I. عموميات حول الدوال الحقيقية :

1. تعريف الدالة:

نسمي دالة حقيقية لمتغير حقيقي من $E \subseteq \mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كل علاقة f ترفق بكل عنصر x من E عنصرا واحدا على الأكثر y من $\mathbb{R}$

ونكتب: $\begin{array}{l} f: E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ تسمى x سابقة و y صورة x بالدالة f وتسمّى مجموعة السوابق التي لها صور بالدالة f بمجموعة تعريف الدالة f ونرمز لها بـ: D_f ونكتب $D_f = \{x \in E \,/\, f(x) \in \mathbb{R}\}$.

حالات خاصة:

1- في الحالة $E = \mathbb{N}$ الدالة f تعرّف متتالية حقيقية.

2- إذا كانت f دالة من E نحو $\mathbb{R}$ بحيث $D_f = E$ فإنّ f تسمّى تطبيقا.

أمثلة:

1) العلاقة: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث: $x \mapsto y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ هي دالة حقيقية لمتغير حقيقي.

2) لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي، لنعيّن D_f مجموعة تعريف f في كلّ الحالات التالية:

أ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. f معرّفة $\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$ وبالتالي $D_f =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$

ب) $f(x) = \dfrac{1}{E(x)}$. f معرّفة $\Leftrightarrow E(x) \neq 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \notin [0,1[$ وبالتالي $D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

ج) $f(x) = \ln(4 - x^2)$. f معرّفة $\Leftrightarrow 4 - x^2 > 0$ ومنه f معرفة $\Leftrightarrow x \in]-2, +2[$ وبالتالي $D_f =]-2, +2[$

2. منحنى الدالة:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي، نزوّد المستوي بمعلم متعامد ومتجانس.

مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x \in D_f$ و $y = f(x)$ تسمّى منحنى f ونرمز له C_f ونكتب: $C_f = \{M(x,y) \,/\, x \in D_f \wedge y = f(x)\}$

3. شفعية دالة:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرّفة على D_f مجموعة متناظرة بالنسبة للصفر أي $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

f فردية إذا وفقط إذا تحقّق: $\forall x \in D_f \;\; f(-x) = -f(x)$ و f زوجية إذا وفقط إذا تحقّق: $\forall x \in D_f \;\; f(-x) = f(x)$

ملاحظات:

1- منحنى دالة فردية (زوجية) يكون متناظرا بالنسبة لمبدأ المعلم (بالنسبة لحامل لحور التراتيب)

2- إذا رمزنا بـ: $D_f^+ = \{x \in D_f \,/\, x \geq 0\}$ و $D_f^- = \{x \in D_f \,/\, x \leq 0\}$ ولدراسة تغيرات دالة فردية (زوجية) نكتفي بدراستها على D_f^+ (D_f^+) ثمّ نرسم منحناها ونكمل إنشاءه بالتناظر بالنسبة لمبدأ المعلم (بالنسبة لحامل لحور التراتيب)

تطبيق: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة حيث $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. اثبت أنّ: $D_f = \mathbb{R}$ وأنّ f فردية.

4. دورية دالة:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة. نقول أنّ f دالة دورية إذا وجد عددا حقيقيا موجبا تماما T بحيث:

$\forall x \in D_f \;\; f(x+T) = f(x)$ يسمّى أصغر عدد حقيقي موجب تماما T بدور الدالة f.

ملاحظة: إذا كان T دورا لدالة f فإنّ kT هو كذلك دور لـ f.

أمثلة:

1) الدالة $x \mapsto \cos x$ دورية ودورها $T = 2\pi$

2) الدالة $x \mapsto \sin x$ دورية ودورها $T = 2\pi$

3) الدالة $x \mapsto x - E(x)$ ($E(x)$ دالة الجزء العشري) دورية ودورها $T = 1$ (يكفي أن نبرهن $E(x+k) = E(x) + k,\; k \in \mathbb{Z}$)

نتيجة: إذا كانت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دورية ودورها T فإنّ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ الدالة المعرفة بـ: $g(x) = f(ax+b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ دورية ودورها $\dfrac{T}{a}$.

برهان: لدينا $f(x+T) = f(x)$ ونثبت أنّ: $g\left(x + \dfrac{T}{a}\right) = g(x)$.

لدينا $g\left(x + \dfrac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \dfrac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + T) = f(ax+b) = g(x)$

مثال: $g(x)=\tan(5x+3)$، $a=5, b=3$ و $f(x)=\tan x$. $\tan$ دورية ودورها $T=\pi$ إذا $\tan(5x+3)$ دورية ودورها $T=\frac{\pi}{5}$

5. الدوال المحدودة:

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة على $I\subseteq D_f$ و $f(I)$ مجموعة قيم f أي $f(I)=\{f(x)/x\in I\}\subset\mathbb{R}$

تعاريف:

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة من الأعلى أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ f(x)\le M$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة من الأسفل أي إذا تحقق ما يلي:

$$\exists m\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ f(x)\ge m$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا كانت $f(I)$ محدودة أي إذا تحقق: $\exists m,M\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ m\le f(x)\le M$

أو بمعنى آخر f محدودة إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: $\exists M>0,\ \forall x\in I,\ |f(x)|\le M$

ملاحظات:

1) إذا كانت f محدودة فإنّ المجموعة $f(I)$ محدودة في $\mathbb{R}$ وتقبل حدّا أعلى وحدّا أسفلا وفي هذه الحالة نرمز بـ: $\sup\limits_{x\in I} f(x)=\sup f(I)$ و $\inf\limits_{x\in I} f(x)=\inf f(I)$. القيمتان $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ تسمّيان على التوالي الحدّ الأعلى والحدّ الأسفل للدالة f ونرمز لهما بـ: $\sup f$ و $\inf f$ ولدينا

$$M=\sup f\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in I,\ f(x)\le M\\ \exists\varepsilon>0,\exists x_0\in I,\ f(x_0)>M-\varepsilon\end{cases}\quad\text{و}\quad m=\inf f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in I,\ f(x)\ge m\\ \exists\varepsilon>0,\exists x_1\in I,\ f(x_1)<m+\varepsilon\end{cases}$$

2) الحدّان $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ لا ينتميان بالضرورة إلى $f(I)$. في حالة $\sup f(x)$ و $\inf f(x)$ ينتميان إلى $f(I)$ نقول أنّ الدالة f تصيب حدّيها على I وهذا يعني: f تصيب حدّيها على I

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists x_0\in I,\ \sup\limits_{x\in I} f(x)=f(x_0)\\ \exists x_1\in I,\ \inf\limits_{x\in I} f(x)=f(x_1)\end{cases}$$

أمثلة:

2) الدالة $g:x\mapsto\ln x$ غير محدودة على D_g لأنه لدينا $D_g=]0,+\infty[$ و $g(D_g)=]-\infty,+\infty[$ غير محدودة.

3) الدالة $x\mapsto x-E(x)$ محدودة على $\mathbb{R}$ لأنـه لدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1<E(x)\le x$ ومنه $-x\le -E(x)<1-x$

إذا $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\le x-E(x)<1$

3) الدالة $f:I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\mapsto\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\cos x$. الدالة f محدودة لأنّ $f\left(I\right)=\left[-1,1\right]$ محدودة

ولدينا $\sup f(x)=\sup f(I)=1$ و $\inf f(x)=\inf(I)=-1$ ونستنتج أنّ الدالة f تصيب حدّيها على I لأنّه يوجد

$$\exists x_0=0\in I,\ f(x_0)=f(0)=\cos 0=1=\sup f\quad\text{و}\quad\exists x_1=\pi\in I,\ f(x_1)=f(\pi)=\cos\pi=-1=\inf f$$

6. اتجاه تغير دالة:

تعاريف: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة عددية معرّفة على $D_f\subset\mathbb{R}$.

