنه $maxA, minA$ غير موجود

التمرين السادس عشر :

لتكن المجموعة

$$A = \left\{ \frac{n+2}{n-1} \;; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

(1) بين ان $\mathrm{infA} = 1 \,, supA = 4$

(2) هل maxA minA موجودة ?

(3)

$$B = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{n+2}{n-1} \;; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

عين $\mathrm{infB} \,, supB$

$$C = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1} \;; n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \right\}$$

عين $supC$

الحل

$$\frac{n+2}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1}$$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{n-1} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1+\frac{3}{n-1} \leq 4$$

ومنه $supA = 4$

وبمان $4 \in A$ اذا $maxA = 4$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{3}{n-1} > 1$$

ومنه $infA = 1$ وبمان $1 \notin A$ اذا $minA$ غير موجود

$$B = \left\{\frac{1}{4}+\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} = \underbrace{\left\{\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}}_{A} + \underbrace{\left\{\frac{1}{4}\right\}}_{D}$$

$$supB = supA + supD = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$infB = infA + infD = +\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}$$

$$C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} = \underbrace{\left\{\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{4}\right\}}_{D}$$

$$supC = sup(A \cup D) = maxs(upA, supD) = max\left(4, \frac{1}{4}\right) = 4$$

سلسلة تمارين رقم 1 (المنطق الرياضي – المجموعات – العلاقات – التطبيقات)

التمرين الاول :

(1) هل القضايا التالية صحيحة ؟

(ا) $1-1=0$ او $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$

(ب) $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cap B=\emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

(3) $A \subset B \quad C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap B$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cup B= A \cup C \quad A \cap B= A \cap C \Longrightarrow B=c$

(2) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap(A-C)$

التمرين االرابع :

لتكن A و B اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $C_E^{A \cap B}=C_E^A \cup C_E^B$ (2) $C_E^{A \cup B}=C_E^A \cap C_E^B$

(3) $A-B=A \cap C_E^B$

$$(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) = E$$ و $$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \bar{A}}) = \phi$$ (4)*

التمرين الخامس :

لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ في $\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ A \cap B = \phi \Longrightarrow f\ (A \cup B) = f(A) + f(B)$$

(1) اثبت ان $f(\phi) = 0$

(2) اثبت انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

(3) احسب $f\ (A \cup B \cup C)$ حيث $A, B\ , C \in \mathcal{P}(E)$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E في F و $A\ , B$ مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

(1) اثبت ان $A \subset B \Longrightarrow f\ (A) \subset f(B)$

و $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(2) اثبت ان $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{-1}\ (C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}\ (D)$

(3) اثبت ان $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{-1}\ (C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}\ (D)$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E في F و $A\ , B$ مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

(1) اثبت ان $f^{-1}\ (C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}\ (D)$

(2) اثبت ان $f^{-1}(C_F^B) = C_F^{f^{-1}(C)}$

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ؟

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R} - \{2\}$ قي $\mathbb{R} - \{a\}$ $g(x) = f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غام في هذه الجالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (3)$$
$$x \to 2x + 3$$

عين $h \circ g$ هل يمكن تعيين $g \circ h$ علل

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f , g حيث f من E قي F و g منF قي G

بين ان :

(1) f متباين $\Longrightarrow$ $g \circ f$ متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow$ fغاتر و $g \circ f$ متباين

(3) g غامر $\Longrightarrow$ $g \circ f$ غامر

(4) f غامر $\Longrightarrow$ g متباين و $g \circ f$ غاتر

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) ليكن $I = [0,\infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$

التمرين الحادي عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\,\mathfrak{R}y \iff$ $x - y$ مضاعف ل 7

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ $\mathbb{Z} / \mathfrak{R}$

التمرين الثاني عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\,\mathfrak{R}y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\Re$ علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\Re y \iff x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان $\Re$ علاقة ترتيب في $\mathbb{R}$

(2) هل $\Re$ علاقة ترتيب كلي في $\mathbb{R}$ ؟

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\Re$ علاقة في $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \qquad A\,\Re B \iff A \subset B$$

(1) بين ان $\Re$ علاقة ترتيب في $\mathcal{P}(E)$

(2) هل $\Re$ علاقة ترتيب كلي في $\mathcal{P}(E)$ ؟

التمرين الخامس عشر :

عين $supA$, infA , maxA minA في كل حالة

(1) $A = \{-x^2 + 2x, x \in]1,2[\}$

(2) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \; ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(3) $A = \left\{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \; ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$(4)^*$ $A = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^3 > 8\}$

الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 – عموميات

1 – 1 تعريف : نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة من $E \subseteq \mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ ترفق بكل عنصر من E بعنصر على الاكثر من $\mathbb{R}$ ونرمز لها بالرمز $f, g, h, \dots$

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

1 – 2 مجموعة تعريف دالة : هي مجموعة الاعداد الحقيقيةالتي لها صورة بالدالة f ونرم لها بالرمز D_f

امثلة

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ معرفة على $\mathbb{R}$ ومنه $D_f = \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 3}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

(3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ معرفة على المجال $[-1,1]$ ومنه $D_f = [-1,1]$

ملاحظات :

(1) دوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

(2) الدوال الناطقة معرفة اذا كان المقام غير معدوم

(3) دالة الجذر معرفة اذا كان ما داخل الجذر موجب

(4) الدوال $x \longrightarrow cos(x)$ $x \longrightarrow sin(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$

1 – 3 بيان دالة :

تعريف : نسمي بيان الدالة f مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $\{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$ ونرمز لها بالرمز Γ ونكتب

$$\Gamma = \{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$$

2 – الدوال الزوجية – الفردية – الدورية

f زوجية $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : -x \in D_f ; f(-x) = f(x)$

f فردية $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : -x \in D_f ; f(-x) = -f(x)$

f دورية $\Leftrightarrow \forall x \in D_f : x + r \in D_f ; f(x + r) = f(x)$

ملاحظة : اذا كانت f زوجية (فردية على التوالي) فان بيانها متناظر بالنسبة

لمحور الترتيب (للمبدا على التوالي) يكفي دراسة دالة زوجية او فردية على D_f

$\mathbb{R}_+ \cap D_f$ ثم اتمام بيان f بالتناظر

ملاحظة : (1) اذا كانت f دورية يكفي دراستها مجال طوله الدور

(2) توجد دوال دوؤية (غير ثابة) ليس لها دور

مثلا

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الدوال الرتيبة – الدوال المحدودة :

f متزايدة $\Leftrightarrow \forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

f متزايدة $\Leftrightarrow \forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

f ثابة $\Leftrightarrow \forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y)$

f رتيبة $\Leftrightarrow$ f متزايدة او f مناقصة

f ثابة $\Leftrightarrow \forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y)$

f محدودة من الاعلى $\Leftrightarrow \forall x \in E \; \exists \alpha \in \mathbb{R} \;\; f(x) \leq \alpha$

f محدودة من الاسفل $\Leftrightarrow \forall x \in E \; \exists \beta \in \mathbb{R} \;\; f(x) \geq \beta$

fمحدودة $\Leftrightarrow \forall\, x \in E\ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \beta \le f(x)\ \le \alpha$

ملاحظة :

$$M = \sup_{x\in E} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E\ \ , f(x) \le M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \qquad M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

$$\inf_{x\in E} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E\ \ , f(x) \ge m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \qquad f(x) < m + \varepsilon \end{cases}$$

