الفضاءات المترية

تعريف

لتكن E مجموعة غير خالية، نسمي مسافة على E كل تطبيق $d:E\times E\to IR$ يحقق الشروط التالية

1. $\forall x,y\in E: d(x,y)\geq 0$
2. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
3. $\forall x,y\in E: d(x,y)=d(y,x)$
4. $\forall x,y,z\in E: d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

ونسمي فضاء متري، كل ثنائية (E,d) مشكّلة من مجموعة غير خالية E مزودة بمسافة d.

في فضاء متري، نسمي المقدار الموجب $d(x,y)$ بالمسافة بين النقطتين x و y.

ملاحظة

في التعريف السابق، نسمي الشرط الثالث بالتناظر و الشرط الرابع بالمتراجحة المثلثية.

أمثلة

1. نتحقق بسهولة أن التطبيق $d:IR\times IR\to IR$ المعرف بـ $\forall x,y\in IR: d(x,y)=|x-y|$ هو مسافة على IR، تسمى المسافة الاعتيادية في IR.
2. التطبيق $d:E\times E\to IR$ المعرف بـ $d(x,y)=\begin{cases}1 & : & x\neq y\\ 0 & : & x=y\end{cases}$

هو مسافة على أي مجموعة غير خالية E، تسمى المسافة المتقطعة.

3. $E = IR^n$ ، من أجل $x = (x_1, x_2, \dots x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in IR^n$ نضع

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

يمكن التحقق بسهولة من الشروط الثلاثة الأولى في تعريف المسافة، وللتحقق من الشرط الرابع (المتراجحة المثلثية)، نستعين بمتراجحة كوشي شوارتز التالية:

$$\forall a_i \geq 0, b_i \geq 0 \quad (i = 1,2,..n): \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

المسافة d المعرفة في هذا المثال تسمى المسافة الاقليدية في IR^n

4. $E = IR^n$ ، من أجل $p \geq 1, x = (x_1, x_2, \dots x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in IR^n$ نضع

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

يمكن التحقق بسهولة من الشروط الثلاثة الأولى في تعريف المسافة، وللتحقق من الشرط الرابع (المتراجحة المثلثية)، نستعين بمتراجحة مينكوفسكي التالية:

$$\forall a_i \geq 0, b_i \geq 0 \quad (i = 1,2,..n), p \geq 1: \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

5. $E = IR^n$ ، من أجل $x = (x_1, x_2, \dots x_n), y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in IR^n$ نضع

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

نتحقق بسهولة أن d_∞ مسافة على IR^n

ملاحظة

يتبين من الأمثلة السابقة، أنه على نفس المجموعة يمكن تعريف أكثر من مسافة.

تمرين

ليكن (E,d) فضاء متري، أثبت صحة المتراجحة التالية

$$\forall x,y,z \in E : \left|d(x,z)-d(y,z)\right| \le d(x,y)$$

الحل

استنادا إلى المتراجحة المثلثية في فضاء متري، لدينا

$$d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$$

وبالتالي فإن

$$d(x,z)-d(y,z) \le d(x,y)............(1)$$

من جهة أخرى، و استنادا أيضا إلى المتراجحة المثلثية ، لدينا

$$d(y,z) \le d(y,x)+d(x,z)$$

وبالتالي فإن

$$-d(x,y) \le d(x,z)-d(y,z)............(2)$$

من (1) و (2) نستنتج المطلوب.

الكرة المفتوحة، الكرة المغلقة والغلاف الكروي

تعريف

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $x_0 \in E$ و $r \succ 0$

1. نسمي كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r ونرمز بــ$B(x_0,r)$ المجموعة المعرفة كما يلي:

$$B(x_0,r)=\{x\in E : d(x,x_0)\prec r\}$$

2. نسمي كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r ونرمز بــ$B_f(x_0,r)$ المجموعة المعرفة كما يلي:

$$B_f(x_0,r)=\{x\in E : d(x,x_0)\leq r\}$$

3. نسمي غلاف كروي مركزه x_0 ونصف قطره ρ ونرمز بــ$S(x_0,r)$ المجموعة المعرفة كما يلي:

$$S(x_0,r)=\{x\in E : d(x,x_0)= r\}$$

ينتج عن التعريف السابق مباشرة، أن: $B_f(x_0,r)=B(x_0,r)\cup S(x_0,r)$

أمثلة

1. IR مزود بالمسافة الاعتيادية:

$$B(x_0,r)=]x_0-r,x_0+r[,\qquad B_f(x_0,r)=[x_0-r,x_0+r],\qquad S(x_0,r)=\{x_0-r,x_0+r\}$$

