الفضاءات المتراصة والفضاءات المترابطة

تعريف (تعريفات عامة)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي ولتكن $(A_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر $P(E)$.

1. نقول أن $(A_i)_{i\in I}$ تغطية لـ E إذا كان $E=\bigcup_{i\in I} A_i$
2. نقول عن تغطية $(A_i)_{i\in I}$ لـ E أنها مفتوحة، إذا كان $\forall i\in I : A_i \in \tau$
3. نقول عن تغطية $(A_i)_{i\in I}$ لـ E أنها تقبل تغطية جزئية منتهية إذا وجدت مجموعة منتهية $I_0 \subset I$ بحيث يكون $E=\bigcup_{i\in I_0} A_i$

تعريف (الفضاء المتراص)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي **منفصل**. نقول أن E متراص، إذا كانت كل تغطية مفتوحة لـ E تقبل تغطية جزئية منتهية.

أمثلة

1. IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، هو فضاء منفصل لكنه غير متراص، لأن الجماعة $(]-n,n[)_{n\in IN}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ IR لا تقبل أي تغطية جزئية منتهية.
2. $(E,P(E))$ (الفضاء الطبولوجي المتقطع)، هو فضاء منفصل. الشرط اللازم والكافي الذي يجعل E متراصا، هو أن تكون E مجموعة منتهية: واضح أنه شرط كافي، لكن إذا كانت E مجموعة غير منتهية، فإن الجماعة $(\{x\})_{x\in E}$ هي تغطية مفتوحة لـ E لا تقبل أي تغطية جزئية منتهية.
3. كل فضاء طبولوجي **منتهي**، هو فضاء متراص شريطة أن يكون منفصلا.

تمرين

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي منفصل. إذن E متراص إذا وفقط إذا كان من أجل كل جماعة من الأجزاء المغلقة $(F_i)_{i\in I}$ ذات التقاطع الخالي (أي أن $\bigcap_{\in I} F_i = \{\ \}$)، يمكن استخراج منها جماعة جزئية **منتهية** تكون أيضا ذات التقاطع الخالي.

تعريف (المجموعة المتراصة)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي و $A\subset E$. نقول أن A جزء متراص إذا كان الفضاء الطبولوجي الجزئي (A,τ_A) متراصا.

تمرين

كل جزء منتهي من فضاء طبولوجي منفصل هو جزء متراص.

الحلّ

ليكن $A=\{x_1,x_2,...x_n\}$ جزء منتهي من (E,τ)، ولتكن $(\Omega_i)_{i\in I}\subset\tau_A$ تغطية مفتوحة لــ A :
$A=\bigcup_{\in I}\Omega_i$ وليكن $(1\le k\le n)$ Ω_{i_k} المفتوح الذي يشمل النقطة x_k ،

إذن $A=\bigcup_{k=1}^{n}\Omega_{i_k}$ وبالتالي فإن $(\Omega_{i_k})_{1\le k\le n}$ هي تغطية جزئية منتهية لــ A ، وبالتالي فإن A متراص.

خواص

1. اتحاد عدد منتهي من أجزاء متراصة هو جزء متراص.
2. تقاطع كيفي لأجزاء متراصة هو جزء متراص.

<u>قضية</u>

كل جزء متراص من فضاء منفصل، هو جزء مغلق.

<u>**نظرية**</u> (الخاصية المميزة للأجزاء المتراصة في IR)

لكي يكون جزء من IR **مزود بالطبولوجيا الاعتيادية متراصا**، يلزم ويكفي أن يكون **مغلقا ومحدودا.**

<u>قضية</u>

ليكن $f:(E,\tau_1)\rightarrow(F,\tau_2)$ تطبيق و $A\subset E$ حيث (F,τ_2) فضاء منفصل و f مستمر.

إذا كان A متراصا في E فإن $f(A)$ متراص في F

<u>نظرية</u>

ليكن (E,τ) فضاء متراص و $f:E\rightarrow IR$ تطبيق مستمر.

إذن f محدود ويدرك حديه: $\exists x_1,x_2\in E: f(x_1)=\underset{x\in E}{Inf}\ f(x)\wedge f(x_2)=\underset{x\in E}{Sup}\ f(x)$

<u>تعريف</u> (الترابط)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي. نقول أن E مترابط، إذا استحال ايجاد مفتوحين غير خاليين يشكلان تجزئة لـ E :

E مترابط $\Leftrightarrow$ لا يوجد $(A\neq\{\ \},B\neq\{\ \})$ $E=A\cup B\wedge A\cap B=\{\ \}:A\in\tau,B\in\tau$

<u>ملاحظة</u> (تعريف مكافئ للترابط)

E مترابط، إذا تحقق ما يلي: إذا وجدت تجزئة لـ E بمفتوحين فإن أحدهما خال حتما

E مترابط $\Leftrightarrow$ $\exists A,B \in \tau / A \cap B = \{\ \} \wedge E = A \cup B \Rightarrow A = \{\ \} \vee B = \{\ \}$

أمثلة

1. $E = \{1,2,3,4\}$ و $\tau = \{\{\ \}, E, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. نتحقق بكل سهولة أن E مترابط.
2. كل فضاء متقطع هو فضاء غير مترابط إذا كان يشمل نقطتين على الأقل.