مثلا

$$f(x) = sinx$$

$$f(\mathbb{R}\ ) = [0,1]\ \ \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\ = 1$$

عمليات على الدوال :

نشيرب $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ الى مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$

من اجل كل $f, g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ من اجل كل $\lambda\ \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ \ , \qquad g(x) \ne 0$$

ملاحظة : $x\ \in\ E \subset \mathbb{R}\ \ \ f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$

تمرين 1 : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1) f(x) = \sqrt{4 - x^2},\quad (2)^*\quad f(x) = \frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-1}}$$

الحل

$\forall x \in \mathbb{R}\ 4 - x^2 \geq 0 \iff$ معرفة $f(x) = \sqrt{4 - x^2},$

$x \in [-2,2] \iff$

$D_f = [-2,2]$

تمرين 2 : بين ان f دورية وعين دوؤها في حالة

$$(1) f(x) = \cos 2x - 4\cos x, (2) f(x) = \frac{1}{3}\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(3) f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

تمرين 3 : ادرس زوجية او فردية الدوال النالية

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad f(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos 3x}{x^2} \quad = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$, \quad f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \ , \quad f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

النهايات

النهاية المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 1 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f عند a ونرمز لها بالرمز $\lim_{x \to a} f(x) = b$ اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 2 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يمين a ونرمز لها بالرمز $\lim_{\substack{> \\ x \to \alpha}} f(x) = b$ ا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - a < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 3 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يسار a ونرمز لها بالرمز $\lim_{\substack{< \\ x \to \alpha}} f(x) = b$ ا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < a - x < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

مثال :

اثبت ان $\lim_{\substack{> \\ x \to 2}} x^2 = 4$

من اجل $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2||x + 2| < \varepsilon$$

من اجل $x \in]1,3[$ لدينا $1 < x < 3$

ومنه $|x - 2| < 1$ و $|x + 2| < 5$

$$|x + 2| < 5 \Leftrightarrow |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5\alpha$$

يكفي اختيار $5\alpha < \varepsilon$ يعني $\alpha < \frac{\varepsilon}{5}$

ومنه اذا اخذنا $\alpha < \frac{\varepsilon}{5}$ نحصل على

$$|x-2| < \alpha \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$$

مثال :

اثبت ان $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$

ل الاثبات ان $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$ نتحقق من صحة مايلي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x-1 < \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

لدينا

$$\left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x-1 < \varepsilon^2$$

ومنه

$$0 < x-1 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

اذا اخذنا

$\alpha \leq \varepsilon^2$ نحصل على الاستلزام التالئ

$$0 < x-1 < \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

النهايات غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 4 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 , x_0 + a[$

تكون نهاية f عند x_0 على يمين هي $+\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 - a , \quad x_0[$

تكون نهاية f عند x_0 على اليسار هي $+\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x_0 - x < \alpha \Longrightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$$

تعريف 6 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0

تكون نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

النهايات عند $+\infty$ او $-\infty$:

تعريف 7 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b > 0 : x > b \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x > b \Longrightarrow f(x) > a$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x < -b \Longrightarrow f(x) < -a$$

نظريات الاولية على النهايات :

لتكن f و g دالتان عدديتان x_0, l, l' اعداد حقيقية

نقبل بدون برهان النظريات التالية

نهاية مجموع دالتين :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية جداء دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	ح ع ت	ح ع ت

حالات عدم التعيين : هناك اربع حالات عدم التعيين و هي

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \times \infty, \quad +\infty - \infty$$

نهاية دالة كثير حدود او دالة ناطقة عند $+\infty$ او $-\infty$:

النهاية عند $+\infty$ او $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية الحد درجةالاكبر عند $+\infty$ او $-\infty$

النهاية عند $+\infty$ و$-\infty$ ا لدالة ناطقة هي نهايه حاصل قسمة الحدين الاكبر درجة عند $+\infty$ او $-\infty$

مثال

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2+2x-5=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

نهاية دالة مركبة : f , g دالتان عدديتان a , c,b اعداد حقيقية او $+\infty$

او $\infty-$ واذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{b}$ و $\lim_{x\to b} g(x)=c$

فان $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big)=c$

مثال

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4} \quad h(x)=tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right) \text{ نضع } \lim_{x\to\infty} tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)=1 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{4} \quad g(x)=tanx$

$$\lim_{x\to+\infty} g\big(f(x)\big)=\lim_{x\to\infty} tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

النهايات والمقارنة : h,g,f ثلاث دوال معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

(1) اذا كانت $\forall x\in I, g(x)\le f(x)$ وكانت $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$ فان

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

(2) اذا كانت $\forall x\in I, g(x)\ge f(x)$ وكانت $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$ فان

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

(3) اذا كانت $\forall x\in I, h(x)\le\ g(x)\le f(x)$ وكانت

$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} f(x)=l$ فان $\lim_{x\to a} g(x)=l$

ملاحظة : تبقى هذه القواعد صحيحة من اجل $\infty +$ $-\infty$

امثلة : (1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x + sinx$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ -1 \leq sinx \leq 1 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ x - 1 \leq x + sinx \leq x + 1$$

بمان $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ فان $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

بمان $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$

$$\forall x \in\ \mathbb{R}^* - 1 \leq sinx \leq 1 \Longrightarrow \forall x \in\ ]0, +\infty[\quad \frac{-1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$$

بمان $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{sinx}{x} 0$

تمرين 1 : بين ان

$$(1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + x} = 0, \qquad (2)\ \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(3)\ \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{1}{x^2 - 1}$$

(1) باستعمال التعريف

(2)باستعمال النظريات على النهايات

الحل

(1) باستعمال التعريف

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists A>0: x>A\Longrightarrow\left|\frac{1}{1+x}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{1+x}\right|<\varepsilon\Longrightarrow\frac{1}{1+x}<\varepsilon\Longrightarrow 1+x>\frac{1}{\varepsilon}\Longrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

اذا اخذنا $\frac{1}{\varepsilon}-1>\alpha>0$ نحصل على الاستبزام التالي

$$x>A\Longrightarrow\left|\frac{1}{1+x}\right|<\varepsilon$$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية

$$(1)\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2},\qquad (2)\ lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1},$$

$$(3)^*\lim_{x\to-1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$$

الحل

$$(1)\qquad \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=lim_{x\to2}x^2+2x+4=12$$

$$(2)\ lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}=lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2}=lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية

$$(1)\ lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\qquad\qquad (2)\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$(3)^* \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \qquad (4)^* \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

الحل

$$(1) \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

$$(2) \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\frac{3}{2}$$

تمرين* 4 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1 \qquad (2)^* \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1$$

$$(3) \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1} \quad (4)^* \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$

$$(5) \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}} \qquad (6)^* \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+x}+(x-1)\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+(x-1)\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}=\frac{3}{2}$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

$$(5)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}}\right)} = 0$$

تمرين 5 : احسب النهايات التالية

$$(1)\lim_{x\to0}\frac{x.\,sinx}{1-cosx} \qquad (2)^* \quad \lim_{x\to0}\frac{.\,tan2x}{\sqrt{1-cosx}}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to0}\frac{sinx-.\,tanx}{x^3} \qquad (4)^* \quad \lim_{x\to0}\frac{.\,sin2x+sinx}{sinx-sin2x}$$

