أعمال موجهة في وحدة القياس

مستوى ثالثة رياضيات

ينبغي إحضار نسخة من هذه السلسلة في حصص الأعمال الموجهة

تمرين 1. *حول النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية عددية*

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ يشير الى المستقيم الحقيقي المكتمل.

لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $\mathbb{R}$. يرمز إلى النهاية العليا لـ $(x_n)_{n\geq 1}$ بالرمز $\limsup\limits_{n\to+\infty}$ أو $\overline{\lim\limits_{n}}$ ، وهي معرفة بـ

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} x_k)$$

النهاية السفلى للمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ يرمز لها بالرمز $\liminf\limits_{n\to+\infty}$ أو $\underline{\lim\limits_{n}}$ ، وهي معرفة بـ

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} x_k)$$

1. عين النهايتين السفلى والعليا لـ $(x_n)_n$ في الحالات التالية

a. $(x_n)_{n\geq 0}:\ x_n = (-1)^n$ **b.** $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

c. $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = \left(1 + sin\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ **d.** $(x_n)_{n\geq 1}:\ x_n = \frac{2}{n}$

2. بين أن النهايتين السفلى والعليا دوما موجودتان في $\overline{\mathbb{R}}$ من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من $\mathbb{R}$.
3. لتكن $(x_n)_n$ و $(y_n)_n$ متتاليتين من $\mathbb{R}$. برهن القضايا :

a. $\limsup\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$

b. $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$

c. $x_n \leq y_n\ \forall n \implies \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n \ \wedge\ \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$

مع افتراض عدم وجود لحالاتي عدم التعيين $-\infty + \infty$ ، $+\infty - \infty$ في العلاقتين (b) و(a) .

4. برهن أنه حتى تتقارب المتتالية $(x_n)_n$ نحو عدد حقيقي l من $\mathbb{R}$ (أي $\lim\limits_{n} x_n = l$) يلزم ويكفي :

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = l$$

تمرين 2. *حول النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية مجموعات*

لتكن X مجموعة كيفية، ولتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعات من $\mathcal{P}(X)$. حيث $\mathcal{P}(X)$ تشير إلى مجموعة أجزاء X. نذكر بأن المجموعة $\mathcal{P}(X)$ مرتبة بعلاقة الاحتواء "$\subset$" مع أن الترتيب ليس كليا.

نعرف النهايتين العليا والسفلى للمتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ على التوالي بـ

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \quad \text{و} \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right).$$

1. نضع $X = \mathbb{R}$ ، عين النهايتين العليا والسفلى لـ $\{A_n\}_{n\geq 1}$ في الحالات التالية

a. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}:\ A_n = \{(-1)^n;\ n \in \mathbb{N}\}$

b. $\{A_n\}_{n\geq 0}$: $A_{2n}=[0,1],\ A_{2n+1}=[1,2]$

c. $\{A_n\}_{n\geq 1}$: $A_n=\left[0,1+\frac{(-1)^n}{n}\right]$

2. برهن من أجل كل عددين a و b من $\mathbb{R}$ مع $a \prec b$ لدينا :

$$[a,b]=\bigcap_{n\geq 1}\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[\quad ، \quad]a,b[=\bigcup_{n\geq 1}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$$

ثم أعط كتابة للمجال $]a,b[$ على شكل اتحاد قابل للعد لمجالات مغلقة، وكذا المجال $[a,b]$ على شكل تقاطع قابل للعد لمجالات مفتوحة.

3. لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ و $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين من $\mathcal{P}(X)$. برهن القضايا الآتية

a. $\limsup\limits_{n\to+\infty}(A_n\cap B_n)\subset \limsup\limits_{n\to+\infty}A_n\cap \limsup\limits_{n\to+\infty}B_n$

b. $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n\cup \liminf\limits_{n\to+\infty}B_n\subset \liminf\limits_{n\to+\infty}(A_n\cup B_n)$

c. $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n\geq 1 \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

d. $A_{n+1}\subset A_n\ \forall n\geq 1 \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$

تمرين 3. *حول ا لتابع المميز لمجموعة*

نعرف التابع $\psi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ المميز لجزء A من مجموعة X المعطى بـ

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1 & : x\in A\\ 0 & : x\notin A\end{cases}$$

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من X.

