النقاط الداخلية، الملاصقة، الحافة والخارجية في فضاء طبولوجي.

يسمح مفهوم الجوار الذي تطرقنا له في المحاضرة السابقة بتصنيف نقاط فضاء طبولوجي إلى أربع أنواع، سنتطرق إليها فيما يأتي

1. النقاط الداخلية

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي (E,τ)، نقول عن نقطة $x \in A$ أنها نقطة داخلية في A إذا كانت A جوارا لها.

نرمز لمجموعة كل النقاط الداخلية في A بـ $\overset{\circ}{A}$ ونسميها داخلية A

ملاحظة

ينتج عن التعريف السابق مباشرة أن $\overset{\circ}{A} \subset A$

أمثلة

1. إذا كان E الفضاء الطبولوجي الخشن (المزود بأضعف طبولوجيا) و A جزء من E فإن

$$\overset{\circ}{A} = \{\ \} \quad \text{إذا كان} \quad A \neq E$$

$$\overset{\circ}{A} = E \quad \text{إذا كان} \quad A = E$$

2. إذا كان E الفضاء الطبولوجي المتقطع (المزود بأقوى طبولوجيا) و A جزء من E فإن

$$\overset{\circ}{A} = A$$

3.نعتبر IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، إذن

$$\forall a \in IR : \overbrace{\{a\}}^{\circ} = \{\ \}$$

$$\forall a,b \in IR : \overbrace{[a,b]}^{\circ} = \overbrace{[a,b[}^{\circ} = \overbrace{]a,b]}^{\circ} = \overbrace{]a,b[}^{\circ} =]a,b[$$

$$\mathring{N} = \mathring{Z} = \mathring{Q} = \overbrace{Q^C}^{\circ} = \{\ \}$$

<u>نظرية</u>

$\mathring{A}$ هو اتحاد كل الأجزاء المفتوحة المحتواة في A ، أي أن $\mathring{A}$ هو أكبر مفتوح محتوى في A

<u>البرهان</u>

ليكن $x \in \mathring{A}$ ، إذن

$$\exists \theta_x \in \tau : x \in \theta_x \subset A$$

بالتالي

$$\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} x \subset \bigcup_{x \in \mathring{A}} \theta_x \subset \bigcup_{x \in A} \theta_x$$

من جهة أخرى، ليكن $x \in \bigcup_{x \in A} \theta_x$ فإنه ينتج عن ذلك أن

$$x \in \theta_x \subset A$$

وهذا يعني أن A هو جوار لــ x وبالتالي فإن $x \in \mathring{A}$

والنتيجة إذن هي

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{x \in \theta_x \subset A \\ \theta_x \in \tau}} \theta_x$$

<u>تمرين</u> (نتيجة مهمة)

1. $\mathring{A}$ هو جزء مفتوح

2. A مفتوح $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$

<u>الحـلّ</u>

1. $\mathring{A}$ مفتوح لأنه اتحاد أجزاء مفتوحة حسب النظرية السابقة

2. نفرض أولا أن A مفتوح. بما أن $\mathring{A} \subset A$ بالتعريف، يكفي إذن إثبات أن $A \subset \mathring{A}$ لدينا $A \subset A$ ، هذا يعني أن A مفتوح محتوى في A ،إذن حسب النظرية السابقة فإن $A \subset \mathring{A}$

نفرض الآن أن $\mathring{A} = A$ ، بما أن $\mathring{A}$ مفتوح حسب النقطة الأولى، فإن A أيضا مفتوح.

<u>خواص</u>

ليكن A, B جزءين من فضاء طبولوجي (E, τ) . لدينا إذن الخواص التالية

1. $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

2. $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overbrace{A \cap B}^{\circ}$

3. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$

البرهان

1. ليكن $x \in \overset{\circ}{A}$ ، إذن

$\exists \theta_x \in \tau : x \in \theta_x \subset A$ ، بما أن $A \subset B$ فإن $\exists \theta_x \in \tau : x \in \theta_x \subset B$

وهذا يعني أن $x \in \overset{\circ}{B}$ وبالتالي فإن $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

2. لدينا $A \cap B \subset A$ وأيضا $A \cap B \subset B$ إذن حسب الخاصية الأولى السابقة فإن

$\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$ وأيضا $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{B}$

وبالتالي فإن $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\forall x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \Rightarrow \exists \theta_x^1, \theta_x^2 \in \tau : x \in \theta_x^1 \subset A \wedge x \in \theta_x^2 \subset B$$

بوضع $\theta_x = \theta_x^1 \cap \theta_x^2 \in \tau$ (هو أيضا مفتوح لأنه تقاطع مفتوحين)، نجد أن

$$\forall x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \Rightarrow \exists \theta_x \in \tau : x \in \theta_x \subset A \cap B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$$

وهذا يعني أن $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$

3. بما أن $A \subset A \cup B$ وأيضا $B \subset A \cup B$ إذن حسب الخاصية الأولى السابقة فإن

$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ وأيضا $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

وبالتالي فإن $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

ملاحظة

الاحتواء العكسي في الخاصية الثالثة السابقة ليس بالضرورة محققا، مثلا في IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية: من أجل $A = [0,1]$ و $B = [1,2]$ فإن $A \cup B = [0,2]$

لدينا $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]0,2[$ لكن $\overset{\circ}{A} =]0,1[$ و $\overset{\circ}{B} \subset]1,2[$ وبالتالي $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

2.النقاط الملاصقة

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي (E, τ)، نقول عن نقطة $x \in E$ أنها نقطة ملاصقة لـ A إذا كان كل جوار لـ x يقطع A.