الحل

$$(1)\lim_{x\to0}\frac{x.\,sinx}{1-cosx} = \lim_{x\to0}\frac{2x.\,cos\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{.\,cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to0}\frac{sinx-.\,tanx}{x^3} = \quad \lim_{x\to0}\frac{sinx[cosx-.1]}{x^3cosx}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{sinx\left[-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x^3cosx}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}\times\frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{cosx} = -\frac{1}{2}$$

الاستمرار

الاستمرار عند نفطة x_0

تعريف 1 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ يشمل x_0

f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة ب

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$$

ومنه f مستمرة عند 0

الاستمرار على يمين x_0

تعريف 2 : لتكن f دالة معرفة على مجال $[x_0, \ x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$

f دالة مستمرة على يمين x_0 اذا تحقق $\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{x - 2}\text{-}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} = \sqrt{x - 2} = 0 = f(2)$$

الاستمرار على يسار x_0

تعريف3 : لتكن f دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha , \quad x_0]$ حيث $\alpha > 0$

f دالة مستمرة على يسار x_0 اذا تحقق $\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{1-x}\text{-}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} = \sqrt{1-x} = 0 = f(1)$$

تعريف 4 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

الاستمرار على مجال :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

(1) $- f$ دالة مستمرة على المجال $I \subset \mathbb{R}$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة من I

(2) $- f$ دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة منه

(3) $- f$ دالة مستمرة على المجال $[a, b[$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ و عند a على اليمين

(4) $- f$ دالة مستمرة على المجال $]a, b]$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ وعند b على اليسار

(5) $- f$ دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ و عند a على اليمين وعند b على اليسار

مثال :

(1) دوال كثيرات الحدودمستمرة على $\mathbb{R}$

(2) الدوال الناطقة مستمرة على مجموعة تعريفها

(3) الدوال $x \to cosx$, $x \to sinx$ مستمرة على $\mathbb{R}$

التمديد يالاستمرار :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ لا يشمل x_0

اذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ فان الدالة g المعرفة كمايلي

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

تسمى تمديد يالاستمرار ل f عند x_0

مثال : لتكن f دالة معرفة ب

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

اوجد g تمديد يالاستمرار ل f عند 1

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x) = \frac{sinx}{x}$$

اوجد g تمديد يالاستمرار ل f عند 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

نظريات على الدوال المستمرة :

f و g دالتان عدديتان

نظرية 1 : اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ وكانت g مستمرة عند l فان

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(l)$$

الاثبات :

g مستمرة عند l حسب تعريف النهاية نجد

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |y - l| < \alpha \Longrightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

وبمان l نهاية f عند x_0 فانه يوجد $\alpha' > 0$ بحيث

$$|x - x_0| < \alpha' \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha$$

وبالتالي يكون

$$|x - x_0| < \alpha' \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha \Longrightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

اذا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha' > 0\ |x - x_0| < \alpha' \Longrightarrow |g(y) - g(l)| < \varepsilon$$

ومنه $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(l)$

استمرار دالة مركبة :

نظرية 2 : اذا كانت f مستمرة عند x_0 وكانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فان

gof مستمرة عند x_0

الاثبات :

لدينا

من جهة f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

من جهة اخرى $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g\big(f(x_0)\big)$

وحسب النظرية 1 نجد $\lim_{x \to x_0}(gof)(x) = (gof)(x_0)$

اذا الدالة gof مستمرة عند x_0

نظرية 2 : اذا كانت f و g مستمرتان عند x_0 و k عدد حقيقي فان

$kf, f \times g, f + g$ دوال مستمرة عند x_0 واذا كانت $g(x_0) \neq 0$

$\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ مستمرتان عند x_0

نظرية القيم المتوسطة : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وكان

$f(a) \times f(b) < 0$ فانه يوجد على الاقل $c \in]a, b[$ بحيث $f(c) = 0$

مثال :

بين ان المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

الحل :

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

f دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $[-1,0]$

$$f(-1) = -1^3 - 1 + 1 = -1,$$
$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) \times f(0) = -1 < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

نظرية : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان k عدد حقيقي

محصور بين $f(b)$ و $f(a)$ فانه يوجد على الاقل $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = k$

الاثبات :

من اجل $k = f(a)$ يكفي اخذ $c = a$

من اجل $k = f(b)$ يكفي اخذ $c = b$

من اجل $f(a) < k < f(b)$ $f(b) < k < f(a)$ نضع

$$g(x) = f(x) - k$$

g مستمرة على المجال $[a,b]$ لانها مجموع دالتين مستمرتين على $[a,b]$

و $g(a) \times g(b) < 0$

حسب نظرية القيم المتوسطة فانه يوجد على الاقل

$c \in [a,b]$ بحيث $g(a) = f(c) - k = 0$

بمعنى ان $f(c) = k$

مثال : بين ان المعادلة $4\, x cos x = 1$ تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$$f(x) = 4x cos x - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\frac{\pi}{3} cos \frac{\pi}{3} - 1 = 2\frac{\pi}{3} - 1 > 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\frac{\pi}{2} cos \frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $4xcosx - 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

نتيجة : اذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة على المجال $[a, b]$ وكان k

عدد حقيقيا محصور بين $f(b)$ و $f(a)$ فانه يوجد $c \in [a, b]$ وحيد

بحيث $f(c) = k$

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة :

لتكن الدالة f معرفة ومستمرة المجال $I \subset \mathbb{R}$ محدود او غير محدود

صورة المجال I بالدالة f المجال هو $f(I)$ المعرف كمايلي

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I : \ y = f(x)\}$$

نظرية : اذا كانت f مستمرة على مجال I فان صورة I بالدالة f هو مجال من $\mathbb{R}$

تمرين محلول

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

f مستمرة على كل مجال I حيث $I \subset]-\infty, 1[$ او $I \subset]1, +\infty[$

اذا كان $I =]0,1[$ فان $f(I) =]-\infty, -1[$

اذا كان $I = [-1,0]$ فان $f(I) = [-1,0]$

اذا كان $I = [2, +\infty[$ فان $f(I) =]1,3]$

تمارين محلولة

تمرين 1 : α عدد حقيقي f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ , & x\geq 0 \\ x+\alpha\ , & x<0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$

الحل

اذا كان $x \geq 0$ فان $f(x)=x^2$ مستمرة لانها دالة مربع

اذا كان $x<0$ فان $f(x)=x+\alpha$ مستمرة لانها دالة تالفية

حتى تكون fمستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون مستمرة عند 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2=0=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x+\alpha=\alpha=f(0)$$

حتى تكون fمستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون $\alpha=0$

تمرين 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x)=\frac{x^3+2x-3}{x-1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=1$

الحل

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1} x^2+x-3=-1$$

ومنه f تقبل الدالة g تمديد بالاستمرار عند $x_0=1$ والمعرفة كمايلي

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+2x-3}{x-1}\ , & x\neq 1 \\ -1 & x=1 \end{cases}$$

*تمرين 3 : لتكن f العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 4 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \pi \frac{cos^2(x) - cosx}{2cos^2(x) - 3cosx + 1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 5 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x - \alpha \quad , & x \geq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{sinx} \quad , & x < 0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$

الدوال العكسية

الدالة العكسية لدالة مستمرة ورتيبة :

نظرية : اذا كانت f مستمرة وؤتيبة تماما على مجال I فان f تقبل دالة عكسية

f^{-1} لها الخواص التالية :