2. مجموعة كيفية مزودة بالمسافة المتقطعة:

أ. من أجل $r\prec 1$: $B(x_0,r)=B_f(x_0,r)=\{x_0\},\qquad S(x_0,r)=\{\ \}$

ب. من أجل $r=1$: $S(x_0,r)=B_f(x_0,r)=E, \quad B(x_0,r)=\{x_0\}$

ت.من أجل $r\succ 1$: $B(x_0,r)=B_f(x_0,r)=E, \quad S(x_0,r)=\{\ \}$

<u>تعريف</u> (المفتوح في فضاء متري)

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A\subset E$ ، نقول أن A مفتوح إذا كان **خاليا** أو إذا حقق الشرط التالي $\forall x\in A, \exists r\succ 0 : B(x,r)\subset A$

<u>خاصية</u>

كل كرة مفتوحة في فضاء متري هي جزء مفتوح.

<u>البرهان</u>

نعتبر الكرة المفتوحة $B(x_0,\rho)$ و ليكن $x\in B(x_0,\rho)$ ، بالتالي $d(x,x_0)\prec \rho$ ، نضع

إذن $r=\rho-d(x,x_0)\succ 0$

لدينا

$$\forall y\in B(x,r): d(y,x_0)\leq d(y,x)+d(x,x_0)\prec r+d(x,x_0)=(\rho-d(x,x_0))+d(x,x_0)=\rho$$

إذن $\forall y\in B(x,r): y\in B(x_0,\rho)$

وبالتالي فإن $\forall x\in B(x_0,\rho), \exists r=\rho-d(x,x_0) / B(x,r)\subset B(x_0,\rho)$

وهذا يعني أن $B(x_0,\rho)$ مفتوح.

نظرية

جماعة كل الأجزاء المفتوحة في فضاء متري (E,d) هي طبولوجيا على E، تشكل جماعة كل الكرات المفتوحة أساسا لهذه الطبولوجيا.

نتيجة

كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي **لكن العكس غير صحيح.**

نظرية (الخاصية المميزة لمفتوح في فضاء متري)

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A \subset E$.

A مفتوح في E إذا وفقط إذا كان اتحاد لكل الكرات التي يحتويها.

ملاحظة هامة

أن التعاريف المتعلقة بمفاهيم المغلق، الجوار، أنماط النقاط (الداخلية، الملاصقة، الخارجية...) وكل التعاريف التي تطرقنا لها في فصل الفضاءات الطبولوجية تبقى صالحة في فضاء متري ولا يطرئ عليها أي تعديل سوى ما يترتب عن توظيف تعريف المفتوح في فضاء متري.

المسافة بين مجموعتين، المسافة بين نقطة ومجموعة، قطر مجموعة

تعريف

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A,B \subset E$ و $x_0 \in E$

1. نسمي المسافة بين A و B ونرمز بـ $d(A,B)$ المقدار التالي $\underset{(x,y)\in A\times B}{Inf}\ d(x,y)$
2. نسمي المسافة بين A و x_0 ونرمز بـ $d(A,x_0)$ المقدار التالي $\underset{x\in A}{Inf}\ d(x,x_0)$

3. نسمي قطر المجموعة A ونرمز بـ $\delta(A)$ المقدار التالي $\underset{(x,y)\in A\times A}{Sup}\ d(x,y)$ ونصطلح على أن $\delta(\{\ \})=0$

تمرين

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A\subset E$ و $x_0\in E$

برهن صحة التكافؤ التالي $d(A,x_0)=0 \Leftrightarrow x_0\in \overline{A}$

الحل

لنفرض أولا أن $x_0\in\overline{A}$ هذا يعني أن $\forall\varepsilon\succ 0: B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\{\ \}$

إذن $\forall\varepsilon\succ 0,\exists x\in A: d(x_0,x)\prec\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon\succ 0, d(x_0,A)\leq d(x_0,x)\prec\varepsilon$