1) نقول أن f متزايدة (متزايدة تماما) على المجال $I\subset D_f$ إذا كان:

$$\forall x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)\ \ (f(x_1)<f(x_2))$$

2) نقول أن f متناقصة (متناقصة تماما) على المجال $I\subset D_f$ إذا كان:

$$\forall x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\ \ (f(x_1)>f(x_2))$$

3) نقول أن f رتيبة على $I\subset D_f$ إذا كانت متزايدة على كل المجال I أو متناقصة على كل I.

ملاحظة:

نقول أن f رتيبة (رتيبة تماما) على $I\subset D_f$ إذا كانت متزايدة (متزايدة تماما) على كلّ المجال I أو متناقصة (متناقصة تماما) على كلّ I.

نتيجة: لدراسة اتجاه تغير دالة f على $I \subset D_f$ يكفي أن ندرس إشارة $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ من أجل x_1 و x_2 من I حيث $x_1 \neq x_2$

1) إذا كانت $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\ (>0)$ فإنّ f متزايدة (متزايدة تماما) على I

2) إذا كانت $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\ (<0)$ فإنّ f متناقصة (متناقصة تماما) على I

مثال:

الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=x^2-4x+3$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 2[$ لأن: $(f(x)=(x-2)^2-1)$ و لدينا

$$\forall x_1 < x_2 < 2,\ x_1-2 < x_2-2 < 0 \Rightarrow (x_1-2)^2 > (x_2-2)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$ لأنّه من أجل x_1 و x_2 من $]2,+\infty[$ حيث $x_1 \neq x_2$ لدينا

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-2)^2-1-((x_2-2)^2-1)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-2)^2-(x_2-2)^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)}{x_1-x_2}\underset{x_1+x_2<4}{\overset{x_1\neq x_2}{=}} x_1+x_2-4<0$$

II- النهايات :

1. جوار عدد حقيقي x_0 أو $\pm\infty$: نسميّ جوارا للعدد الحقيقي x_0 كلّ مجال مفتوح من الشكل $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ حيث $\delta > 0$

ونسمّي جوارا لـ $+\infty$ $(-\infty)$ كلّ مجال من الشكل $]a,+\infty[$ $(]-\infty,b[)$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$

2. الدالة المعرّفة في جوار عدد حقيقي x_0: لتكن $f: I\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و x_0 عددا حقيقيا. نقول أنّ f معرّفة على جوار x_0

إذا تحقق: $\exists \delta > 0,\quad]x_0-\delta,\ x_0+\delta[\ \subseteq I$

3. نهاية دالة عند عدد حقيقي: لتكن $f: I\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة على جوار العدد x_0 باستثناء محتمل عند x_0

تعريف1: ليكن l عددا حقيقيا. نقول أنّ f تقبل نهاية منتهية l عند x_0 إذا تحقّق الشرط: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:(|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$

ونقول كذلك أنّ $f(x)$ يؤول إلى l عندما x يؤول إلى x_0 ونرمز إذا: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{x_0} f=l$

ملاحظة: إثبات أنّ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و x_0.

مثال: لإثبات أنّ: $\lim\limits_{x\to 2} 3x-5=1$ باستخدام التعريف يكفي أن نثبت أنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:(|x-2|<\alpha \Rightarrow |3x-6|<\varepsilon)$

$|3x-6|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. إذا يكفي اختيار $\alpha\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$ للحصول على العلاقة:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha\leq\frac{\varepsilon}{3}:\quad |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}\ \Rightarrow\ |3x-6|<\varepsilon$$

نظرية:(وحدانية النهاية). إذا قبلت الدالة f نهاية عند a فهي وحيدة.

برهان: نبرهن بطريقة مشابهة لإثبات وحدانية النهاية عند المتتاليات.

نظرية:(النهايات والمتتاليات). تكون للدالة f نهاية l عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (s_n) من I متقاربة نحو x_0 يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=l$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \forall s_n\in I:[(\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=x_0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=l]$

نتيجة: لإثبات أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ غير موجودة يكفي إيجاد متتاليتين (s_n) و (t_n) لهما نفس النهاية x_0 بينما نهايتي $f(s_n)$ و $f(t_n)$ مختلفتان.

مثال: لنثبت أنّ نهاية الدالة f المعرّفة كما يلي: $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ غير موجودة عند $x_0=0$.

لتكن المتتاليتان: $s_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ و $t_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ نهايتها تؤولان إلى 0 بينما $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n\pi)=1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n+1)\pi=-1$ وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)$ فإنّ الدالة f لا تقبل نهاية عند 0.

تعريف2: ♦ نقول أنّ f تؤول إلى $+\infty$ عند ما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق الشرط: $\forall A>0,\ \exists\alpha>0:|x-x_0|<\alpha\Rightarrow f(x)>A$

ونرمز بـ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

♦ نقول أنّ f تؤول إلى $-\infty$ عند ما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق الشرط: $\forall A < 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$

ونرمز بـ: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

4. نهاية دالة عند عدد حقيقي من اليمين واليسار:

تعاريف:

♦ نقول أنّ f تقبل نهاية l عند x_0 من اليمين ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : [0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$$

♦ نقول أنّ f تقبل نهاية l عند x_0 من اليسار ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : [0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$$

ملاحظة: إذا كانت f تقبل نهاية l عند عدد x_0 فإنّ النهايتين على اليمين واليسار موجودتين أيضا و يكون لدينا

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$$

نتائج:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

2) إذا كانت $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ فإنّ f تقبل نهاية العدد x_0

أمثلة:

1) لتكن f الدالة المعرّفة على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 1}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{-x}{x} = -1$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{|x|}{x}$ وبالتالي الدالة $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ لا تقبل نهاية عند 0

5. نهاية دالة عند لانهاية:
لتكن f دالة معرّفة على أحد المجالين $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, b[$ حيث $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

تعاريف:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : [x > \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l\ (l \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : [x < -\alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 : [x > \alpha \Rightarrow f(x) > A]$

بطريقة مشابهة للتعريف (3) نعرّف النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

6. العمليات على النهايات:
كل حالات العمليات على النهايات المذكورة في موضوع المتتاليات تبقى صالحة بالنسبة للدوال لكن في حساب النهايات هناك حالات لا تمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بطرق مناسبة كالحالات الموالية المسمّاة حالات عدن التعيين ($0 \times \infty$ ، $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $\dfrac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $1^{+\infty}$ و 0^0) .

أمثلة:

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 3x^2\right)$. عندما نكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = -\infty + \infty$ لكن نستطيع رفع عدم التعيين كما يلي:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + 3x^2\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \ .$$

2) حساب $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x}{x-1}$. عندما نكتب $\frac{\lim_{x\to 0}4x^2+x}{\lim_{x\to 0}x-1}=\frac{0}{0}$ ، نستطيع رفع عدم التعيين كما يلي:

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}(4x^2+x)}{\lim_{x\to+\infty}(x-1)}=\frac{\lim_{x\to+\infty}x^2(4+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to+\infty}x(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}4x^2=+\infty\ .$$

3) حساب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}$ لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ -\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ وبما أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ حسب نظرية الحصر يكون: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$

7. مقارنة الدوال في جوار $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$:

تعاريف: لتكن f و g دالتين معرّفتين على V جوار x_0 باستثناء محتمل عند x_0

1) نقول أنّ f مهملة أمام g عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)$ إذا وجدت دالة $\mathcal{E}$ بحيث:

$$\forall x\in V,\ f(x)=\mathcal{E}(x)g(x) \text{ و } \lim_{x\to x_0}\mathcal{E}(x)=0$$

2) نقول أنّ g مسيطرة على f عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{=}\mathbf{O}(g)$ إذا وجدت دالة k بحيث:

$\forall x\in V,\ f(x)=k(x)g(x)$ والدالة k محدودة على V

الرمزين $\circ$ و $\mathbf{O}$ يسمّيا رمزي لاندو.