الدالة f^{-1} معرفة على المجال $f(I)$ وتاخذ قيمها في المجال I

الدالة f^{-1} مستمرة وؤتيبة تماما على المجال $f(I)$ ولها نفس اتجاه

تفير الدالة f

الاثبات :

$f(1)$ رتيبة تماما على I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow$ f متباين على I

(2) اذا كانت f دالة مستمرة على I من $\mathbb{R}$ عندئذ f غامر من I في $f(I)$

بالفعل. حسب تعريف $f(I)$ صورة المجال I بواسطة الدالة المستمرة f

$$\forall y \in f(I) \ , \exists x \in I : y = f(x)$$

مما يعني ان f غامر من I في $f(I)$

ومنه اذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على مجال I

فان f تطبيق تقابلي من I في $f(I)$ وعليه فهي تقبل تطبيق عكسي f^{-1}

معرف $f(I)$ نحو I

الدالة f^{-1} تطبيق تقابلي من $f(I)$ في I اذن فهي مستمرة وؤتيبة تماما على

مجال $f(I)$

$\forall y_1, y_2 \in f(I)$ بحيث $y_1 \neq y_2 \ \exists x_1, x_2 \in I : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

وهذا يكافي ايظا

$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ فيكون لدينا مع ملاحظة $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f^{-1}(y_1)\ x_2 - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

مما يعني ان f^{-1} لها نفس اتجاه تغير f

مثال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

عين $f([0, +\infty[)$ صورة المجال $[0, +\infty[$ بالدالة f

بين ان f تقبل دالة عكسية على المجال $[0, +\infty[$ يطلب تعينها

الحل :

تعيين $f([0, +\infty[)$

$$f(0) = -1, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

ومنه $f([0, +\infty[) = [-1,1[$

f مستمرة على $[0, +\infty[$ لانها دالة ناطقة

f دالة متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ لان

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{({x_1}^2 + 1)({x_2}^2 + 1)} > 0$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0, +\infty[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $[-1,1[$ نحو المجال $[0, +\infty[$

$$\forall y \in [-1,1[\ \exists x \in [0, +\infty[: y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \quad \vee\, x = -\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

بمان $x \in [0,+\infty[$ فان $x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$ فالدالة العكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$f^{-1}: [-1,1[\ \to [0,+\infty[$$

$$x \to f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

الدوال المثلثية ودوالها العكسية :

الجيب وقوس الجيب $(Arcsin, sin)$:

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

$$x \to f(x) = sinx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$[-1,1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arcsinx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[-1,1]$

وتاخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ , \forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

الجيب التمام وقوس الجيب التمام $(Arccos, cos)$:

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1,1]$$

$$x \rightarrow f(x) = cosx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[0, \pi]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$[-1,1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arccosx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[-1,1]$

وتاخذ قيمها في المجال $[0, \pi]$ حيث

$$\forall x \in [0, \pi] \ , \forall y \in [-1,1] \ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

الظل وقوس الظل$(Arctan, tan)$

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \rightarrow f(x) = tanx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$]-\infty, \infty[$ ونرمز لها بالرمز

$Arctanx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty, \infty[$

وتاخذ قيمها في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$حيث

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ , \forall y \in]-\infty, \infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

نتائج :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ Arcsin(sinx) = x \quad (1)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \ Arcscos(cosx) = x \quad (2)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ Arctan(tanx) = x \quad (3)$$

$$\forall x \in [-1,1]\ sin(Arcsinx) = x \quad (4)$$

$$\forall x \in [-1,1]\ cos(Arccosx) = x \quad (5)$$

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[tan(Arctanx) = x \quad (6)$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad (Arctanx)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

الاثبات :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny \quad (1)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ Arcsin(sinx) = Arcsiny = x$$

$$\forall x \in [0,\pi]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy \quad (2)$$

$$\forall x \in [0,\pi]\ Arccos(sinx) = Arccosy = x$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany \quad (3)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ Arctan(tanx) = Arctany = x$$

$$\forall y \in [-1,1]\ sin(Arcsiny) = y \quad (4)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall y \in [-1,1]\ sin(Arcsiny) = sinx = y$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ , \forall x \in [-1,1] \ y = Arcsinx \Leftrightarrow x = siny$$

$$\Leftrightarrow 1 = (siny)' = y'cosy$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-(siny)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تمرين : احسب $Arcsinx$ و $Arccosx$, لكل من $0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}$

احسب $Arctanx$ لكل من $0,1,\sqrt{3}$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ , \forall y \in [-1,1] \ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ x = Arcsin0 \Leftrightarrow sinx = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi] \ , \forall y \in [-1,1] \ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos0 \Leftrightarrow 0 = cosx \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ , \forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan0 \Leftrightarrow 0 = tanx \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ x = Arcsin1 \Leftrightarrow sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos1 \Leftrightarrow 1 = cosx\ \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan1 \Leftrightarrow 1 = tanx\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ x = Arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = cosx \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = tanx \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

الدوال الزائدية ودوالها العكسية :

دالة الجيب الزائدي :

الدالة $x \to \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ تسمى دالة الجيب الزائدي ونرمز لها يالرمز $sh(x)$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ ,x \in \mathbb{R}$$

دالة الجيب التمام الزائدي :

الدالة $x \to \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ تسمى دالة الجيب التمام الزائدي ونرمز لها يالرمز $ch(x)$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ,x \in \mathbb{R}$$

دالة الظل الزائدي :

الدالة $x \to \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ تسمى دالة الظل الزائدي ونرمز لها يالرمز $th(x)$

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ ,x \in \mathbb{R}$$

نتائج :

$$ch^2(x) - \ sh^2(x) = 1 \ \ (1)$$

$$Ch^2(x) - \ Sh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ch(x+y) = chxchy + shxshy \quad (2)$$

$$sh(x+y) = shxchy + shychx$$

$$, \quad \forall x \ \in \mathbb{R}\ ch2x = \ ch^2(x) - \ sh^2(x), \qquad sh2x = 2shxchx\ (3)$$

$$ch2x = 2\ ch^2(x) - 1, \qquad ch2x = 2\ sh^2(x) \quad + 1$$

(4) الجيب التمام الزائدي دالة زوجية لان $\forall\ x \ \in \mathbb{R} \quad ch(-x) = ch(x)$

االجيب الزائدي دالة فردية لان $\forall\ x \ \in \mathbb{R} \quad sh(-x) = -sh(x)$

$$\forall\ x \ \in \mathbb{R} \qquad (shx)' = chx,\ (chx)' = shx \quad (5)$$

$$(thx)' = 1 - \ th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$

الدوال العكسية للدوال الزائدية :

عمدة الجيب الزائدي $(Argsh)$:

لدينا

$$\forall\ x \ \in \mathbb{R} \qquad (shx)' = chx > 0$$

وبالتالي

$$sh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to shx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argsh$ حيث

$$Argsh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to Argshx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{R}$ وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in \mathbb{R} \ ; \quad y = shx \Leftrightarrow x = \ Argshx$$

عمدة جيب التمام الزائدي $(Argch)$:

لدينا

$$\forall \ x \ \in \mathbb{R} \quad (chx)' = shx > 0$$

وبالتالي

$$\forall x \in [0, \infty[\quad (chx)' = shx > 0$$

$$ch: [0, \infty[\ \rightarrow [1, \infty[$$

$$x \rightarrow chx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $[0, \infty[$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argch$ حيث

$$Argch: [1, \infty[\ \rightarrow [0, \infty[$$

$$x \rightarrow Argchx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $[1, \infty[$ وتاخذ قيمها في $[0, \infty[$وتحقق

$$\forall x \in [0, \infty[\ , \forall y \in [1, \infty[\ ; \quad y = chx \Leftrightarrow x = \ Argchx$$