منه فإن $d(x_0,A)=0$

لنفرض الآن أن $d(x_0,A)=0$ ولنبرهن على أن $\forall\varepsilon\succ 0: B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\{\ \}$ بالتناقض، أي $\exists\varepsilon\succ 0: B(x_0,\varepsilon)\cap A=\{\ \}$

وهذا يعني أن $\exists\varepsilon\succ 0: d(x_0,x)\geq\varepsilon, \forall x\in A$

وبالتالي فإن $\exists\varepsilon\succ 0: d(x_0,A)=\underset{x\in A}{Inf}\ d(x_0,x)\geq\varepsilon\succ 0$

وهذا تناقض مع كون $d(x_0,A)=0$

كنتيجة مباشرة للتمرين السابق، التكافؤ التالي

نتيجة

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A\subset E$ و $x_0 \in E$ ، لدينا إذن

$$d(A,x_0)\succ 0 \Leftrightarrow x_0 \notin \overline{A}$$

الأجزاء المحدودة

تعريف

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $A\subset E$.

نقول أن A محدود، إذا وجدت كرة مفتوحة $B(x_0,r)$ في E بحيث يكون $A\subset B(x_0,r)$

ملاحظة

يمكن تعويض الكرة المفتوحة بالكرة المغلقة في التعريف السابق.

تمرين

ليكن (E,d) فضاء متري، و $A\subset E$ ، لدينا: A محدود $\Leftrightarrow$ $\delta(A)\prec\infty$

الحل:

نفرض أن A محدود ، إذن بالتعريف $\exists B(x_0,r)\subset E / A\subset B(x_0,r)$ وبالتالي استنادا إلى المتراجحة المثلثية، نجد أن

$$\forall(x,y)\in A^2 : d(x,y)\le d(x,x_0)+d(x_0,y)\prec 2r$$
$$\Rightarrow \quad \delta(A)=\underset{(x,y)\in A^2}{Sup}\ d(x,y)\le 2r\prec\infty$$

لنفرض الآن أن $\delta(A)\prec\infty$ ، نضع $r=\delta(A)+1$ وليكن $x_0\in A$ ، لدينا إذن

$$\forall x\in A: d(x_0,x)\leq \underset{(y,z)\in A^2}{Sup}\, d(y,z)=\delta(A)\prec r$$
$$\Rightarrow \quad x\in B(x_0,r)$$
$$\Rightarrow \quad A\subset B(x_0,r)$$

المتتاليات في فضاء متري

تعريف

ليكن (E,d) فضاء متري.

1. نسمي متتالية نقاط في E ، كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية IN في E ونرمز عادة لمتتالية بالرمز $(x_n)_{n\geq 1}$.
2. نقول أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو $x_0\in E$ (أو أن x_0 هو نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$) ونرمز بـــ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ إذا تحقق ما يلي

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon\succ 0,\exists n_0\in IN^*/\forall n\geq n_0: d(x_n,x_0)\prec\varepsilon$$

وإذا لم يوجد $x_0\in E$ يحقق ذلك، فإننا نقول أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متباعدة.

ملاحظة هامة $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$

خاصية

نهاية متتالية في فضاء متري، **إن وجدت** فهي وحيدة.

تعريف

ليكن (E,d) فضاء متري، ولتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية في E

1. نقول أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كوشي، إذا تحقق ما يلي
$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in IN^* / \forall n \geq n_{0,}, \forall m \geq n_{0,} : d(x_n, x_m) \prec \varepsilon$$
2. نقول أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة، إذا تحقق ما يلي
$$\exists r \succ 0, \exists x_0 \in E / \forall n \geq 1 : x_n \in B(x_0, r)$$

قضية

1. كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي.
2. كل متتالية كوشي في فضاء متري هي متتالية محدودة.

ملاحظة هامة

عكس القضايا السابقة غير صحيح على العموم:

1. مثلا في Q مزود بالمسافة الاعتيادية (اقتصار المسافة الاعتيادية في IR على Q)، المتتالية $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... \frac{1}{n!}$ هي متتالية كوشي ولكنها ليست متقاربة في Q.
2. مثلا في IR مزود بالمسافة الاعتيادية، المتتالية $x_n = (-1)^n$ هي متتالية محدودة ولكنها ليست متتالية كوشي.

