جامعة الشهيد حمة لخضر- الوادي-
كلّية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيّات

السّنة الثانية
مادّة مدخل إلى الطبولوجيا
السّنة الجامعية:2020 / 2021

السلسلة رقم 2

التمرين 1

لتكن E مجموعة غير خالية. برهن أنّ المسلّمات التّالية في كلتا الحالتين، كافية لتعريف مسافة d على E

1. $d: E\times E \to IR$ تحقّق: أ. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
ب. $d(x,y)=d(y,x)$
ج. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$
2. $d: E\times E \to IR$ تحقّق: أ. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
ب. $d(y,z)\le d(x,y)+d(x,z)$

التمرين 2

لتكن δ مسافة على مجموعة غير خالية E ولتكن $\varphi:[0,+\infty[\to IR$ دالّة متزايدة وتحقّق:

$$\begin{cases}\varphi(t)=0 \Leftrightarrow t=0\\ \forall t,s\ge 0: \varphi(t+s)\le \varphi(t)+\varphi(s)\end{cases}$$

1. برهن أنّ التّطبيق المركّب $d=\varphi\circ\delta$ هو مسافة على E.
2. استنتج أنّ d المعرفة بـ $d(x,y)=\dfrac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}$ هي مسافة على E.

التمرين 3

ليكن (E,d) فضاء متريّ و A,B,C أجزاء من E.

1. برهن أنه إذا كان $x\in A$ فإنّ $d(x,A)=0$. هل العكس صحيح؟
2. بيّن أنّ العلاقة $d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B)$ خاطئة.

التمرين 4

ليكن (E,d) فضاء متريّ ولتكن $A\subset E$. برهن على صحّة التّكافؤات التّالية:

1. $x\in \overline{A} \Leftrightarrow$ توجد متتالية $\{a_n\}_{n\ge1}\subset A$ متقاربة نحو x.
2. x نقطة معزولة في A $\Leftrightarrow$ كلّ متتالية في A ومتقاربة نحو x هي متتالية مستقرّة.

التمرين 5

ليكن (E,d) فضاء متريّ ولتكن $A\subset E$. برهن ما يلي:

1. A مغلق $\Leftrightarrow Fr(A)\subset A \Leftrightarrow$ كلّ متتالية في A ومتقاربة فإنّ نهايتها في A.
2. A مغلق و مفتوح $\Leftrightarrow Fr(A)=\{\ \}$.

التمرين 6

نزوّد المجموعة IN^* بالمسافة: $d(m,n)=\left|\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right|$ (تحقّق أوّلا أنّ d مسافة)

1. تحقّق أنّ المتتالية $\{n\}_{n\ge1}$ هي متتالية كوشى.
2. برهن أنّ هذه المتتالية غير متقاربة في IN^*. ماذا تستنتج فيما يخص (IN^*,d)؟