عمدة الظل الزائدي $(Argth)$:

لدينا

$$\forall \ x \ \in \mathbb{R} \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2(x)} > 0$$

وبالتالي$\forall x \in \mathbb{R} \quad (thx)' > 0$

$$th: \mathbb{R} \rightarrow \ ]-1,1[$$

$$x \rightarrow thx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argch$ حيث

$$Argth:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow Argthx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]-1,1[$ وتاخذ قيمها في$\mathbb{R}$وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in]-1,1[\ ; \quad y = thx \Leftrightarrow x = \ Argthx$$

نتائج :

$$\forall x \in \ \mathbb{R}\ Argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in \mathbb{R} \ ; \quad y = Argshx \Leftrightarrow \ x = shy == \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \ x + \sqrt{x^2+1} \ > 0 \qquad e^y = \ x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in \ \mathbb{R}\ Argchx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) (2)$$

$$\forall x \in [1, \infty[\ , \forall y \in [0, \infty[\ ; y = Argchx \Leftrightarrow \ x = chy$$

$$x = chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \ x + \sqrt{x^2-1} \ > 0 \quad \vee \quad e^y = \ x - \sqrt{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \geq 0 \ \vee \ \ y = ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \leq 0$$

$$\forall x \in [1,\infty[Argchx = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad Argtnx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (3)$$

$$\forall x \in\in]-1,1[\ , \forall y \in \mathbb{R} \, ; y = Argthx \Leftrightarrow \ x = thy$$

$$x = chy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\Leftrightarrow e^y - e^{-y} = x(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1+x$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \ \frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ومنه $\forall x \in]-1,1[\quad Argtnx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

تمارين محلولة

تمرين (1) : عين مجموعة تعريف الدوال النالية

$$f(x) = arcsin(2-x) \qquad\qquad f(x) = argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f(x) = arccos\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad\qquad f(x) = arctg\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

الحل :

معرفة $f(x) = arcsin(2-x) \Leftrightarrow \ -1 \leq 2-x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$D_f \ = [1,3]$$

معرفة $f(x) = argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1 \wedge x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$D_f \ =]0,+\infty[$$

معرفة $f(x) == arccos\left(\frac{1+x}{x}\right) \Leftrightarrow \ -1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right|^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x}{x} - 1\right)\left(\frac{1+x}{x} + 1\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1+2x}{x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1+2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

تمرين 2 :

بين ان $\quad arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

الحل

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = c$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = f(1) = 2\, arctg1$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $\quad \forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

تمرين 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال من [01] نحو [01] كمايلي :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

بين ان f تقابل من المجال $[01]$ نحو $[01]$ ثم عين دالتها العكسية

الحل

f مستمرة على المجال $[01]$ لانها دالة ناطقة

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ , } \forall\, x\ [01]$$

f رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[01]$

f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$\forall x \in [01], \forall y \in [01\ ]\ \ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{1-y^2}\ < 1\ \vee y = 1 + \sqrt{1-y^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

ومنه

$$f^{-1}: [01]\ \ \rightarrow [01]$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

سلسلة تمارين رقم (2) حول(الدوال العددية

– الاستمرار – لدوال العكسية)

التمرين(1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1)\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} \qquad (2)\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$$

$$(3) f(x) \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 5x + 4}} \quad (4)\ f(x) = \sqrt{E(x) - x}$$

$$(5)\ f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^*\ f(x) = ln[ln(lnx)]$$

$$(7)^* f(x) = \frac{1}{E(x) - x} \quad (8)\ f(x) = ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$(9)\ f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين(2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذالك

$$(1)\ f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad (2)\ f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$$

$$(3) f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (4)\ f(x) = |x|(1 - 3x)(1 + 3x)$$

$$(5)^* \qquad f(x) = \frac{sin^2(x) - cos3x}{x^2}$$

التمرين(3) :

احسب النهايات التالية

$$(2)\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}\right) \quad (1)\ \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{sinx}$$

$(3)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-2}-(x-1\ )$ $\qquad$ $(4)\ lim_{x\to\pi} \frac{1+cosx}{x-\pi}$

$(5)^*\ lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinx-cosx}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $(6)^*\ lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-2}-(4x-1\ )$

التمرين(4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0=1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+2}-2}\ , & x\neq 1 \\ \dfrac{2}{3}\ , & x=1 \end{cases}$$

(2) هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x)=\frac{(1-cosx)^2}{x^4} \quad f(x)=\frac{sin2x}{\sqrt{x+1}-1} \quad f(x)=\ 3x^2sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمرين(5) :

بين ان المعادلة $x^4-5x+1=0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

التمرين(6)* :

بين ان المعادلة $x^3-5x^2+2x+1=0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور

بين عددين صحيحين متتاليين

التمرين(7) : (1) احسب $Arccos\ ,Arcsin$ للقيم التالية $-1,0\ ,1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) احسب $Arccotan\ \ ,Arctan$ للقيم التالية $-1,0\ ,1,\sqrt{3}$

$(3)^*$ احسب $Arctan\left(tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right),Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),Arcsin\left(sin\frac{3\pi}{4}\right)$

التمرين(8) : اثبت ان

$$(1)\quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(2)\quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(3)\quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x > 0$$

$$(4)\ cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(5)\quad sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(6)\quad sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad , \qquad x \in [-1,1] - \{0\}$$

التمرين(9) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arccos\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \dfrac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

التمرين(10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2+1}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

*التمرين(11) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}Arccos(x)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2)ادرس استمرارية f

(3) عين $f'(x)$

*التمرين(12) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x)=Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{x-1}\right)+Arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{4-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2)حسب $f(0), f(2), f(5)$ ا

(3) عين $f'(x)$ ثم اوجد عبارة بسيطة ل f

التمرين 13 : اثبت ان

(1) $y=Argch(x) \Leftrightarrow y=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ \forall x\in[1,+\infty[$

(2) $y=Argsh(x) \Leftrightarrow y=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ \forall x\in]-\infty,+\infty[$

(3) $y=Argth(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-v}\right)\ \forall x\in]-1,1[$

(4) $y=Argcoth(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{v-1}\right)\ \forall x\in]-\infty,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$

(5) $Argth(x)+Argth(y)=Argth\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\ \forall x,y\in]-1,1[$

(6) $Argch\left(\sqrt{1+x^2}\right)=Argsh(x)\quad \forall x\in]-\infty,+\infty[$

$$Argsh\left(\sqrt{x^2-1}\right) = Argch(x) \quad \forall x \in [1,+\infty[\quad (7)$$

$$\forall \theta \in]-\infty,+\infty[\; sh(3\theta) = 3sh\theta + 4sh^3\theta \quad (8)$$

استنتج ان $\quad Argsh(3x+4x^2) = 3Argshx$

$$Argsh\left[\sqrt{\frac{1+ch(x)}{2}}\right] - \frac{x}{2} = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

التمرين 14 : بسط العبارات التالية

$$Argth\left(\frac{\sqrt{chx-1}}{\sqrt{chx+1}}\right), Argsh\left(2x\sqrt{x^2+1}\right) \;, Argth\left(\frac{3x+x^2}{1+3x^2}\right)$$