ملاحظات:

إذا كانت g لا تنعدم في V جوار x_0 فإنّ:

أ) $f\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ب) $f\underset{x\to x_0}{=}\mathbf{O}(g)\Leftrightarrow$ $\frac{f}{g}$ محدودة على V

أمثلة: 1) $x^3\underset{x\to 0}{=}\circ(x^2)$ 2) $(|\ln x|)^{\alpha}\underset{x\to+\infty}{=}\circ(x^{\alpha})\ (\alpha>0)$ 3) $2x^2\underset{x\to+\infty}{=}\mathbf{O}(x^2)$ 4) $(\ln|x|)^{\alpha}\underset{x\to 0}{=}\circ(x^{-\alpha})\ (\alpha>0)$

7. الدوال المتكافئة:

تعريف: لتكن f و g دالتين معرّفتين على V جوار x_0 حيث $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

نقول أنّ f تكافئ g عندما يؤول x إلى x_0 (أو عند x_0) ونكتب $f\underset{x\to x_0}{\sim}(g)$ إذا تحقّق ما يلي: $f-g\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)$

ملاحظة: نلاحظ أنّ $f-g\underset{x\to x_0}{=}\circ(g)\Leftrightarrow f-g\underset{x\to x_0}{=}\circ(f)$

خواص:

1) العلاقة $(\sim)$ علاقة تكافؤ في مجموعة الدّوال المعرّفة في جوار x_0

2) إذا كانت f و g لا تنعدمان في V جوار x_0 فإنّ: $f\underset{x\to x_0}{\sim}g\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

3) $(f\underset{x\to x_0}{\sim}g)\wedge(\lim_{x\to x_0}f(x)=l)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}g(x)=l$

4) $\lim_{x\to x_0}f(x)=l\neq 0\Rightarrow f\underset{x\to x_0}{\sim}l$

5) إذا كانت f تقبل الاشتقاق على V جوار عدد x_0 فإنّ: $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

العمليات على الدوال المتكافئة:

أ) إذا كانت f ، g ، h و k دوالا معرفة في جوار x_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ حيث: $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$ و $h(x)\underset{x\to x_0}{\sim}k(x)$ فإنّ:

1) $f(x)h(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)k(x)$

2) إذا كانت h و k لا تنعدمان في جوار x_0 فإنّ: $\frac{f(x)}{h(x)}\underset{x\to x_0}{\sim}\frac{g(x)}{k(x)}$

3) إذا كانت f و g موجبتين تماما في جوار x_0 فإنّ: $(\alpha \in \mathbb{R})$ $(f(x))^{\alpha} \underset{x \to x_0}{\sim} (g(x))^{\alpha}$

ب) إذا كانت u دالة معرّفة في جوار x_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ وكانت f و g دالتين معرّفتين في جوار y_0 من $\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ:

$$(\lim_{x \to x_0} u(x) = y_0) \wedge (f(x) \underset{x \to y_0}{\sim} g(x)) \Rightarrow f(u(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(u(x))$$

بعض الدوال المتكافئة المألوفة:

1) $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

2) $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$

3) $\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$

4) $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

5) $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

6) $(1+x)^{\alpha} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \ (\alpha \in \mathbb{R})$

نتيجة: إذا كانت $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ فإنّ:

1) $\ln(1+f(x)) \underset{x \to 0}{\sim} f(x)$

2) $\sin f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f(x)$

3) $\tan f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f(x)$

4) $e^{f(x)} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} f(x)$

5) $\cos f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{f(x)^2}{2}$

6) $(1+f(x))^{\alpha} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha f(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$

أمثلة:

1) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ لنعيّن الدالة المكافئة لـ: f في جوار 0. لدينا $f(x) = \ln(1+\sin x) \underset{x \to 0}{\sim} \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$

2) $g(x) = \ln(1+\cos x)$ لنعيّن الدالة المكافئة لـ: g في جوار 0. نلاحظ أنّ $g(x)$ لا تكافئ $\cos x$ لأنّ $\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \neq 0$

لدينا $g(x) = \ln(1+\cos x) \underset{x \to 0}{\sim} \ln\left(2 - \dfrac{x^2}{2}\right) = \ln\left(2\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \ln 2 - \dfrac{x^2}{4}$

III- الاستمرارية:

1. الاستمرار عند عدد حقيقي: $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرّفة في جوار عدد x_0 من I.

تعاريف:

◆ نقول أنّ f مستمرة عند x_0 إذا تحقق الشرطان:

1) النهاية $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

أو بمعنى آخر إذا تحقق ما يلي: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in I (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

- إثبات أن f مستمرة عند x_0 باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و x_0.

◆ نقول أنّ f مستمرة على اليمين عند x_0 ونكتب: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \ \ (x_0 \le x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

◆ نقول أنّ f مستمرة على اليسار عند x_0 ونكتب: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in I (x_0 - \alpha < x \le x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

نتيجة: تكون الدالة f مستمرة عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليمين ومن اليسار عند x_0 ونكتب:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

◆ نقول أنّ f مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة عند كل عدد من I.

أمثلة: 1) لتكن الدالة: $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{x}$

الدالة f مستمرة عند كل عدد $x_0 > 0$. لأنّ: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \forall x > 0\ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

لدينا: $|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \dfrac{\alpha}{\sqrt{x_0}}$ يكفي أن نأخذ $\alpha < \sqrt{a}\varepsilon$ حتى يتحقق الاستلزام.

2) في المثال السابق الدالة f مستمرة من اليمين عند 0 لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} \sqrt{x} = 0 = f(0)$

3) الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (-x) = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = 0$

4) كل من الدالة الثابتة، دوال كثيرات الحدود، الدالة sin والدالة cos مستمرة على $\mathbb{R}$.

5) الدوال الناطقة والدوال الصمّاء مستمرة على مجموعة تعريفها.

نظرية: (الاستمرار والمتتاليات). تكون الدالة f مستمرة عند العدد x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل متتالية (s_n) من I متقاربة نحو x_0 يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n) = f(x_0)$. ونكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall s_n \in I : [(\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n) = f(x_0)]$

3. **التمديد بالاستمرار:** ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$، x_0 عددا حقيقيا و $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ دالة

تعريف: نقول أنّ الدالة f تقبل تمديدا بالاستمرار إلى دالة $\overline{f}$ عند العدد x_0 إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ونكتب:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I - \{x_0\} \\ l & , x = x_0 \end{cases}$$

الدالة $\overline{f}$ تسمى التمديد بالاستمرار للدالة f عند x_0.

أمثلة:1) الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

ويكون: $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث: $\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

2) الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ لا تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ غير موجودة

4. **عمليات على الدوال المستمرّة:**

إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين مستمرتين عند عدد حقيقي x_0 وكان α و β عددين حقيقيين ثابتين فإنّ:

1) الدالة $|f|$ مستمرة عند x_0.

2) الدالة $\alpha f + \beta g$ مستمرة عند x_0.

3) الدالة fg مستمرة عند x_0.

4) إذا كان $g(x_0) \ne 0$. الدالة $\dfrac{f}{g}$ مستمرة عند العدد x_0.