نرمز لمجموعة كل النقاط الملاصقة لـ A بـ $\overline{A}$ ونسميها ملاصقة A

إذا رمزنا لجماعة كل جوارات النقطة x بـ $V(x)$ فإننا نكتب

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in V(x) : V \cap A \neq \{\ \}$$

ملاحظة

1. خلافا لتعريف النقاط الداخلية لجزء A فإن $x \in \overline{A}$ لا يستوجب بالضرورة أن يكون $x \in A$ هذا يعني أنه توجد نقاط ملاصقة لـ A ليست بالضرورة عناصر من A

2. بما أنه من أجل كل $x \in A$ فإنه $\forall V \in V(x) : \{x\} \subset V \cap A$

وبالتالي فإن $\forall V \in V(x) : V \cap A \neq \{\ \}$

إذن $x \in \overline{A}$ وعليه فإن $A \subset \overline{A}$

وسنرى في النظرية الموالية أن $\overline{A}$ هو أصغر جزء مغلق يحتوي A

نظرية

$\overline{A}$ هو تقاطع كل الأجزاء المغلقة في E التي تحتوي A

البرهان

لنبرهن أن $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F^C \in \tau}} F$

نبدأ أولا بالاحتواء $\overline{A} \subset \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F^C \in \tau}} F$ ، لدينا:

$$x \notin \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F^C \in \tau}} F \Rightarrow \exists F : A \subset F, F^C \in \tau \wedge x \notin F \left(x \in F^C\right)$$

بما أن F^C مفتوح و $x \in F^C$ فإن F^C جوار لـ x ، لكن $A \subset F$ وبالتالي فإن $F^C \cap A = \{\ \}$ وهذا يعني أن $x \notin \overline{A}$ و نكون بذلك أثبتنا الاحتواء الأول

لنثبت الآن الاحتواء الثاني: $\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F^C \in \tau}} F \subset \overline{A}$ ، لدينا

$$x \notin \overline{A} \Rightarrow \exists V \in V(x) : V \cap A = \{\ \}$$

بما أن V جوار لـ x فإنه يوجد مفتوح θ_x بحيث $x \in \theta_x \subset V$

بوضع $F = \theta_x{}^C$ نجد أن F مغلق يحقق $A \subset F$ بحيث $x \notin F$ بالتالي نكون قد وصلنا إلى إثبات الاحتواء الثاني.

باستعمال النظرية السابقة، نتحقق بسهولة من الخواص التالية

<u>خواص</u>

1. $\overline{A}$ هو جزء مغلق
2. A مغلق إذا وفقط إذا كان $\overline{A} = A$
3. $\overline{\{\ \}} = \{\ \}$ ، $\overline{E} = E$
4. $\forall A, B \subset E : A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
5. $\forall A \subset E : \overline{\overline{A}} = \overline{A}$
6. $\forall A, B \subset E : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7. $\forall A, B \subset E : \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

تمرين (علاقـات هـامـة)

ليكن A جزء من فضاء طبولوجي (E,τ) ، برهن صحة العلاقات التالية

$$\left(\overline{A}\right)^C = \overbrace{\left(A^C\right)}^{\circ} \quad \text{و} \quad \left(\mathring{A}\right)^C = \overline{A^C}$$

الحـــل

لدينا:

$$\left(\mathring{A}\right)^C = \left(\bigcup_{\substack{x\in\theta_x\subset A\\ \theta_x\in\tau}}\theta_x\right)^C = \bigcap_{\substack{x\in\theta_x\subset A\\ \theta_x\in\tau}}\theta_x^{\ C} = \bigcap_{\substack{A^C\subset F\\ F^C\in\tau}}F = \overline{A^C}$$

وبنفس الفكرة نتحقق من العلاقة الثانية

$$\left(\overline{A}\right)^C = \left(\bigcap_{\substack{A\subset F\\ F^C\in\tau}}F\right)^C = \bigcup_{\substack{A\subset F\\ F^C\in\tau}}F^C = \bigcup_{\substack{\theta\subset A^C\\ \theta\in\tau}}\theta = \overbrace{\left(A^C\right)}^{\circ}$$

ملاحظة

إذا كانت x نقطة ملاصقة لــ A ، فمن الممكن أن يكون كل جوار لـ x يقطع A في نقطة تختلف عن x (مثلا في IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، من أجل $A=]0,1]$ و $x=0$)

ومن الممكن أن يوجد جوار لـ x لا يقطع A إلا عند النقطة x (مثلا في IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، من أجل $A=\{1,2\}$ و $x=1$).