   نستدل على ذلك كما يلي: من أجل $a \in E$، لدينا

   $\left(\{a\} \neq \{\ \}, \{a\}^C \neq \{\ \}\right)$, $E = \{a\} \cup \{a\}^C / \{a\} \cap \{a\}^C = \{\ \}$ و $\{a\}, \{a\}^C$ مفتوحين.
3. كل فضاء خشن هو فضاء مترابط.

نظرية (تعريفات متكافئة لمفهوم الترابط)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي. القضايا الآتية متكافئة

1. E مترابط
2. E ليس اتحاد لمجموعتين مغلقتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.
3. $E, \{\ \}$ هي الأجزاء الوحيدة المغلقة والمفتوحة في آن واحد.
4. كل تطبيق مستمر من نحو مزود بالطبولوجيا المتقطعة، هو تطبيق ثابت.

تعريف (المجموعة المترابطة)

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي و $A \subset E$. نقول أن A جزء مترابط إذا كان الفضاء الطبولوجي الجزئي (A,τ_A) مترابطا.

أمثلة

1. المجموعة الخالية والمجموعات وحيدة العنصر هي أجزاء مترابطة في أي فضاء طبولوجي.
2. IR^* مزود بالطبولوجيا الاعتيادية ليس مترابط لأن $A=]0,+\infty[$ و $B=]-\infty,0[$ جزءان غير خاليان ومفتوحان يشكلان تجزئة لـ IR^*.

تمرين

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي و A جزء مترابط من E وليكن $B\subset E$ بحيث $A\subset B\subset \overline{A}$.

برهن أن B مترابط.

الحــلّ

نفرض أن B ليس مترابط.

إذن يوجد مفتوحين غير خاليين θ_1,θ_2 من E بحيث $B=(B\cap\theta_1)\cup(B\cap\theta_2)$.

بما أن $A\subset B$ فإن $A=(A\cap\theta_1)\cup(A\cap\theta_2)$ ولأن A مترابط، فإنه إما $(A\cap\theta_1)=\{\ \}$ أو $(A\cap\theta_2)=\{\ \}$.

لنفرض أن $(A\cap\theta_1)=\{\ \}$. بما أن A كثيف في B ($B\subset\overline{A}$)، فإن كل مفتوح في B يقطع A وبالتالي فإن $(B\cap\theta_1)\cap A\neq\{\ \}$

لكن $(B\cap\theta_1)\cap A=A\cap\theta_1$ (لأن $A\subset B$)، إذن $(A\cap\theta_1)\neq\{\ \}$ وهذا تناقض.

يكفي وضع $B=\bar{A}$ في التمرين السابق لاستنتاج النتيجة التالية:

نتيجة

إذا كان A مترابط في فضاء طبولوجي (E,τ)، فإن $\bar{A}$ مترابط.

تمرين

ليكن A جزء كثيف في فضاء طبولوجي (E,τ) ($E=\bar{A}$).

أثبت أنه إذا كان A مترابط فإن E مترابط. هل العكس أيضا صحيح؟

نظرية (الخاصية المميزة للأجزاء المترابطة في IR)

نعتبر IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية. يكون $A\subset IR$ مترابط إذا وفقط إذا كان A مجالا.

نتيجة

IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية هو فضاء مترابط ($IR=\left]-\infty,+\infty\right[$)

نظرية

ليكن $f:(E,\tau_1)\to(F,\tau_2)$ تطبيق مستمر.

إذا كان A مترابطا في E فإن $f(A)$ مترابطا في F.

قضية

إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ جماعة من الأجزاء المترابطة في فضاء طبولوجي (E,τ) بحيث $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \{\ \}$،

إذن $\bigcup_{\in I} A_i$ مترابط.

تعريف (المركبات المترابطة)

ليكن $x \in E$. نسمي المراكبة المترابطة لـ x ونرمز بــ $C(x)$ ، اتحاد كلّ الأجزاء المترابطة التي تحوي x.

ملاحظات

1. حسب القضية السابقة فإن المركبة المترابطة هي جزء مترابط لأن تقاطع كل الأجزاء المترابطة التي تحوي x غير خال (يشمل x على الأقل).
2. المراكبة المترابطة لـ x هي أكبر جزء مترابط يحوي x.