مقرر مادة: مدخل إلى الطبولوجيا

تمـهـيد

الطبولوجيا الاعتيادية في مجموعة الأعداد الحقيقية IR

الفصل الأول

الفضاءات الطبولوجية: الطبولوجيا، المفتوح، المغلق، الجوار، اللصاقة ، الداخلية، أساس طبولوجيا، الفضاء المفصول والقابل للفصل، الطبولوجيا الأثر، طبولوجيا الجداء

الفصل الثاني

الفضاءات المترية: المسافة، الكرة المفتوحة، الكرة المغلقة، طبولوجيا الفضاء المتري

الفصل الثالث

المتتاليات في فضاء متري، الفضاء المتري التام، التطبيقات المستمرة، نظرية النقطة الصامدة

الفصل الرابع

الفضاء المتراص، الفضاء المترابط

الفصل الخامس

الفضاءات الشعاعية النظيمية

الطبولوجيا الاعتيادية في مجموعة الأعداد الحقيقية IR

تعريف (المفتوح في IR)

نقول عن جزء U من IR أنه مفتوح، إذا كان ***خاليا*** *أو إذا حقق الخاصية التالية*

$$\forall x \in U : \exists \varepsilon \succ 0 / \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\subset U$$

نتيجة

1.كل مجال مفتوح هو جزء مفتوح.

2. IR هو جزء مفتوح.

أمثلة

1. $\left]-1,0\right[\cup \left]1,2\right[$ هو جزء مفتوح.
2. $\{3\}$ ليس مفتوحا، وبصفة عامة كل جزء منته من IR ليس مفتوحا، وهذا لعدم امكانية احتوائه على مجال مفتوح.
3. Q و Q^C ليست أجزاء مفتوحة لاستحالة إيجاد أي مجال مفتوح محتوى فيهما.

ملاحظة

المثال الأول السابق يبين أن عكس النتيجة الأولى السابقة غير صحيح على العموم.

قضية (الخاصية المميزة لمفتوح في IR)

يكون جزء غير خالي من IR مفتوحا إذا وفقط إذا كان مؤلّفا من اتّحاد مجالات مفتوحة.

تعريف (الطبولوجيا الاعتيادية في IR)

نسمي الطبولوجيا الاعتيادية في IR، الجماعة المؤلّفة من كل أجزائه المفتوحة. وبعبارة أخرى، الطبولوجيا الاعتيادية في IR، هي الجماعة الجزئيّة من $P(IR)$ المؤلّفة من المجموعة الخاليّة وكذا جميع اتّحادات المجالات المفتوحة.

من السهل التأكّد من أن عناصر الطبولوجيا الاعتيادية في IR (جماعة الأجزاء المفتوحة في IR) تحقق الخواص التالية

خـواص

1. IR و ϕ أجزاء مفتوحة في IR.

2. الطبولوجيا الاعتيادية في IR مستقرة بواسطة **الاتحاد الكيفي**، أي: من أجل كل جماعة $(A_i)_{i\in I}$ من الأجزاء المفتوحة في IR، فإن $\bigcup_{i\in I} A_i$ هو جزء مفتوح في IR.

3. الطبولوجيا الاعتيادية في IR مستقرة بواسطة **التقاطع المنتهي**، أي: من أجل كل جماعة **منتهية** $(A_i)_{1\le i\le n}$ من الأجزاء المفتوحة في IR، فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو جزء مفتوح في IR.

ملاحظة

تقاطع غير منته من المفتوحات ليس بالضرورة مفتوحا، مثلا من أجل كل $n \in IN^*$ نضع $A_n = \left]-\frac{1}{n}+1, 1+\frac{1}{n}\right[$ (وهي أجزاء مفتوحة في IR) لكن $\bigcap_{n\in IN^*} A_n = \{1\}$ وهو ليس مفتوحا في IR.

تعريف (المغلق في IR)

نقول عن جزء U من IR أنه مغلق، إذا كان متممه U^C مفتوحا في IR .

من السهل أيضا التأكّد من أن الأجزاء المغلقة في IR تحقق الخواص التالية

خـواص

1. IR و ϕ أجزاء مفتوحة في IR .
2. كل اتّحاد منته من مغلقات هو مغلق.
3. كل تقاطع كيفي من مغلقات هو مغلق.