5) الدالتان $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ مستمرتان عند x_0. لأنّ: $\max(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ و $\min(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$

6) إذا كانت f دالة مستمرة عند عدد x_0 و g دالة مستمرة عند $f(x_0)$ فإنّ الدالة $g \circ f$ مستمرة عند x_0

مثال: الدالة $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $u(x) = \sin|x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنّ: u هي دالة مركبة بالشكل: $u = g \circ f$ حيث:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = |x|$ و $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ حيث $g(x) = \sin x$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}_+$

5. **الاستمرار المنتظم:** لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

تعريف: نقول أن f مستمرة بانتظام على المجال I إذا تحقق الشرط: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \forall (x,y) \in I^2 (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

ملاحظات:

1- الاستمرار بانتظام مفهوم خاص بالمجال I بأكمله بينما الاستمرار عند عدد مفهوم محلي أي في جوار هذا العدد.

2- **لإثبات** أن f مستمرة بانتظام على المجال I باستخدام التعريف نثبت ايجاد α بدلالة ε فقط.

3- كل دالة f مستمرة بانتظام على مجال I هي مستمرة على هذا المجال والعكس غير صحيح.

أمثلة:

1) لتكن الدالة: $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x)=x^2$

الدالة f مستمرة بانتظام على المجال $[0,1]$. لأنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha(\varepsilon)>0:\forall x,y\in I,\ |x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

لدينا: $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|x-y||x+y|\le|x-y|(|x|+|y|)\le2|x-y|$ يكفي أن نأخذ $\alpha<\dfrac{\varepsilon}{2}$ حتى يتحقق الاستلزام.

2) لتكن الدالة: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $f(x)=x^2$. f مستمرة على $\mathbb{R}$ لكن f غير مستمرة بانتظام على $\mathbb{R}$ لأنّ:

$$\exists\varepsilon>0,\forall\alpha>0,\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2[(|x-y|<\alpha)\wedge|x^2-y^2|\ge\varepsilon]$$

نأخذ $\varepsilon=1$. من أجل كل $\alpha>0$، يوجد عددان حقيقيان x و y حيث: $x=\dfrac{1}{\alpha}$ و $y=x+\dfrac{\alpha}{2}$

لدينا $|x-y|=|\dfrac{-\alpha}{2}|=\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$ و $|x^2-y^2|=\dfrac{\alpha}{2}|x+y|=\dfrac{\alpha}{2}(\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{2})=1+\dfrac{\alpha^2}{4}\ge1$

6. نظريات أساسية حول الدوال المستمرة:

أ. **نظرية هاين Heine:** كلّ دالة $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرة على مجال متراص (مغلق ومحدود) $I=[a,b]$ هي دالة مستمرة بانتظام على هذا المجال.

البرهان (بالخلف)

نفرض أن f مستمرة وغير مستمرة بانتظام $[a,b]$. عندئذ يبيّن نفي انتظام الاستمرار وجود $\varepsilon>0$ ومتتاليتين x_n و y_n بحيث $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ |x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}\ \wedge\ |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon.$ يتضح من العلاقة $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ |x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$ أن المتتاليتين x_n و y_n محدودتان. وبالتالي نستطيع تطبيق نظرية بولزانو- فايرستراش (كل متتالية حقيقية محدودة تقبل متتالية جزئية متقاربة) على x_n واستخراج متتالية جزئية x_{n_i} متقاربة نحو عدد l. ولما كان $\forall i\in\mathbb{N}^*:\ |x_{n_i}-y_{n_i}|<\dfrac{1}{n_i}$ فإن $\lim\limits_{i\longrightarrow+\infty}(x_{n_i}-y_{n_i})=0$. وهكذا نستنتج أن y_{n_i} متقاربة أيضا ونهايتها تساوي l.

وبالرجوع إلى العلاقة $\forall i\in\mathbb{N}^*:\ |f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|\ge\varepsilon$

وجعل i يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة $|f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|\ge\varepsilon$ نصل بفضل استمرار f إلى التناقض: $0<\varepsilon\le|f(l)-f(l)|=0$.

مثال: الدالة: $f:x\mapsto\sin x$ مستمرة على المجال $[0,\pi]$ وبالتالي مستمرة بانتظام على $[0,\pi]$.

ملاحظة: إنّ شرط المغلق والمحدود ضروري لصحّة نظرية هاين.

أمثلة:

1) الدالة: $f:x\mapsto x^2$ مستمرة على المجال $[0,+\infty[$ لكنّها غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

2) الدالة: $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0,1]$ لكنّها غير مستمرة بانتظام على هذا المجال.

ب. **نظرية فايرستراش Weierstrass :**

كل دالة f مستمرة على متراص $[a,b]$ هي دالة محدودة وتدرك حديها الأعلى والأدنى. أي $f([a,b])$ محدودة والدالة تدرك حديها الأعلى والأدنى أي أنه يوجد عددان x_1 و x_2 من $[a,b]$ بحيث $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ و $f(x_2)=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$

مثال: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، $D_f=[-1,1]$ لدينا $\forall x\in[-1,1],\ 0\le f(x)\le1$ و $f(0)=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)=1$ ، $f(-1)=f(1)=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=0$

ملاحظة: إذا كان المجال غير متراص فإنّ النظرية غير صالحة، أي الدالة لا تدرك حديها الأعلى والأسفل.

مثال: لتكن f دالة معرّفة على المجال $]0,1[$ بـ: $f(x)=x$ لدينا $\sup f(x)=1$ و $\inf f(x)=0$ لكن لا يوجد $x\in]0,1[$ بحيث: $f(x)=1$

ج. **نظرية القيمة المتوسطة:**

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة على مجال كيفي I. ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـ f حيث $x_1<x_2$.

من أجل كل عدد c محصورا بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد على الأقل عددا x_0 من المجال $]x_1,x_2[$ يحقق $f(x_0)=c$.

مثال: لتكن f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x^2-x$ لنثبت أنّ المعادلة $f(x)=5$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]-1,2[$

لدينا $f(-1)=-1+1+1=1$ و $f(2)=8+4-2=10$ وبما أنّ $5\in]1,10[$ فإنّ: $\exists x_0\in]-1,2[:f(x)=5$

نتيجة: نستنتج من هذه النظرية أنّ صورة كل مجال بدالة مستمرة هي أيضا مجال.

ملاحظة: إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال I فإنّ العدد x_0 وحيد.

حالات خاصة:

1) **حل المعادلة $f(x)=0$:** لتكن f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$. إذا كان $f(a).f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

مثال: كل كثير حدود درجته فردية يملك على الأقل جذرا حقيقيا

ليكن $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ كثير حدود حيث n عدد فردي. لنفرض أنّ: $a_n>0$ وبالتالي:

$\lim\limits_{-\infty}P(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{+\infty}P(x)=+\infty$ وبصفة خاصة يوجد عددان حقيقيان a و b حيث: $f(a)>0$ و $f(b)<0$ ونستنتج حسب النظرية السابقة.

2) **نظرية النقطة الصامدة:** إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ دالة مستمرة فإنه يوجد على الأقل c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=c$.

أمثلة: 1) للدالة $f:[0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow[0,\frac{\pi}{2}]$ حيث: $f(x)=\sin x$ نقطة صامدة $f(c)=c$ في المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$.

2) للدالة $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ حيث: $f(x)=x^2$ نقطتان صامدتان في المجال $[0,1]$ وهما 0 و 1.