الفضاء المتري التام

تعريف

نقول عن فضاء متري أنه تام، إذا كانت كل متتالية كوشي فيه هي متتالية متقاربة.

أمثلة

1. IR مزود بالمسافة الاعتيادية هو فضاء متري تام (نتيجة في التحليل الرياضي)
2. مجموعة كيفية $E \neq \{\}$ مزودة بالمسافة المتقطعة هو فضاء متري تام لأن كل متتالية كوشي فيه هي متتالية مستقرة وبالتالي متقاربة.

تمرين

ليكن (E,d) فضاء متري، وليكن $F \subset E$. إذن

F فضاء جزئي تام إذا وفقط إذا كان F مغلق في E

التطبيقات المستمرة

تعريف

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f : E \to F$ تطبيق و $x_0 \in E$ ، $A \subset E$

1. نقول أن f مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق ما يلي

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \eta(x_0,\varepsilon) \succ 0 / \forall x \in E : d(x,x_0) \prec \eta \Rightarrow \tilde{d}\left(f(x), f(x_0)\right) \prec \varepsilon$$

2. نقول أن f مستمر على A إذا كان مستمر عند كل نقطة $x_0 \in A$

من خلال تعريف الكرة المفتوحة في فضاء متري ومفهوم الصورة و الصورة العكسية لمجموعة بواسطة طبيق، يمكن بسهولة التعبير على استمرار f عند النقطة x_0 بالقضايا المتكافئة التالية

قضية

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f:E\to F$ تطبيق و $x_0\in E$ ، القضايا الآتية المتكافئة

1. f مستمر عند النقطة x_0
2. $\forall\varepsilon\succ 0,\exists\eta(x_0,\varepsilon)\succ 0/\forall x\in E: x\in B_d(x_0,\eta)\Rightarrow f(x)\in B_{\tilde{d}}(f(x_0),\varepsilon)$
3. $\forall\varepsilon\succ 0,\exists\eta(x_0,\varepsilon)\succ 0: f(B_d(x_0,\eta))\subset B_{\tilde{d}}(f(x_0),\varepsilon)$
4. $\forall\varepsilon\succ 0,\exists\eta(x_0,\varepsilon)\succ 0: B_d(x_0,\eta)\subset f^{-1}(B_{\tilde{d}}(f(x_0),\varepsilon))$

ملاحظة هامة (مفهوم الاستمرار بين فضاءين طبولوجيين)

في القضيتين 3 و 4 المتكافئتين السابقتين، عندما نعوض الكرة المفتوحة $B_d(x_0,\eta)$ بجوار للنقطة x_0 و نعوض الكرة المفتوحة $B_{\tilde{d}}(f(x_0),\varepsilon)$ بجوار للنقطة $f(x_0)$ ، نحصل على تعريف استمرار التطبيق f إذا كان E و F فضاءين طبولوجيين.

أمثلة

1. لتكن $E\neq\{\ \}$، مجموعة كيفية مزودة بالمسافة المتقطعة و $(F,\tilde{d})$ فضاء متري كيفي و $f:E\to F$ تطبيق. من أجل كل $x_0\in E$ لدينا:

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \eta = \frac{1}{2} / \forall x \in E : x \in B_d(x_0, \eta) \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) \in B_{\tilde{d}}(f(x_0), \varepsilon)$$

إذا f مستمر عند كل نقطة $x_0 \in E$

2. ليكن $f : E \to F$ تطبيق ثابت: $\forall x \in E : f(x) = y_0 \in F$ ، حيث $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين كيفيين. من أجل كل $x \in E$ لدينا:

$$\forall \varepsilon \succ 0, \forall x' \in E : \tilde{d}(f(x), f(x')) = \tilde{d}(y_0, y_0) = 0 \prec \varepsilon$$

إذا f مستمر عند كل نقطة $x \in E$ ويمكن أخذ η كيفي.

نظرية

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f : E \to F$ تطبيق. القضيتين الآتيتين متكافئتين

1. f مستمر عند النقطة x_0
2. إذا كانت المتتالية $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ متقاربة نحو x_0 في (E,d)، فإن المتتالية $(f(x_n))_{n\geq 1} \subset F$ متقاربة نحو $f(x_0)$ في $(F,\tilde{d})$

قضية

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d}),(G,\hat{d})$ فضاءات مترية، وليكن $f : E \to F, g : F \to G$ تطبيقين.