التمرين(15) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Argth\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f احسب النهايات على اطراف D_f

(2) عين $f'(x)$ شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحلول

التمرين(1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية التالي

$$(1)\ \ f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4} \qquad (2)\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

$$(3) f(x) \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+4}}\ (4)\ f(x) = \sqrt{E(x)-x}$$

$$(5)\ f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^*\ \ f(x) = ln[ln(lnx)]$$

$$(7)^* f(x) = \frac{1}{E(x)-x} \quad (8)^*\ f(x) = ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$(9)\ \ f(x) = \ e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

(1) معرفة $f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4} \Leftrightarrow\ -x^2+5x-4 \quad \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [4,+\infty[$$

$$D_f\ =]-\infty,-1] \cup [4,+\infty[$$

(2) معرفة $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0 \\ \wedge \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\ \ x \in]1,\infty[\\ \wedge \\ ]-\infty,1[\cup]4,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \ ]4,+\infty[$$

$$D_f\ =]4,+\infty[$$

(3) معرفة $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-5x+4} \geq 0 \\ \wedge \\ x^2-5x+4 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in \ ]4, +\infty[$$

$$D_f =]4, +\infty[$$

(4) معرفة $f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow E(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq E(x)$$

لكن نعلم ان $\forall x \in \mathbb{R}\ E(x) \geq x$

وعليه

معرفة $f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$$D_f = \mathbb{Z}$$

(5) معرفة $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1,1[$$

$$D_f =]-1,1[$$

(9)معرفة $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow 1 + x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

التمرين(2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذالك

$$(1)\ f(x)=\frac{x}{1+|x|}\quad (2)\ \ f(x)=\sqrt[3]{x^5+x}$$

$$(3) f(x)=ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\quad (4)\ f(x)=|x|(1-3x)(1+3x)$$

$$(5)^*\qquad f(x)=\frac{sin^2(x)-cos3x}{x^2}$$

$$(1)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ f(-x)=\frac{-x}{1+|-x|}=\frac{-x}{1+|x|}=-f(x)$$

ومنه fفردية

$$(2)\ \forall x\geq 0\ f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^5-x}=\sqrt[3]{-x^5-x}=-\sqrt[3]{x^5+x}$$

$$=-f(x)$$

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^5-x}=\sqrt[3]{-x^5-x}\Leftrightarrow f(-x)^3=-x^5-x$$

$$\Leftrightarrow [-f(-x)]^3=x^5+x$$

$$\Leftrightarrow -f(-x)=\sqrt[3]{x^5+x}=f(x)$$

ومنه fفردية

$$(3)\forall x\in\ ]-1,1[\ f(-x)=ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)==-ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\ \ f(x)$$

ومنه fفردية

$$(4)\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(-x)=|-x|(1+3x)(1-3x)=|x|(1+3x)(1-3x)$$

$$=\ f(x)$$

ومنه f زوجية

التمرين(3) :

احسب النهايات التالية

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)\quad (1)\ \mathop{lim}_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sinx}$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-(x^2-1)$$

$$(4)\ \mathop{lim}_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sinx-cosx}{x-\frac{\pi}{4}}\quad (5)\ \mathop{lim}_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{x-\pi}$$

$$(1)\ \mathop{lim}_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sinx}=$$

$$=\ \mathop{lim}_{x\to+0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)sinx}$$

$$=\ \mathop{lim}_{x\to+0}\frac{2x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)sinx}$$

$$=\ \mathop{lim}_{x\to+0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\times\frac{1}{\frac{sinx}{x}}=1$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\ \mathop{lim}_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\ \mathop{lim}_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=\mathop{lim}_{x\to+\infty}\frac{x}{(x+1)(x+2)}=0$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)$$

$$=\mathop{lim}_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2+x-2}+(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(4)\ \lim_{x\to\pi} \frac{1+cosx}{(x-\pi)^2} = \begin{cases} z = x-\pi \\ \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1+cos(z+\pi)}{z^2} \end{cases}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-cosz}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2sin^2 z}{z^2} = 2$$

التمرين(4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+2}-2}, & x \neq 1 \\ \dfrac{2}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

*(2) هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x) = \frac{(1-cosx)^2}{x^4}, f(x) = \frac{sin2x}{\sqrt{x+1}-1}, f(x) = 3x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+2}-2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-2)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \frac{2}{3} = f(1)$$

ومنه ان f مستمرة عند 1

التمرين(5) :

بين ان المعادلة $x^5 - 5x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

f متزايده تماما على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1,1[$

$- f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متزايده تماما) على المجال $]-\infty, -1[$

و $f(-2) \times f(-1) < 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5 - 5x + 1 = 0$ تقيل حلا وحيدا على المجال $]-\infty, -1[$

$- f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متزايده تماما) على المجال $]1, +\infty[$

و $f(2) \times f(1) < 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5 - 5x + 1 = 0$ تقيل حلا وحيدا على المجال $]1, +\infty[$

$- f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]-1,1[$

و $f(-1) \times f(1) < 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5 - 5x + 1 = 0$ تقيل حلا وحيدا على المجال $]-1,1[$

التمرين(7) : (1) احسب $Arccos$, $Arcsin$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) احسب $Arccotan$, $Arctan$ للقيم التالية $-1, 0, 1, \sqrt{3}$

$$Arcsin(-1) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], siny = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin(0) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], siny = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arcsin(1) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], siny = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], siny = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], siny = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

$$Arccos(-1) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], cosy = -1 \Leftrightarrow y = \pi$$

$$Arccos(0) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], cosy = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$Arccos(1) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], cosy = 1 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], cosy = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi], cosy = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3}$$

$$Arctan(-1) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, tany = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(0) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, tany = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Arctan(1) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, tany = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(\sqrt{3}) = y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, tany = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

التمرين(8) : اثبت ان

$$(1) \quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi, \qquad x \in [-1,1]$$

$$(2) \quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in [-1,1]$$

$$(3)\ \ Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x > 0$$

$$(4)\ cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(5)\ \ sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in [-1,1]$$

$$(6)\ \ tan\big(Arccos(x)\big) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\ \ , \qquad x \in [-1,1] - \{0\}$$

الحل

نعلم ان

$$\big(Arccos(x)\big)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , x \in \,]-1,1[$$

$$\big(Arcsin(x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , x \in \,]-1,1[$$

$$\big(Arctan(x)\big)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad , x \in \,]-\infty, +\infty[$$

$$(1)\ \ \ Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = \ Arccos(x) + Arccos(-x)$$

$$f'(x) = \ \ \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$Arccos(x) + Arccos(-x) = 2\ \ Arccos(x) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ومنه $\forall x \in [-1,1] Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi$

$$(2)\ \ Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = Arcsin(x) + Arccos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$Arcsin(x) + Arccos(x) = Arcsin(0) + Arccos(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $\forall x \in [-1,1] \quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$$(3)\ \ Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}\ , \qquad x < 0$$

$$f(x) = Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall\, x \in]-\infty, 0[\quad f(x) = c = f(-1)$$

$$Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = Arctan(-1) + Arctan(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه $\forall x \in]-\infty, 0[\quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$$(4)\ cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}\,, \qquad x \in [-1,1]$$

نضع $Arcsin(x) = \mathrm{t}\ ,\mathrm{t} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$