7. **عكس الدوال المستمرة والرتيبة:**

تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$. إذا كانت f تقابلا من D نحو $f(D)$ فإنّ التقابل العكسي يسمّى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها بالرمز f^{-1} ولدينا $(y=f(x),x\in D)\Leftrightarrow(x=f^{-1}(y),y\in f(D))$

خواص:

1) $f^{-1}\circ f$ هي الدالة المطابقة المعرفة من D نحو D أي: $\forall x\in D,f^{-1}[f(x)]=x$

2) $f\circ f^{-1}$ هي الدالة المطابقة المعرفة من $f(D)$ نحو $f(D)$ أي: $\forall y\in f(D),f[f^{-1}(y)]=y$

3) في معلم متعامد ومتجانس منحنيا الدالتين f و f^{-1} متناظران بالنسبة للمنصف الأول.

نظرية: كل دالة حقيقية f مستمرة ورتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ تقبل دالة عكسية f^{-1} وللدّالتين f و f^{-1} نفس اتجاه التغير.

أمثلة:

1) الدالة $f(x)=\ln(x)$ مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ وبالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}(x)=\exp(x)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\exp[\ln(x)]=x$ و $\forall y\in\mathbb{R},\ln[\exp(y)]=y$

2) الدالة f المعرفة على بـ: $f(x)=(x-1)^2$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,+\infty[$ وبالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1} مستمرة متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ولدينا $(y=(x-1)^2,x\in[1,+\infty[\Leftrightarrow(x=\sqrt{y}+1,y\in[0,+\infty[)$ ونكتب: $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$

8. **المتتاليات التراجعية والدوال المستمرة:**

تعريف: نسمي متتالية تراجعية كل متتالية حقيقية (u_n) يعطى حدّها من الرتبة n بدلالة حدّ (أو عدة حدود) من رتبة أصغر من n.

ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات الحقيقية عندما يكون الحدّ من الرتبة $n+1$ معطى بدلالة الحدّ من الرتبة n على النحو التالي:

ننطلق من $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة مستمّرة ونعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـ:

$$u_0\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=f(u_n),.$$

ملاحظة: افترضنا مجموعة وصول f هي $[a,b]$ حتى تكون للعلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ معنى.

1- **حالة f متزايدة:**

نظرية: إذا كانت f مستمّرة ومتزايدة من أجل $u_0\in[a,b]$ فإنّ المتتالية (u_n) رتيبة ومتقاربة نحو عدد l وتحقّق $f(l)=l$

برهان: أولا: نفترض أنّ $u_1=f(u_0)\geq u_0$ بما أنّ f متزايدة فإنّ $u_2=f(u_1)\geq f(u_0)=u_1$ كذلك بما أنّ f متزايدة فإنّ: $u_3=f(u_2)\geq f(u_1)=u_2$ وهكذا .... نثبت أنّ $u_{n+1}\geq u_n$ وتكون (u_n) متزايدة

ثانيا: نفترض أنّ $u_1 = f(u_0) \le u_0$ بما أنّ f متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{n+1} \le u_n$ وتكون (u_n) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_n) رتيبة.

من جهة أخرى وبما أنّ $f:[a,b] \to [a,b]$ فإنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ a \le u_n \le b$ وبالتالي (u_n) محدودة.

أخيرا بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة ومحدودة إذا متقاربة نحو عدد l أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ولدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$

وبما أنّ f مستمرّة فإنّ $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$

<u>مثال</u>: لندرس طبيعة المتتالية (u_n) المعرّفة بالشكل التالي: $u_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

حيث: $f:[0,3] \to [0,3],\quad x \mapsto 1+\sqrt{x}$. الدالة f متزايدة إذا $f([0,3]) = [0, 2.7] \subset [0,3]$ إذا f محدودة

لدينا $u_1 = 1+\sqrt{2} \simeq 2.4 \ge u_0 = 2$ وبما أنّ f متزايدة فإنّ (u_n) متزايدة وبالتالي (u_n) متقاربة نحو عدد l وتحقّق: $l = 1+\sqrt{l}$

لدينا $1+\sqrt{l} = l \Leftrightarrow \sqrt{l} = l-1 \Leftrightarrow l = (l-1)^2\,(l \ge 1) \Leftrightarrow l^2 - 3l + 1 = 0 \Leftrightarrow l = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee l = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

بما أنّ $l \ge 1$ فإنّ : $l = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2- <u>حالة f متناقصة</u>:

نظرية:

إذا كانت $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة مستمّرة ومتناقصة وكانت (u_n) متتالية تراجعية معرّفة بـ: $u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 \in [a,b]$ فإنّ:

1) المتتالية (u_{2n}) رتيبة ومتقاربة نحو عدد l وتحقّق $f \circ f(l) = l$

2) المتتالية (u_{2n+1}) رتيبة ومتقاربة نحو عدد l' وتحقّق $f \circ f(l) = l'$

ملاحظة: لإثبات أنّ (u_{2n}) رتيبة (متزايدة أو متناقصة) يكفي المقارنة بين u_0 و u_2 و لإثبات أنّ (u_{2n+1}) رتيبة (متزايدة أو متناقصة) يكفي المقارنة بين u_1 و u_3

برهان: نعلم أنّ مركّب دالتين مستمرتين ومتناقصتين هو دالة مستمّرة ومتزايدة.

أ) من أجل $u_0 \in [a,b]$ لدينا $u_1 = f(u_0)$ و $u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0)$

أولا: نفترض أنّ: $u_2 \ge u_0$ بما أنّ $f \circ f$ متزايدة فإنّ $u_4 = f \circ f(u_2) \ge f \circ f(u_0) = u_2$ كذلك بما أنّ $f \circ f$ متزايدة فإنّ: $u_6 = f \circ f(u_4) \ge f \circ f(u_2) = u_4$ وهكذا .... نثبت أنّ $u_{2n+2} \ge u_{2n}$ وتكون (u_{2n}) متزايدة.

ثانيا: نفترض أنّ: $u_2 \le u_0$ بما أنّ $f \circ f$ متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{2n+2} \le u_{2n}$ وتكون (u_{2n}) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_n) رتيبة.

ب) من أجل $u_0 \in [a,b]$ لدينا $u_1 = f(u_0) \in [a,b]$ و $u_3 = f(u_2) = f \circ f(u_1)$

أولا: نفترض أنّ: $u_3 \ge u_1$ بما أنّ $f \circ f$ متزايدة فإن: $u_5 = f \circ f(u_3) \ge f \circ f(u_1) = u_3$ كذلك بما أنّ $f \circ f$ متزايدة فإنّ: $u_7 = f \circ f(u_5) \ge f \circ f(u_3) = u_5$ وهكذا .... نثبت أنّ $u_{2n+3} \ge u_{2n+1}$ وتكون (u_{2n+1}) متزايدة.

ثانيا: نفترض أنّ: $u_3 \le u_1$ بما أنّ $f \circ f$ متزايدة بنفس الطريقة السابقة نثبت أنّ $u_{2n+2} \le u_{2n}$ وتكون (u_{2n+1}) متناقصة.

ومنه من الحالتين نستنتج أنّ (u_{2n+1}) رتيبة.

من جهة أخرى وبما أنّ $f:[a,b] \to [a,b]$ فإنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ a \le u_n \le b$ وكون (u_{2n}) و (u_{2n+1}) جزئيتين من (u_n) فإنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ a \le u_{2n} \le b$ و $\forall n \in \mathbb{N},\ a \le u_{2n+1} \le b$

أخيرا بما أنّ (u_{2n}) رتيبة ومحدودة إذا فهي متقاربة نحو عدد l أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ ولدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} f \circ f(u_n) = l$

وبما أنّ $f \circ f$ مستمّرة فإنّ: $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}) = f \circ f(l)$

بما أنّ (u_{2n+1}) رتيبة ومحدودة إذا فهي متقاربة نحو عدد l' أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l'$ ولدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} f \circ f(u_{2n+1}) = l'$

وبما أنّ $f \circ f$ مستمّرة فإنّ: $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}) = f \circ f(l')$

تمرين:

لتكن $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

1. برهن أنّ f متناقصة تماما (دون حساب المشتق).
2. تحقق أنّ الدالة $f\circ f$ متزايدة تماما ثمّ احسب حلّ المعادلة: $(f \circ f)(x) = x$.
3. لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة بـــ: $u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

اثبت أنّ: $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le u_n \le 3$.

4. لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرّفتين كما يلي: $v_n = u_{2n}\ ,\ w_n = u_{2n+1}$.

أ. احسب u_1, u_2, u_3، ثمّ ادرس رتابة كلّ من (v_n) و (w_n).

ب. استنتج أنّ المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان.

ج. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

الحلّ:

لتكن $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي: $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

1. البرهان على أنّ f متناقصة تماما (دون حساب المشتق): لنبرهن أنّ: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^{*2} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ليكن $0 < x_1 < x_2$ ومنه $1 + \dfrac{1}{x_1} > 1 + \dfrac{1}{x_2}$ وبالتالي $f(x_1) > f(x_2)$.

2. التحقق أنّ الدالة $f\circ f$ متزايدة تماما ثمّ حساب حلّ المعادلة: $(f \circ f)(x) = x$:

لنتحقق أنّ: $f\circ f$ متزايدة تماما أي: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^{*2} : x_1 < x_2 \Rightarrow f \circ f(x_1) < f \circ f(x_2)$

ليكن $0 < x_1 < x_2$ بما أنّ f متناقصة تماما فإنّ $f(x_1) > f(x_2)$ كذلك بما أنّ f متناقصة تماما فإنّ $f[f(x_1)] < f[f(x_2)]$

حلّ المعادلة: $(f \circ f)(x) = x$: $(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f[f(x)] = x \Leftrightarrow 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \Leftrightarrow 1 + \dfrac{2x}{x+2} = x$

ومنه يكون: $1 + \dfrac{2x}{x+2} = x \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow 3x + 2 = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1) \vee (x = 2)$

وبما أنّ $x > 0$ فإنّ حلّ المعادلة: $(f \circ f)(x) = x$ هو $x = 2$

3. لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة بـــ: $u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

إثبات أنّ: $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le u_n \le 3$: لنبرهن بالتراجع لدينا $u_0 = 1,\ 1 \le u_0 \le 3$ ، نفرض أنّ $1 \le u_n \le 3$ ونثبت أن: $1 \le u_{n+1} \le 3$

$1 \le u_n \le 3 \Rightarrow \dfrac{2}{3} \le \dfrac{2}{u_n} \le 2 \Rightarrow 1 \le 1 + \dfrac{2}{3} \le 1 + \dfrac{2}{u_n} \le 1 + 2 \le 3 \Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 3$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le u_n \le 3$

4. لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرّفتين كما يلي: $v_n = u_{2n}\ ,\ w_n = u_{2n+1}$.

أ. حساب u_1, u_2, u_3، ثمّ دارسة رتابة كل من (v_n) و (w_n):

$u_1 = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$ ، $u_2 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ و $u_3 = 1 + \dfrac{2}{\frac{5}{3}} = 1 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{11}{5}$

لدينا من السؤال 3) $u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = f(u_n)$ ومنه يكون: $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f[f(u_{2n})] = f \circ f(v_n)$

كذلك $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f[f(u_{2n+1})] = f \circ f(w_n)$ ولدينا $f\circ f$ متزايدة تماما و بما أنّ: $v_1 = f \circ f(v_0) = u_2 = \dfrac{5}{6} < 1 = u_0 = v_0$ و

$w_1 = f \circ f(w_0) = u_3 = \dfrac{11}{5} > 2 = u_1 = w_0$ فإنّ (v_n) متزايدة تماما و (w_n) متناقصة تماما.

ب. استنتاج أنّ المتتاليتين (v_n) و (w_n) متجاورتان:

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le u_n \le 3$ وبما أنّ $v_n = u_{2n}\ ,\ w_n = u_{2n+1}$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le v_n \le 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \le w_n \le 3$

وبالتالي (v_n) و (w_n) محدودتان وبما أنهما رتيبتان تماما فهما متقاربتان.

إثبات أنّ $\lim_{x\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$

نفرض أنّ: $\lim_{x\to+\infty} v_n = l$ وبالتالي: $\lim_{x\to+\infty} v_{n+1} = l$ ونفرض كذلك $\lim_{x\to+\infty} w_n = l'$ و بالتالي: $\lim_{x\to+\infty} w_{n+1} = l'$

لدينا $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ و $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$ و بما أنّ الدالة $f \circ f$ مستمرة فإنّ $l = f \circ f(l)$ و $l' = f \circ f(l')$

ونعلم أنّ حل المعادلة $(f \circ f)(x) = x$ هو $x = 2$ ومنه يكون $l = l' = 2$ إذا $\lim_{x\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$

وبالتالي أثبتنا أنّ (v_n) و (w_n) متجاورتان.

ج. استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أنّ (v_n) و (w_n) مستخرجتان من (u_n) ولدينا $\lim_{x\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty} u_{2n} = \lim_{x\to+\infty} w_n = \lim_{x\to+\infty} u_{2n+1} = 2$ فإنّ (u_n) متقاربة و $\lim_{x\to+\infty} u_n = 2$

قسم الرياضيات	جامعة الــوادي	مقيـاس: تحليـل1
سنة أولـــىMI	كلية العلوم الدقيقة	2022/2021

سلسلة أعمال موجّهة رقم 03 (نهايات واستمرارية الدوال الحقيقية)

تمرين1: احسب النهايات التالية إن وجدت:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-2x})$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}}$

5*) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x+x^2e^{-x})$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 7*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-[x]}{\sqrt{|x|}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^x-\cos x}{x}$

تمرين2: ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $0<b<a$

1. اثبت أنّ: $\dfrac{a^4-b^4}{4a^4}<a-b<\dfrac{a^4-b^4}{4b^4}$. 2. استنتج: $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[4]{x^3}\,(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})$

تمرين3: عيّن الدّالة المكافئة للدالة f ثمّ احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1) $x\mapsto f(x)=\dfrac{(x^2+3x^3)(2x+1)}{2x+x^4},x\to +\infty$ 2) $x\mapsto f(x)=\dfrac{(2x^2+x^4)(2+x)}{x+2x^3},x\to 0$ 3*) $x\mapsto f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}},x\to 2$

تمرين4: عيّن العددين الحقيقيين a و b حتّى تكون الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2, & x>1\\ ax+b, & 0\le x\le 1\\ -x^2+1, & x<0\end{cases}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين5: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرّة على $\mathbb{R}$ بحيث: $\forall x\in\mathbb{R}^*: |f(x)|<|x|$

1. احسب $f(0)$. 2. ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $0<a<b$. اثبت أنّه يوجد ثابت $k\in]0,1[$ حيث: $\forall x\in[a,b]: |f(x)|\le kx$

تمرين6: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة. ادرس التمديد بالاستمرار لـ f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $x\mapsto f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $x\mapsto f(x)=\cos x\cos\dfrac{1}{x}$ 3) $x\mapsto f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 4*) $x\mapsto f(x)=\sin(x+1)\ln|x+1|$

تمرين7: f دالة مستمرة بانتظام على جزء D من $\mathbb{R}$ ولتكن (x_n) و (y_n) متتاليتين من D حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$

1. اثبت أن $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$ 2. هل الدوال التالية مستمرة بانتظام على المجال المعطى I

أ) $f(x)=\dfrac{1}{x}, I=[1,+\infty[$ ب) $f(x)=\dfrac{1}{x}, I=]0,1]$ ج*) $f(x)=\sin(x^2), I=\mathbb{R}$.

