الفضاءات الطبولوجية المنفصلة، القابلة للفصل، الطبولوجيا الأثر وطبولوجيا الجداء

الفضاءات المنفصلة (Espaces séparés)

تعريف

نقول عن فضاء طبولوجي (E,τ) أنه منفصل إذا كان من أجل كل عنصرين مختلفين y, x ، يوجد جوار V لـ x و يوجد جوار W لـ y بحيث يكون $V \cap W = \{\ \}$

$$\forall x \neq y : \exists V \in V(x), \exists W \in W(y) : V \cap W = \{\ \}$$

أمثلة

1. كل فضاء خشن (مزود بالطبولوجيا الضعيفة) ذي أكثر من عنصر واحد ليس منفصلا.
2. كل فضاء متقطع (مزود بالطبولوجيا القوية) هو فضاء منفصل.
3. IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية هو فضاء منفصل.

تمـريـن

يكون فضاء طبولوجي (E,τ) منفصلا إذا وفقط إذا كانت كل نقطة منه مساويّة لتقاطع جميع جواراتها المغلقة:

$$(E,\tau) \text{ منفصل } \Leftrightarrow \forall x \in E : \bigcap_{\substack{V_x \in V(x) \\ V_x{}^C \in \tau}} V_x = \{x\}$$

الحـلّ

نفرض أولا أن (E,τ) منفصل.

ليكن $x \in E$ ، لإثبات أن النقطة x مساويّة لتقاطع جميع جواراتها المغلقة، يكفي طبعا إثبات الاحتواء $\bigcap_{\substack{V_x \in V(x) \\ V_x{}^C \in \tau}} V_x \subset \{x\}$ ، وسنقوم بذلك باستعمال البرهان بالتناقض:

لنفترض أن التقاطع الوارد على يسار هذا الاحتواء يضم نقطة أخرى y تختلف عن x

بما أن الفضاء منفصل، فإنه يوجد تعريفا، جواران مفتوحان U و V للنقطتين x و y على الترتيب بحيث $V \cap U = \{\ \}$

يترتّب عن ذلك، أن متمّمة V جزء مغلق يحوي U، فهو إذن جوار مغلق لـ x وهذا تناقض مع كون y ينتمي إلى كل جوارات x المغلقة.

لنبيّن الآن العكس .

نعتبر من أجل ذلك نقطتين مختلفتين x و y من E.

ينجم عن المساواة أعلاه وجود جوار مغلق V_x لـ x لا تنتمي إليه y ، نستنتج إذن أن $V_x{}^C$ جوار مفتوح لـ y لا يقطع x . إذن E منفصل.

من التمرين السابق نستخلص بسهولة النتيجة الواضحة التالية

نتيجة

1. كل نقطة من فضاء منفصل تشكّل جزءا مغلقا.
2. كل جزء منته من فضاء منفصل هو جزء مغلق.

الفضاءات القابلة للفصل (Espaces séparables)

<u>تعريف</u>

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي و A,B ، جزءين من E.

1. نقول أن A كثيف في B إذا كانت كل نقطة من B ملاصقة لــ A ونكتب

A كثيف في $B \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$

2. نقول أن A كثيف في E إذا كانت كل نقطة من E ملاصقة لــ A ونكتب

A كثيف في $E \Leftrightarrow E = \overline{A}$

3. نقول أن E قابل للفصل، إذا وجد $A \subset E$ **قابل للعد** بحيث يكون A كثيف في E

<u>مثال هام</u>

IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية هو فضاء قابل للفصل: مجموعة الأعداد الناطقة Q مجموعة كثيفة في IR ($IR = \overline{Q}$) وقابلة للعد.

الطبولوجيا الأثر والفضاءات الطبولوجية الجزئية

<u>تعريف</u>

ليكن A جزء غير خالي من فضاء طبولوجي (E,τ). نسمي أثر مفتوح θ من τ على A ، المجموعة الجزئية θ_A من A المعرفة بــ $\theta_A = \theta \cap A$

نرمز لجماعة آثار مفتوحات E على A بــ τ_A .

نستطيع أن نتحقق بسهولة أن τ_A طبولوجيا على A ، وهذا يقودنا للتعريف التالي

تعريف

تسمى τ_A طبولوجيا الأثر على A ، وتسمى الثنائية (A,τ_A) فضاء طبولوجي جزئي، ونكتب

$$\tau_A=\{\theta_A\subset A:\exists\theta\in\tau:\theta_A=\theta\cap A\}$$

أمثلة

1.نعتبر $E=\{a,b,c,d\}$ ، مزود بالطبولوجيا $\tau=\{E,\{\ \},\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ و $A=\{a,d\}$. إذن الطبولوجيا الأثر τ_A هي: $\tau_A=\{A,\{\ \},\{a\}\}$

2.نعتبر IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية و $A=IN$. لدينا $\forall n\in IN:\left]-1+n,1+n\right[\cap A=\{n\}$ إذن $\tau_A=P(IN)$ هي الطبولوجيا المتقطعة في IN

استنادا إلى تعريف المفتوح في الفضاء الجزئي، وباستخدام العلاقات بين المجموعات، ستخلص بسهولة القضية التالية

قضية

ليكن (A,τ_A) فضاء طبولوجي جزئي من (E,τ). إذن F مغلق في A إذا وفقط إذا وجد F'مغلق في E بحيث يكون $F=A\cap F'$

$$F \text{ مغلق في } A \Leftrightarrow \exists F'/(F')^C\in\tau:F=A\cap F'$$

الطبولوجيا الجداء

نعرّف هنا طبولوجيا طبيعيّة على جداء ديكارتي من فضاءات طبولوجيّة .سوف نقتصر على حالة جداء ديكارتي منتهي.

تـعـريـف

ليكـن $(E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2)....,(E_n,\tau_n)$ ، n فضاء طـبـولـوجـي غـير خـالـي.

نـضــع $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

1. نسمي مفتوحا أوليا في E كل جزء Ω من E يكتب على الشكل

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n \,/\quad \Omega_i \in \tau_i \quad 1 \le i \le n$$

2. نسمي مفتوحا في E كل اتّحاد من مفتوحات أوليّة.

جماعة كل الأجزاء المفتوحة في $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ الوارد في التعريف السابق، تشكل طبولوجيا على E تسمى الطبولوجيا الجداء و جماعة المفتوحات الأولية تشكّل أساسا لطبولوجيا الجداء.