1. برهن أن: $\psi_{A\cap B}=\psi_A\psi_B$ ، و إذا كان $A\subset B$ ، برهن أن:

$$\psi_A\leq\psi_B \quad ، \psi_{B-A}=\psi_B-\psi_A$$

2. برهن أنه إذا كانت A و B منفصلتين (تقاطعهما خال) فإن : $\psi_{A\cup B}=\psi_A+\psi_B$
3. برهن أنه إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية مجموعات جزئية من X ومنفصلة مثنى مثنى، فإن

$$\psi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{A_n}$$

ثم حدد طبيعة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{A_n}$

4. لنفرض $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا، لا يؤخذ إلا عددا منتهيا من القيم، أي $card\ f(X)\prec\infty$. برهن أن f يكتب على شكل مزج خطي لتوابع مميزة، يعني من الشكل $\sum_{i\in I}\lambda_i\psi_{A_i}$ مع λ_i أعداد حقيقية.

حول الحلقات، الجبور والعشائر

تمرين 4.

لتكن X مجموعة و $\mathcal{M}$ فئة من $\mathcal{P}(X)$. نقول على الفئة $\mathcal{M}$ أنها رتيبة إذا كانت مستقرة بالنسبة إلى نهايات متتالياتها الرتيبة، يعني أنه من أجل كل متتالية رتيبة $\{A_n\}_n$ من $\mathcal{M}$ تتحقق القضيتان التاليتان

(i) إذا كانت $\{A_n\}_n$ متزايدة (بمعنى الاحتواء، أي $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n$) فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$ ،

(ii) وإذا كانت $\{A_n\}_n$ متناقصة (بمعنى الاحتواء، أي $A_n\subset A_{n+1}\ \forall n$) فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$.

1. برهن أن كل عشيرة على X هي فئة رتيبة. هل العكس صحيح؟
2. ليكن $\mathcal{A}$ جبرا على X . نفرض أن $\mathcal{A}$ مستقرا (مغلقا) بالنسبة إلى نهايات متتالياته المتزايدة، بين عندئذ أن $\mathcal{A}$ عشيرة على X.

تمرين 5. ليكن $\mathcal{A}$ جبرا على X و $\mathcal{M}$ فئة رتيبة على X. برهن أنه إذا كان $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ فإن

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$$

تمرين 6. برهن القضية 9 الواردة في الدرس، والتي تنص على أنه إذا كان $f\ :\ X \longrightarrow Y$ تطبيق و إذا كانت $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء Y فإن :

$$f^{-1}\left(\sigma_Y(\mathcal{C})\right) = \sigma_X f^{-1}(\mathcal{C})$$

عموما يرمز بـ $\sigma_Z(\mathcal{D})$ إلى العشيرة على Z المولدة من $\mathcal{D}$.

<u>إرشاد</u>: استعمل كون

$$\mathcal{T} = \left\{B \subset Y:\ f^{-1}(B) \in \sigma_X f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$$

عشيرة على Y.

تمرين 7. *العشيرة الأثر*

ليكن $(X, \mathcal{T})$ فضاء قابلا للقياس و $A \subset X$. نعرف الفئة $\mathcal{T}_A$ بـ

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap C:\ C \in \mathcal{T}\}$$

1. بين أن $\mathcal{T}_A$ عشيرة على A ، وتدعى عشيرة أثر $\mathcal{T}$ على A.
2. عين $\mathcal{T}_A$ عندما $A \in \mathcal{T}$.

تمرين 8.

نشير إلى أن جزءا $\mathrm{U} \subset \overline{\mathbb{R}}$ يكون مفتوحا في $\overline{\mathbb{R}}$ اذا كان $\mathrm{U} \cap \mathbb{R}$ مفتوحا في $\mathbb{R}$ المزود بالتبولوجيا الاعتيادية، نشير أيضا إلى أن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ هي بمثابة عشيرة أثر لـ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ على $\mathbb{R}$.

بمعاينة $\{-\infty\} = \bigcap_{n\geq 1}[-\infty, -n[$ و $\{+\infty\} = \bigcap_{n\geq 1}]n, +\infty]$ ، أثبت أن كل فئة من الفئات التالية

$$\mathcal{C}_0 = \{\,]\alpha, \beta[/\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \prec \beta \,\}$$
$$\mathcal{C}_{+\infty} = \{\,]\alpha, +\infty] /\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{C}_{-\infty} = \{\, [-\infty, \beta[/\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

تولد العشيرة البوريلية على $\overline{\mathbb{R}}$.