تمرين8: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بحيث: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

1. اثبت أنّ f محدودة. 2. هل الدالة f تدرك حدّيها الأعلى والأسفل معا؟

تمرين9*: لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على نفس المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ ، حيث أنّ: $\forall x\in[a,b], f(x)>g(x)$

اثبت أنّه يوجد عدد حقيقي $k>0$ ، حيث أنّ: $\forall x\in[a,b], f(x)\ge g(x)+k$

تمرين10: لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $x_1,x_2,...,x_n$ أعدادا حقيقية $[a,b]$

اثبت أنّ: $\exists c\in[a,b]:\ f(c)=\dfrac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n))$

تمرين11*: لتكن f دالة معرفة ومستمرّة على $\mathbb{R}_+$ بحيث: $\forall x\in\mathbb{R}_+: f(x)>0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}<1$

1. نفترض أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: f(x)\le x$. أ. اثبت أنّ: $f(0)\le 0$. ب. استنتج أنّ: $\exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*: f(\alpha)>\alpha$

2.أ. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$. ب. استنتج أنّ: $\exists\beta\in\mathbb{R}_+: f(\beta)<\beta$. جـ. استنتج أنّ: $\exists\gamma\in\mathbb{R}_+: f(\gamma)=\gamma$

تمرين12: نعتبر f الدالة المعرّفة على $]1,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$

1. بيّن أنّ: $\forall x\in]1,+\infty[: f(x)>\dfrac{1}{2}$ واستنتج أنّ f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

2. بيّن أنّ f تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال يطلب تحديده ثمّ عيّن عبارة f^{-1} الدالة العكسية لـ f

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

حل سلسلة أعمال موجهة رقم 03(نهايات واستمرارية الدوال الحقيقية)

حل تمرين1: حساب النهايات التالية إن وجدت:

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{1}=4$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-2x})=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-2x})(x-\sqrt{x^2-2x})}{(x-\sqrt{x^2-2x})}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{x(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}})}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}})}=\frac{2}{2}=1$$

4) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1\quad (X=e^{-x})$$

5) $$\lim_{x\to+\infty}\ln(x+x^2e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)+\ln(1+xe^{-x}))=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+\lim_{X\to 1}\ln(X)=+\infty\,(1+xe^{-x}=X)$$

8) $$\lim_{x\to0^+}\frac{2^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2^x-1+1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln2\frac{e^{x\ln2}-1}{x\ln2}+\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x}=\ln2\lim_{X\to0^+}\frac{e^X-1}{X}+\lim_{x\to0^+}x\frac{1-\cos x}{x^2}=\ln2(1)+\frac{1}{2}(0)=\ln2$$

حل تمرين2: ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $0<b<a$

1. اثبات أنّ: $\frac{a^4-b^4}{4a^4}<a-b<\frac{a^4-b^4}{4b^4}$.

لدينا $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ وبما $a-b\neq 0$ فإنّ: $(a-b)=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

وبما أنّ: $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$ فإنّ: $\frac{1}{4b^3}>\frac{1}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}>\frac{1}{4a^3}$ ومنه $\frac{a^4-b^4}{4b^3}>\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}>\frac{a^4-b^4}{4a^3}$

وبالتالي $\frac{a^4-b^4}{4a^4}<a-b<\frac{a^4-b^4}{4b^4}$

2. استنتاج: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})$. من أجل $a=\sqrt[4]{x+1}$ و $b=\sqrt[4]{x-1}$

يكون $$\frac{\sqrt[4]{x^3}((\sqrt[4]{x+1})^4-(\sqrt[4]{x-1})^4}{4(\sqrt[4]{x-1})^3}>\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})>\frac{\sqrt[4]{x^3}((\sqrt[4]{x+1})^4-(\sqrt[4]{x+1})^4}{4(\sqrt[4]{x+1})^3}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}>\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}$$ وبما أنّ: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

حسب نظرية الحصر يكون $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1})=\frac{1}{2}$

حل تمرين3: تعيين الدّالة المكافئة للدالة f ثمّ حساب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1) $x\mapsto f(x)=\frac{(x^2+3x^3)(2x+1)}{2x+x^4},x\to+\infty$ عند $+\infty$ نعوض كل كثير حدود بحده الأكبر درجة فيكون: $f(x)\sim\frac{(3x^3)(2x)}{x^4}=6$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=6$

2) $x\mapsto f(x)=\frac{(2x^2+x^4)(2+x)}{x+2x^3},x\to 0$ عند 0 نعوض كل كثير حدود بحده الأصغر درجة فيكون: $f(x)\sim\frac{(2x^2)(2)}{x}=4x$ و

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

حل تمرين4: تعيين العددين الحقيقيين a و b حتّى تكون الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2, & x>1\\ ax+b, & 0\le x\le 1\\ -x^2+1, & x<0\end{cases}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}-\{0,1\}$

حتّى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون $b=\lim_{\substack{>\\x\to0}}(ax+b)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}(-x^2+1)=1$ ومنه $b=1$

حتّى تكون f مستمرة عند1 يجب أن يكون $3=\lim_{\substack{>\\x\to1}}(\sqrt{x}+2)=\lim_{\substack{<\\x\to1}}(ax+b)=a+b$ أي $a+b=3$ وبما أنّ $b=1$ فإنّ $a=2$

حل تمرين 5: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرّة على $\mathbb{R}$ بحيث: $\forall x\in\mathbb{R}^*: |f(x)|<|x|$

1. حساب $f(0)$.

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*: 0\le |f(x)|<|x| \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

وبما أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي عند 0 نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

2. اثبات أنّه يوجد ثابت $k\in]0,1[$ حيث: $\forall x\in[a,b]: |f(x)|\le k\,x$

لتكن $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\dfrac{|f(x)|}{x}$

لدينا $0<a<b\Rightarrow 0\notin[a,b]$ وبالتالي g معرفة ومستمرة على مجال متراص $[a,b]$ حسب نظرية فايرشتراس فهي محدودة وتدرك حديها

تدرك حدها الأعلى يعني $\exists c\in[a,b]: \forall x\in[a,b]: g(x)\le g(c)$ ومن جهة أخرى لدينا $|f(c)|<c\Rightarrow g(c)=\dfrac{|f(c)|}{c}<1$

نضع $k=g(c)$ نحصل على $\forall x\in[a,b]: g(x)\le k$ و بما أنّ $g(x)=\dfrac{|f(x)|}{x}$ فإنّ $\forall x\in[a,b]: |f(x)|\le k\,x$

حل تمرين6: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة. دراسة التمديد بالاستمرار لـ f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $x\mapsto f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$ لندرس استمرارية f عند 0

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: \left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*: 0\le\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\le|\sin x|\Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$$

إذا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ومنه f تقبل التمديد بالاستمرار على $\mathbb{R}$ الى دالة $\overline{f}$ معرفة كما يلي: $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si } x\ne 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$

2) $x\mapsto f(x)=\cos x\cos\dfrac{1}{x}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$ لندرس استمرارية f عند 0

نفترض أنّ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cos\dfrac{1}{x}=l$. لتكن (s_n) متتالية حيث: $s_n=\dfrac{1}{n\pi}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} s_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n\pi}=0$ لكن $\lim\limits_{x\to\infty} f(s_n)=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{n\pi}\cos(n\pi)=\cos(0)(-1)^n=(-1)^n=l$ ومنه $l=1$ أو $l=-1$ وهذا

يناقض وحدانية النهاية l إذا f لا تقبل نهاية عند $x_0=0$ وبالتالي f لا تقبل التمديد بالاستمرار على $\mathbb{R}$

3) $x\mapsto f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$ لندرس استمرارية f عند 0

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\dfrac{\sin x}{x}=1$ بما أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)\ne\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)$ فإنّ f لا تقبل نهاية عند 0

وبالتالي f لا تقبل التمديد بالاستمرار على $\mathbb{R}$

حل ت7: f دالة مستمرة بانتظام على جزء D من $\mathbb{R}$ و (x_n) و (y_n) متتاليتين من D حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$

1. اثبات أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$

بما أنّ f مستمرة بانتظام على D فإنّ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: [\forall(x,y)\in D^2,\ |x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon]\ldots(1)$

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ فإنّ: $\forall\varepsilon>0,(\varepsilon=\alpha),\ \exists n_0\in\mathbb{N}: [\forall n\ge n_0:\ |x_n-y_n|<\alpha]\ldots(2)$

انطلاقا من (1) و (2) نجد $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}: [\forall n\ge n_0:\ |f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon]$. وهو المطلوب.