الملاحظة السابقة تقودنا إلى تصنيف النقاط الملاصقة إلى صنفين: نقاط التراكم (الحالة الأولى) والنقاط المعزولة أو المنعزلة (الحالة الثانية).

<u>تعريف</u>

1. نقول عن نقطة $x \in E$ أنها نقطة تراكم لـ A ، إذا كان كل جوار لـ x يقطع A في نقطة على الأقل تختلف عن x و نرمز لمجموعة كل نقاط التراكم لـ A بـ A':

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in V(x): V \cap (A - \{x\}) \neq \{\ \}$$

2. نقول عن نقطة $x \in A$ أنها نقطة معزولة أو منعزلة في A ، إذا وجد جوار لـ x لا يقطع A إلا عند النقطة x ، أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists V \in V(x): V \cap A = \{x\}$$

<u>ملاحظات هامة</u>

1. نقطة التراكم لمجموعة هي نقطة ملاصقة، يمكن أن تنتمي إلى المجموعة كما يمكن ألاّ تنتمي إليها، بينما النقطة المعزولة هي نقطة ملاصقة تنتمي إلى المجموعة تعريفا.
2. نقاط التراكم والنقاط المعزولة تشكل تجزئة لمجموعة النقاط الملاصقة.
3. من الملاحظة السابقة، ولأن $A \subset \overline{A}$ ، نستنتج العلاقة التالية $\overline{A} = A \cup A'$
4. نقطة ملاصقة لمجموعة ولا تنتمي إليها هي حتما نقطة تراكم.

<u>تمرين</u> (خاصية مهمة)

ليكن A جزء من فضاء طبولوجي (E, τ)، إذن A **مغلق إذا وفقط إذا كان** $A' \subset A$

الحــلّ

نفرض أن A مغلق، إذن $\overline{A}=A$ ، وبما أن $\overline{A}=A\cup A'$ فإن $A'\subset\overline{A}=A$

نفرض الآن أن $A'\subset A$ ، بما أن $\overline{A}=A\cup A'$ فإن $\overline{A}=A$ وعليه فإن A مغلق.

3. نقاط الحافة والنقاط الخارجية

تعريف

ليكن A جزء من فضاء طبولوجي (E,τ) و $x\in E$.

1. نقول أن x نقطة من حافة A إذا كان كل جوار لـ x يقطع في نفس الوقت الجزء A و الجزء المتمم لــ A ، نسمي حافة A ونرمز بــ $Fr(A)$ مجموعة كل نقاط حافة A :

$$x\in Fr(A)\Leftrightarrow\forall V\in V(x):V\cap A\neq\{\ \}\wedge V\cap A^C\neq\{\ \}$$

2. نقول أن x نقطة من خارجية A إذا انتمت إلى داخلية الجزء المتمم لــ A ، نسمي خارجية A ونرمز بــ $Ext(A)$ مجموعة كل نقاط خارجية A :

$$Ext(A)=\overset{\circ}{\overbrace{\left(A^C\right)}}$$

ملاحظات هامة

1. ينتج من التعريف مباشرة أن $Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{A^C}$

2. $Fr\left(A^C\right)=\overline{A^C}\cap\overline{\left(A^C\right)^C}=\overline{A^C}\cap\overline{A}=Fr(A)$

3. من العلاقة $\left(\overline{A}\right)^C=\overbrace{\left(A^C\right)}^{\circ}$ ، ينتج أن $Ext(A)=\overbrace{\left(A^C\right)}^{\circ}=\left(\overline{A}\right)^C$

<u>تمرين</u> (خواص مهمة)

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي (E,τ).

1. برهن أنّ $Fr(A)=\overline{A}-\mathring{A}$

2. برهن أنّ الأجزاء التالية: $Fr(A)$ ، $\mathring{A}$ و $Ext(A)$ تشكل تجزئة لـ E :

$$E=\mathring{A}\cup Fr(A)\cup Ext(A)$$

<u>الحـلّ</u>

1. باستعمال العلاقة $\left(\mathring{A}\right)^C=\overline{A^C}$ ، ولأن $\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$ نجد أن

$$Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{A^C}=\overline{A}\cap\left(\mathring{A}\right)^C=\overline{A}-\mathring{A}$$

2. أولا حسب النقطة السابقة فإن $\mathring{A}$ و $Fr(A)$ تشكل تجزئة لــ $\overline{A}$ ، ومن جهة أخرى واضح أن $\overline{A}$ و $\left(\overline{A}\right)^C$ تشكل تجزئة لــ E و بالتالي نحصل على النتيجة بملاحظة أن $\left(\overline{A}\right)^C=Ext(A)$.