اذ $x = sint = sin\big(Arcsin(x)\big)$

نعلم ان $cos^2\big(Arcsin(x)\big) + sin^2\big(Arcsin(x)\big) = 1$

$$cos^2\big(Arcsin(x)\big) = 1 - sin^2\big(Arcsin(x)\big) = 1 - x^2$$

ومنه $cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1,1]$

$$(5)\ \ sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

نضع $Arctan(x) = \mathrm{t}\ ,\mathrm{t} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right[$

اذ ن $x = tant$ و $sin\big(Arctan(x)\big) = sint$

نعلم انه اذا كان $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right[$ فان $cost > 0$

$$\frac{1}{cos^2 t} = 1 + tan^2 t \Longrightarrow cos^2 t = \frac{1}{1 + tan^2 t}$$

$$\Longrightarrow \ \ cost = \sqrt{\frac{1}{1 + tan^2 t}}$$

$$\Longrightarrow sint = tant \times cost = tant\sqrt{\frac{1}{1 + tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\Rightarrow sin\big(Arctan(x)\big) = sint = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in]-\infty, +\infty[$$

$$(6)\ \ tan\big(Arccos(x)\big) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ \ ,\qquad x \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

$$x \in [-1,1] \setminus \{0\}\ Arccos(x) = \mathrm{t} \Longrightarrow\ x = cost\ \ ,\mathrm{t} \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

اذ ن $tan\big(Arccos(x)\big) = tant$ و $sint\ > 0$ $t \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$$tan\big(Arccos(x)\big) = tant = \frac{sint}{cost} = \frac{\sqrt{1-cos^2t}}{cost} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

التمرين(9) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arccos\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

f معرفة $\Leftrightarrow\ \ 2-x \neq 0\ \ \wedge -1\ \le \frac{2x}{2-x} \le 1$

$$2-x \neq 0\ \ \wedge \frac{2x}{2-x} + 1 \ge 0\ \ \wedge\ \ \frac{2x}{2-x} - 1\ \ \le 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0\ \ \wedge \frac{2+x}{2-x} \ge 0\ \ \wedge\ \ \frac{3x-2}{2-x}\ \ \le 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0\ \ \wedge x \in [-2,2]\ \ \wedge\ \ x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2,+\infty[\ \ \ \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow$$

$$D_f = \left[-2, \frac{2}{3}\right]$$

$$\forall x \in D_f \;\; f'(x) = \frac{-\left(\frac{2x}{2-x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{2-x}\right)^{2}}} = \frac{\frac{-4}{(2-x)^2}}{\sqrt{\frac{4-4x-3x^2}{(2-x)^2}}}$$

$$= \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}} < 0 \quad j$$

التمرين(10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in D_f \;\; f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2+1}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

f معرفة $\Leftrightarrow 1 - x \neq 0$

$$x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0, \lim_{x\to 0} Arctan(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ s\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{\substack{< \\ s\to 1}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = -\infty, \lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-x}\right) = 0, \lim_{x\to 0} Arctan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)=0$$

$$\forall x \in \ D_f \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{(x-1)^2+1}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+1} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على D_f

البني الجبرية

العملية الداخلية : لتكن E مجموعة غير خالية

كل تطبيق للمجموعة $E \times E$ نحو E يسمى عملية داخلية في E ونرمز لها بالرمز

$\star, \nabla, \Delta, \times, +$, ...

اذا كانت $\star$ عملية داخلية في E نكتب

$$\star : E \times E \to E$$

$$(x, y) \to x \star y$$

مثلا : $\times, +$ عمليتان داخليتان في $\mathbb{R}$

خواص : $\star, \Delta$ عمليتان داخليتان في E

$\star$ تبديلية في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y \in E: x \star y = y \star x$$

$\star$ تجميعية في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E: (x \star y) \star z = y \star (x \star z)$$

$\star$ توزيعية على Δ في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E : \begin{cases} x \star (y \Delta z) = (x \star y) \Delta (x \star z) \\ (y \Delta z) \star x = (y \star x) \Delta (z \star x) \end{cases} \text{و}$$

يكون العنصر e من E حيادي للعملية $\star$ اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x \in E : x \star e = e \star x = x$$

يكون العنصر x' من E نضيرالعنصر x من E للعملية $\star$ اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x \in E : x \star x' = x' \star x = e$$

نتائج وملاحظات :

(1) العنصر الحيادي ان وجد فهو وحيد

ليكن e, e' عنصران حياديان للعملية $\star$ في E لدينا $e = e \star e'$ حيث

e' عنصر حيادي من جهة اخرى $e' = e \star e'$ فينتج ان $e' = e$

(2)اذا كانت العمليةتجميعية فان العنصر النضير ان وجد فهو وحيد

لنفرض ان x' x'' عنصران نضيران ل x من E للعملية التجميعية $\star$

و e عنصر حيادي للعملية $\star$ في E

$$x' = x' \star e = x' \star (x \star x'') = (x' \star x) \star x'' = e \star x'' = x''$$

امثلة :

الجمع $(+)$ والضرب $(\times)$ عمليتان تبدليتان وتجميعيتان في $\mathbb{R}$

الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$

البنى الجبرية

لتكن $\star$ و Δ عمليتان داخليتان في المجموعة E

الزمرة : تكون $(E, \star)$ زمرة اذا وفقط اذا تحقق

(1) $\star$ تجميعية

(2) يوجد في E عنصر حيادي للعملية $\star$

(3) كل عنصر من E يقبل نضير في E بالنسبة للعملية $\star$

اذا كانت العملية $\star$ تبدلية نقول ان الزمرة $(E, \star)$ زمرة تبديلية

امثلة :

$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية بينما $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}/, \times)$

ليست زمرة

الزمرة الجزئية : لتكن $(E, \star)$ زمرة و H مجموعة جزئية من E

تكون $(H, \star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E, \star)$ اذا وفقط اذا تحقق

$\forall x, y \in H, x \star y \in H$ (1)

(2) $e \in H$ حيث e العنصر الحيادي للعملية $\star$ في E

(3) $\forall x \in H, \forall x' \in H$ حيث x' نضير x للعملية $\star$ في E

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{Z}^*, \times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*, \times)$

$(2\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}^/, +)$

الحلقة : تكون $(E, \star, \Delta)$ حلقة اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E, \star)$ زمرة تبديلية

(2) Δ تجميعية

(3)Δ توزيعية على $\star$ في E

اذا كانت العملية Δ تبدلية نقول ان الحلقة $(E, \star, \Delta)$ حلقة تبديلية

اذ كانت العملية Δ عنصر حيادي نقول ان الحلقة $(E, \star, \Delta)$ حلقة واحدية

امثلة

$(\mathbb{Z}, +, \times)$, حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}^*, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

الحلقة الجزئية : لتكن $(E, \star, \Delta)$ حلقة و H مجموعة جزئية من E

تكون $(H, \star, \Delta)$ حلقة جزئية من الحلقة $(E, \star, \Delta)$ اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(H, \star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E, \star)$

$\forall x, y \in H, x\Delta y \in H \quad (2)$

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +,\times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R}, +,\times)$

$(\mathbb{N}, +,\times)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +,\times)$

الجسم : تكون $(E \;,\star\,, \Delta)$ جسما اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E \;,\star\,, \Delta)$ حلقة تبدلية و واحدية

(2) كل عنصر من المجموعة غير لبخالية $E \setminus \{e\}$ يقبل نضير بالنسبة للعملية Δ