2. هل الدوال التالية مستمرة بانتظام على المجال I

أ) $f_1(x)=\dfrac{1}{x},\ I=[1,+\infty[$. الدالة f_1 مستمرة بانتظام على I لنثبت أنّ:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: [\forall(x,y)\in I^2,\ |x-y|<\alpha\Rightarrow|f_1(x)-f_1(y)|<\varepsilon]$$

من أجل $x, y \geq 1$ لدينا $|f_1(x)-f_1(y)| = \dfrac{|x-y|}{|xy|} \leq |x-y|$ يكفي أن نختار $\alpha = \varepsilon$.

ب) $I =]0,1]$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$. الدالة f_2 غير مستمرة بانتظام على I لنثبت أنّ:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0 : [\exists (x, y) \in I^2,\ |x-y| < \alpha \wedge |f_2(x)-f_2(y)| \geq \varepsilon]$$

ليكن $\alpha > 0$ لدينا $\forall (x, y) \in]0, \alpha]^2,\ |f_2(x)-f_2(y)| = \dfrac{|x-y|}{|xy|} \geq \dfrac{|x-y|}{\alpha^2}$

إذا وفي الحالة الخاصة لدينا $\forall \alpha \in]0,1]^2,\ |f_2(\alpha)-f_2(\frac{\alpha}{2})| > \dfrac{1}{2\alpha} \geq \dfrac{1}{2}$

ونستنتج أنّ: $\forall \alpha \in]0,1]\ , \exists (x, y) \in I^2, |x-y| < \varepsilon \wedge |f_2(x)-f_2(y)| > \dfrac{1}{2}$

حل ت 8: لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة وحيث أنّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. اثبات أنّ f محدودة.

نفترض أنّ: $\varepsilon = 1$ وحسب المعطيات لدينا: $(\exists \alpha < 0 : \forall x \in \mathbb{R} (x < \alpha \Rightarrow |f(x)| < 1)$ و $(\exists \beta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} (x > \beta \Rightarrow |f(x)| < 1)$

ونستنتج أنّ: $\forall x \in]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[: |f(x)| < 1$. من جهة أخرى الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي على المجال المتراص $[\alpha, \beta]$

وحسب نظرية فايرستراش«Weierstrass» فهي محدودة على $[\alpha, \beta]$ ومنه $\exists M > 0,\ \forall x \in [\alpha, \beta] : |f(x)| < M$

لنضع $M_0 = \max(1, M)$ إذا لدينا $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| < M_0$ وبالتالي: f محدودة.

2. الدالة f لا تدرك حدّيها الأعلى والأسفل معا. لنأخذ مثالا مضادا: $f(x) = e^{-x^2}$، الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. يمكن اثبات أنّ: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ و $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$. الدالة f تدرك حدّها الأعلى لأنّ

$f(0) = 1$ لكن لا تدرك حدها الأسفل لأن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

حل ت 10: لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a, b]$ ولتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ أعدادا حقيقية $[a, b]$

اثبات أنّ: $\exists c \in [a, b]:\ f(c) = \dfrac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n))$

f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ حسب نظرية فيرستراش فهي محدودة وتدرك حديها وبالتالي

$\exists \alpha, \beta \in [a, b],\ f(\alpha) = \inf\limits_{x\in[a, b]} f(x) = m, f(\beta) = \sup\limits_{x\in[a, b]} f(x) = M$ و $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$

بما أنّ $x_1, x_2, ..., x_n$ أعدادا حقيقية من $[a, b]$ فإنّ $m \leq f(x_1) \leq M$ ، $m \leq f(x_2) \leq M$ ... $m \leq f(x_n) \leq M$ بالجمع نجد

$nm \leq f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \leq nM$ ويكو ن $m \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \leq M$

وبالتالي $f(\alpha) \leq \dfrac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)) \leq f(\beta)$ حسب نظرية القيم المتوسطة

$$\exists c \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]:\ f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n))$$

حل ت 12: نعتبر f الدالة المعرّفة على $]1, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$

1. اثبات أنّ: $\forall x \in]1, +\infty[: f(x) > \dfrac{1}{2}$ نستعمل البرهان بالتكافؤ

ليكن x من $]1, +\infty[$ لدينا $f(x) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - x} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} > \sqrt{x^2 - x}$

بما أنّ $x > 1$ فإنّ $x - \dfrac{1}{2} > 0$ ومنه $f(x) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 > x^2 - x \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} > 0$

وبما أنّ العبارة الأخيرة صحيحة فإنّ $\forall x \in]1, +\infty[: f(x) > \dfrac{1}{2}$ (البرهان بالتكافؤ)

استنتاج أنّ f متناقصة تماما على $]1, +\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين مختلفين من $]1, +\infty[$ لدينا

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1-(\sqrt{x_2^2-x_2}-\sqrt{x_1^2-x_1})=x_2-x_1-\frac{x_2^2-x_2-(x_1^2-x_1)}{\sqrt{x_2^2-x_2}+\sqrt{x_1^2-x_1}}=(x_2-x_1)\left(1-\frac{x_2+x_1-1}{\sqrt{x_2^2-x_2}+\sqrt{x_1^2-x_1}}\right)$$

ومنه $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\sqrt{x_2^2-x_2}+\sqrt{x_1^2-x_1}-x_2-x_1+1}{\sqrt{x_2^2-x_2}+\sqrt{x_1^2-x_1}}=\dfrac{1-f(x_2)-f(x_1)}{\sqrt{x_2^2-x_2}+\sqrt{x_1^2-x_1}}$

وبما أنّ $f(x_1)>\dfrac{1}{2}$ و $f(x_2)>\dfrac{1}{2}$ فإنّ $1-f(x_2)-f(x_1)<0$ إذا $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ وهذا يعني أنّ f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$

2. إثبات أنّ f تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال يطلب تحديده ثمّ تعيين عبارة f^{-1} الدالة العكسية لـ f

f مستمرّة ومتناقصة تماما على $]1,+\infty[$ ومنه f تقابل من $]1,+\infty[$ نحو المجال J حيث: $J=]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}f(x)[=\left]\dfrac{1}{2},1\right[$

ليكن x عددا من $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ و y عددا من $]1,+\infty[$ لدينا $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=y-\sqrt{y^2-y}\Leftrightarrow\sqrt{y^2-y}=y-x$

بما أنّ $x<1$ و $y>1$ فإنّ $x<y$ أي $y-x>0$ ومنه

$$y=f^{-1}(y)\Leftrightarrow\ y^2-y=(y-x)^2\ \Leftrightarrow\ y^2-y=y^2-2xy+x^2\Leftrightarrow(2x-1)y=x^2\quad\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2x-1}$$

إذا $\forall x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[:f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$