إذا كان f مستمر عند $x_0 \in E$ و g مستمر عند $f(x_0) \in F$ فإن $g \circ f$ مستمر عند

نظرية

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f : E \to F$ تطبيق. القضايا الآتية متكافئة:

1. f مستمر على E
2. من أجل كل مفتوح θ في F ، فإن $f^{-1}(\theta)$ مفتوح في E

3. من أجل كل مغلق B في F، فإن $f^{-1}(B)$ مغلق في E

4. $\forall A\subset E: f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

5. $\forall B\subset F: \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$

ملاحظة

النظرية السابقة تبقى صالحة في حالة التطبيقات المعرفة بين فضاءين طبولوجيين.

تمرين

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f,g:E\to F$ تطبيقين مستمرين على E. نفرض أنه يوجد جزء كثيف A في E ($\overline{A}=E$) بحيث $\forall x\in A: f(x)=g(x)$.

برهن أن $\forall x\in E: f(x)=g(x)$

تعريف (الاستمرار بانتظام)

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f:E\to F$ تطبيق.

نقول أن f مستمر بانتظام على E إذا تحقق ما يلي

$$\forall\varepsilon\succ 0,\exists\eta(\varepsilon)\succ 0/\forall x,x'\in E: d(x,x')\prec\eta\Rightarrow\tilde{d}(f(x),f(x'))\prec\varepsilon$$

تعريف (التماثل)

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f:E\to F$ تطبيق.

نقول أن f تماثل إذا تحقق ما يلي:

1. f تقابل.

2. f و f^{-1} مستمرين.

تعريف

ليكن $(E,d),(F,\tilde{d})$ فضاءين متريين، وليكن $f:E\to F$ تطبيق.

1. نقول أن f ليبشيتزي على E إذا وجد ثابت $k\succ 0$ يحقق ما يلي:

$$\forall x,x'\in E:\tilde{d}\left(f(x),f(x')\right)\leq kd(x,x')$$

2. إذا كان f ليبشيتزي على E بحيث $0\prec k\prec 1$ فإننا نقول أن f تقليص.

قضية

كل تطبيق ليبشيتزي هو تطبيق مستمر بانتظام.

البرهان

استنادا إلى تعريف التطبيق الليبشيتزي، يكفي أخذ $\eta=\dfrac{\varepsilon}{k}$ في تعريف الاستمرار بانتظام.

تعريف (النقطة الصامدة)

ليكن $f:E\to E$ تطبيق. نقول أن $a\in E$ نقطة صامدة بالنسبة لـ f إذا كان $f(a)=a$

نظرية (نظرية النقطة الصامدة)

ليكن (E,d) فضاء متري تام و ليكن $f:E\to E$ تقليص. إذن f يقبل نقطة صامدة وحيدة.

البرهان

أولا بالنسبة للوحدانية، نفرض أن f يقبل نقطتين صامدتين و لتكن a و b أي $\exists a \neq b : f(a) = a \wedge f(b) = b$.

لدينا $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b)$ وبالتالي فإن $1 \leq k$ لأن $d(a,b) \succ 0$ وهذا تناقض مع كون f تقليص.

بالنسبة للوجود: لتكن x_0 نقطة كيفية من E. نعرّف المتتالية $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ كما يلي

$$x_n = f(x_{n-1})$$

استنادا إلى كون f تقليص، نبرهن بالتراجع على n أن $\forall n \geq 0 : d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$

ثم باستعمال المتراجحة المثلثية نبرهن أن $\forall n \geq 0, \forall p \geq 1 : d(x_{n+p}, x_n) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$

ونظرا لأن $0 \prec k \prec 1$ فإننا نستنتج أن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كوشي في E ، وبما أن E فضاء تام فهي متقاربة نحو نقطة ولتكن $a \in E$

الآن، بالمرور إلى النهاية في العلاقة $x_n = f(x_{n-1})$ ، علما أن f تطبيق مستمر (لأنه ليبشيتزي)، فإننا نجد أن $f(a) = a$