اذا كانت العملية Δ تبدلية نقول ان الجسم $(E \;,\star\,, \Delta)$ جسم تبديلي

امثلة

$(\mathbb{Q}, +,\times)$, جسم تبديلي

$(\mathbb{R}, +,\times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{R}^*, +,\times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{Z}, +,\times)$ ليس جسم

تمرين تطبيقي :

$\star$ عملية داخلية قي $\mathbb{Q}$ معرفة كمايلي :

$$x \star y = x + y + xy$$

$(\mathbb{Q} \setminus \{-1\},\star)$ زمرة تبديلية

اثبات ان $\star$ داخلية قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

اي نبرهن $x + y + xy \neq -1$ نستعمل البرهان بالخلف

لنفرض ان $x + y + xy = -1$ اي $x + y + xy + 1 = 0$

بمعنى $(x+1)(y+1)=0$ اي $y=-1$ او $x=-1$ وهذا تناقض مع

كون $y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ و $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

اذن $x \star y = x + y + xy \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ فالعملية $\star$ داخلية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

اثبات ان $\star$ تبديلية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star y = y \star x$$

$$x \star y = x + y + xy = y + x + yx = y \star x$$

اثبات ان $\star$ تجميعية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$(x \star y) \star z = (x + y + xy) \star z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

$$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \;\; \dots (1)$$

$$x \star (y \star z) = x \star (y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \;\; \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد ان $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ ومنه

ومنه ان $\star$ تجميعية في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

العنصر الحيادي للعملية $\star$ في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن e العنصر الحيادي للعملية $\star$ في $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \;\; x \star e = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \;\; x + e + xe = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \;\; e + xe = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \;\; (1 + x)e = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \;\; e = 0$$

ومنه ان 0 هو العنصر الحيادي للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

لكل عنصر من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ نضير بالنسبة للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن x' نضير x من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ بالنسبة للعملية $\star$ فيتحقق مايلي

$$x' \star x = 0 \Longrightarrow x' + x + x' x = 0$$

$$\Longrightarrow x' (1 + x) = -x$$

$$\Longrightarrow x' = \frac{-x}{1 + x} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

وبالتالي $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \star)$ زمرة تبديلية

تمرين محلول

لتكن $\star$ عملية في $I =]-1,1[$ معرفة كمايلي

$$x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

(1) بين ان $\star$ عملية داخلية في $I =]-1,1[$

(2) بين ان $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \star)$ زمرة تبديلية

الحل

(1) اثبات ان $\star$ عملية داخلية في $I =]-1,1[$

$$x, y \in]-1,1[\Longrightarrow -1 < x < 1 \text{ و } -1 < y < 1$$

$$\Longrightarrow |x| < 1, |y| < 1$$

$$\Longrightarrow |xy| < 1$$

$$\Longrightarrow -1 < xy < 1$$

$$\Longrightarrow 0 < 1 + xy < 2$$

$$\Longrightarrow 1 + xy > 0$$

الفضاءات الشعاعية

تعريف الفضاء الشعاعي : لنعتبر $(\mathbb{K},+,\times)$ حقل تبديلي $(\mathbb{K}=\mathbb{C}$ او $\mathbb{K}=\mathbb{R})$

لتكن E مجموعة. نسمي $(E,+,*)$ فضاء شعاعيا على الحقل $\mathbb{K}$

(او $\mathbb{K}$ – فضاء شعاعي) اذا كانت

(1) $(E,+)$ زمرة تبديلية

(2) E مزودة بقانون تركيب خارجي $*$

$$\mathbb{K}\times E\to E$$

$$(\lambda,x)\to\lambda.x$$

من اجل كل x,y من E ومن اجل كل $\lambda\ \mu$ من $\mathbb{K}$ لدينا

(1) $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$

(2) $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$

(3) $\lambda.(\mu.x)=(\lambda.\mu).x$

(4) $I_E.x=x$ حيث I_E العنصر الحيادي للعملية (.) في $\mathbb{K}$

ملاحظات :

(1) عناصر E تسمى اشعة وعناصر $\mathbb{K}$ تسمى سلمبات

(2) نسمي الكتابة $\lambda.x$ بضرب الشعاع x بالسلمي λ ونكتب λx بدلا من $\lambda.x$

(3) $\lambda 0=0$ $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ وذالك لان $\lambda x=\lambda(x+0)=\lambda x+\lambda 0$ نجد $\lambda 0=0$

(4) $0x=0$ $\forall x\in E$ وذالك لان $0x=(0+0)x=0x+0x$ نجد $0x=0$

(5) $\lambda x=0\Leftrightarrow\lambda=0\vee x=0$

امثلة :

(1) كل حقل تبديلي $\mathbb{K}$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$

$(V,+,.)(2)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ وذلك لان $\forall \vec{u},\vec{v} \in V \Longrightarrow \vec{u}+\vec{v} \in V$

(جمع الاشعة عملية داخلية في V) $\forall\lambda \in \mathbb{R},\quad \vec{u} \in V \Longrightarrow \lambda\ \vec{u} \in V$

(ضرب شعاع بعدد حقيقي عملية خارجية في V)

$(\mathbb{R}^2,+,.)(3)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حيث

$$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\ ,\forall\lambda \in \mathbb{R},$$

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

$(E,+,.)(4)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حيث $E=\mathfrak{I}(I,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة

من I نحو $\mathbb{R}$ و

$$\forall x \in I : (f+g)(x)=f(x)+g(x),(\lambda f)(x)=\ \lambda f(x)$$

الفضاء الشعاعي الجزئي :

تعريف : ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$F \neq \emptyset \quad (1)$

$\forall x,y \in F \Longrightarrow x+y \in F \quad (2)$

$\forall x \in F\ ,\forall\lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x+y \in F \quad (3)$

نتيجة : ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$F \neq \emptyset \quad (1)$

$\forall x,y \in F,\qquad \forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda x+\mu y \in F \quad (2)$

امثلة :

$(1)\quad \{0_E\}$ و E فضاءان جزئيان من E

$\mathbb{R}\times\{0\}(2)$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ حيث $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(x,0)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$

وذلك لان $(0,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}$ وبالتالي $\mathbb{R}\times\{0\}\neq\emptyset$ و

$$\forall (x,0),(y,0)\in\mathbb{R}\times\{0\},\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}$$

$$\lambda(x,0)+\mu(y,0) = \ (\lambda x+,\mu y,0)\ \in\mathbb{R}\times\{0\}$$

الاسس والابعاد : لنفرض في كل ما يلي ان E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$

المزج الخطي :

تعريف : نسمي مزجا خطيا للاشعة $x_1,x_2,\dots x_n$ من الفضاء الشعاعي E

كل شعاع من الشكل : $\lambda_1\ x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n$ حيث

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$$

مثال : ليكن $E = \ \mathbb{R}^2$ وليكن الشعاع $(2,1)$ من E

لدينا الكتابة التالية $(2,1) = 2.(1,0)+1.(0,1)$

الشعاع $(2,1)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1,0),(0,1)$

العائلة المولدة :

تعريف : نقول ان العائلة $\{\ x_1,x_2,\dots x_n\ \}$ مولدة للفضاء الشعاعي E اذا كتب

كل شعاع من E كمزج خطي لهذه العائلة بمعنى

$$\forall x\in E,\exists\ \lambda_1,\quad \lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\ :$$

$$x = \ \lambda_1\ x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n$$

ونكتب $E = \langle\ \ x_1,x_2,\dots x_n\ \ \rangle$