الفضاءات الطبولوجية (المفتوحات، المغلقات والجوارات)

لتكن E مجموعة كيفية غير خالية و$P(E)$ جماعة كل أجزاء E .

تعريف

نقول عن جماعة جزئية τ من$P(E)$ أنّها طبولوجيا على E إذا تحقق ما يلي

1. E و ϕ عنصران من τ

2. τ مستقرة بواسطة الاتحاد الكيفي، أي: من أجل كل جماعة $(A_i)_{i\in I}$ من τ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

3. τ مستقرة بواسطة التقاطع المنتهي، أي: من أجل كل جماعة **منتهية** $(A_i)_{1\le i\le n}$ من τ فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

تسمى الثنائية (E,τ) **فضاء طبولوجيّا** و يطلق على عناصر الجماعة τ اسم الأجزاء المفتوحة أو المفتوحات اختصارا.

أمثلة

1. لقد رأينا في الفصل التمهيدي أن جماعة المجالات المفتوحة في IR تسمح بتشكيل طبولوجيا على IR تسمى **الطبولوجيا الاعتيادية في** IR ، يكون كل مفتوح فيها هو عبارة عن اتحاد مجالات مفتوحة.

2. من أجل كل مجموعة غير خالية E ، تشكل الثنائية $(E,P(E))$ طبولوجيا على E تسمى الطبولوجيا القوية أو الطبولوجيا المتقطعة.

3. من أجل كل مجموعة غير خالية E ، تشكل الثنائية $(E,\{E,\{\ \}\})$ طبولوجيا على E تسمى الطبولوجيا الضعيفة أو الطبولوجيا الخشنة.

4. لتكن $E=\{a,b\}$ ، نتحقق بسهولة أن الجماعتين $\tau_1=\{E,\{\ \},\{a\}\}$ و $\tau_2=\{E,\{\ \},\{b\}\}$ تشكلان طبولوجيا على E

ملاحظة

يتبين من خلال الأمثلة السابقة أنه على نفس المجموعة يمكن تعريف أكثر من طبولوجيا

الأجزاء المغلقة

نعتبر في كل ما يأتي (E,τ) فضاء طبولوجي

تعريف

لتكن $E \supset F$ ، نقول أن F مغلق، إذا كان متممه مفتوح.

أمثلة

1. إذا كان E مزود بالطبولوجيا القوية، فإن كل أجزاء E مغلقة.

2. إذا كان E مزود بالطبولوجيا الضعيفة، فإن الأجزاء الوحيدة المغلقة هي E وϕ.

3. إذا كان $E=IR$ مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، فإن مجموعة الأعداد الطبيعية N ومجموعة الأعداد الصحيحة Z ، أجزاء مغلقة.

ملاحظة

1. E و ϕ جزءان مفتوحان ومغلقان في آن واحد من أجل كل طبولوجيا.

2. قد يحتوي فضاء طبولوجي على أجزاء أخرى مغلقة ومفتوحة تختلف عن E و ϕ (الطبولوجيا القوية مثلا)، وقد يضم أجزاء لا مفتوحة ولا مغلقة (Q بالنسبة للطبولوجيا الاعتيادية في IR مثلا)

باستعمال العلاقات بين المجموعات، نتحقق بسهولة من الخواص التالية

خواص

1. E و ϕ جزءان مغلقان
2. اتّحاد عدد منتهي من أجزاء مغلقة هو جزء مغلق.
3. تقاطع عدد منتهي أو غير منتهي من أجزاء مغلقة هو جزء مغلق.

ملاحظة

الإتّحاد غير المنتهي من مغلقات ليس بالضرورة مغلقا كما يبيّنه المثال التالي

نعتبر IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، $(A_n)_{n\in IN^*}=\left(\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in IN^*}$

لدينا $\bigcup_{n\in IN^*} A_n=[0,1[$ وهو جزء غير مغلق.

الجوارات

تعريف

ليكن A جزء غير خالي من E. نسمي جوار لـ A كل جزء V من E يحوي مفتوحا θ يحوي بدوره A :

$$V \text{ جوار لـ} A \Leftrightarrow \exists\theta\in\tau : A\subset\theta\subset V$$

ونسمي جوار لنقطة x من E، كل جزء V_x من E يحوي مفتوحا θ_x يحوي بدوره x :

$$V_x \text{ جوار لـ } x \Leftrightarrow \exists\theta_x\in\tau : x\in\theta_x\subset V_x$$

خواص

1. لكل عنصر x من E جوار على الأقل.
2. كل جوار لـ x يشمل x

3. كل مجموعة تحوي جوار لـ x هي أيضا جوار لـ x
4. تقاطع جوارين لـ x هي أيضا جوار لـ x
5. كل جوار V لـ x يشمل مجموعة جزئية W يكون V جوارا لكل نقاطها.

<u>البرهان</u>

1. كل x من E يقبل E جوارا له.
2. و 3. تنتج مباشرة عن تعريف جوار x
4. ليكن V_x^1 و V_x^2 جوارين لـ x .

إذن $\exists \theta_x^1 \in \tau : x \in \theta_x^1 \subset V_x^1$ و $\exists \theta_x^2 \in \tau : x \in \theta_x^2 \subset V_x^2$

بالتالي $\exists \theta = \theta_x^1 \cap \theta_x^2 \in \tau : x \in \theta \subset V_x^1 \cap V_x^2$

وهذا يعني أن $V_x^1 \cap V_x^2$ هو جوار لـ x

5. كل جوار V لـ x يحوي بالتعريف مفتوح θ_x، يكون V جوارا لكل نقاطه (أي يكفي أخذ $\theta_x = W$)

<u>تعريف</u> (الجمل الأساسية للجوارات)

ليكن $x \in E$ ، وليكن $V(x)$ جماعة كل جوارات x . نقول عن $B(x)$ جماعة من جوارات x ($B(x) \subset V(x)$) أنها تشكل أساس لجوارات x إذا حققت ما يلي

$$\forall V \in V(x), \exists B \in B(x) : B \subset V$$

أمثلة

1.جماعة كل المفتوحات التي تشمل x بالنسبة لأي طبولوجيا، هي أساس لجوارات x

2.بالنسبة لـ IR مزود بالطبولوجيا الاعتيادية، الجماعة التالية هي أساس لجوارات x

$$B(x)=\left\{\left]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right[,n\in IN^{*}\right\}$$

تعريف

ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي، ولتكن B جماعة جزئية من τ

نقول عن B أنّها أساس للطبولوجيا τ ، إذا أمكنت كتابة كل مفتوح من τ على شكل اتّحاد لعناصر من B

أمثلة

1. $\mathrm{B}=\{]a,b[:a,b\in IR\}$ هو أساس للطبولوجيا الاعتيادية في IR
2. $\mathrm{B}=\{\{x\}:x\in E\}$ هو أساس لكل فضاء E مزود بالطبولوجيا القوية