Université Hama Lakhdar el oued **2021/2022**

Faculté Sciences et de la Technologie 2ème année (GC, TP, Hydro)

TD1: Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel)

Exercice 1 :

Exercice 01 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2)

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{i} + 5\,\vec{i}$

Son module : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère.

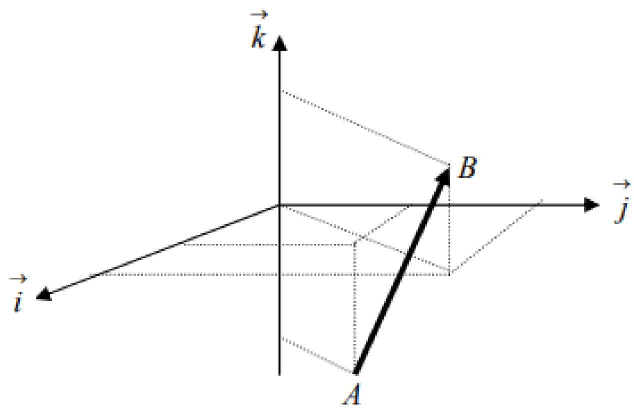
Ses angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{i} = AB.1.\cos\alpha \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{i}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \;\Rightarrow\; \alpha = 64.89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{j} = AB.1.\cos\beta \;\Leftrightarrow\; \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{j}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \;\Rightarrow\; \beta = 55.54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{k} = AB.1.\cos\theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{k}}{AB} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \;\Rightarrow\; \theta = 44.99°$$

son sens : comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.



Exercice 2 :

Soient les vecteurs :

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$, $\vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$

1) *Déterminer y et z pour que les vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ *soient colinéaires ;*

2) *Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ *soient perpendiculaires;*

Solution :

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z + 48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Exercice 3 :

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : $\vec{U}$, $\vec{P}$, $\vec{Q}$, *tel que :*

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois vecteurs : $v = \left|\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q})\right|$

$$\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} 0 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 \\ 4 \\ -2 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \begin{cases} -26 \\ 5 \\ -3 \end{cases} = -52 + 30 = -22 \; ; \; \Rightarrow$$

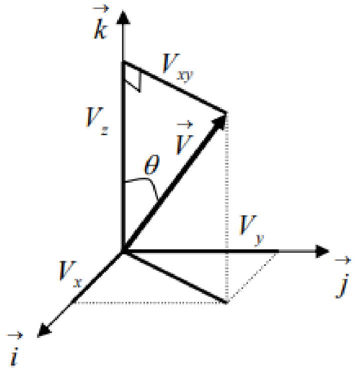
$$v = \left|\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q})\right| = |-22| = 22$$

Exercice 4 :

La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est donnée par les équations paramétriques suivantes :* $x = 4t^2$, $y = 4(t - \frac{t^3}{3})$, $z = 3t + t^3$

Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe *oz. Quelle est la valeur de cet angle.*

Solution :



La vitesse du mobile est donnée par : $\vec{V} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 4(1-t^2) \\ V_z = 3(1+t^2) \end{cases}$

Nous avons en effet :

$$tg\theta = \frac{V_{xy}}{V_z} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{64t^2 + 16(1-t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{64t^2 + 16t^4 - 32t^2 + 16}}{3(1+t^2)}$$

$$tg\theta == \frac{\sqrt{16(t^2 + 2t^2 + 1)}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{16(1+t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{4(1+t^2)}{3(1+t^2)} = \frac{4}{3}$$

$tg\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53{,}13°$ la valeur de l'angle est bien constante.

Exercice 5 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U_1} = A_1\,\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}$ *et* $\vec{U_2} = B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k}$

1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U_1} \cdot \vec{U_2}$, $\vec{U_1} \cdot \vec{U_1}$, $\vec{U_2} \cdot \vec{U_2}$,

   On donne : $\vec{V_1} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 5\,\vec{k}$, $\vec{V_2} = -3\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j} - 7.5\,\vec{k}$, $\vec{V_3} = -5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$

2) Calculer $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$;

3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur $\vec{V_2}$ par rapport à $\vec{V_1}$;

4) Calculer les produits suivants $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$ et $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$;

5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$

Solution :

1) $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2 = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $\vec{U}_2 \bullet \vec{U}_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

2) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -6 - 1{,}5 - 37{,}5 = -45$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2 \\ -1{,}5 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 7{,}5 - 7{,}5 \\ -1{,}5 + 1{,}5 \\ 3 - 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3) Comme le produit vectoriel des deux vecteurs est nul, alors ils sont parallèles

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$$

De plus leur produit scalaire est négatif $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -45$, alors les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles et de sens opposés

4) $$\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = 63 - 40{,}5 - 22{,}5 = 0$$

on peut retrouver ce résultat par la méthode vectorielle :

Nous avons $\vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$ soit $\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V}_2 \perp \vec{W} \\ \vec{V}_3 \perp \vec{W} \end{cases}$, calculons $\vec{V}_1 \bullet \vec{W}$

$\vec{V}_2 \perp \vec{W}$ et $\vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V}_1 \bullet \vec{W} = 0$

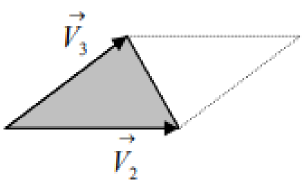
$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = \begin{cases} -198 \\ 166{,}5 \\ 112{,}5 \end{cases}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -198\,\vec{i} + 166\,\vec{j} + 112{,}5\,\vec{k}$$

5) La surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est donnée par la moitié du module du produit vectoriel des deux vecteurs :

Nous avons : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = 31{,}5\,\vec{i} + 40{,}5\,\vec{j} - 4{,}5\,\vec{k}$ alors :

$$\left| \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \right| = \sqrt{31{,}5^2 + 40{,}5^2 + (-4{,}5)^2} = 51{,}50$$



$$S = \frac{\left| \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \right|}{2} = \frac{51{,}50}{2} = 25{,}75$$

c'est la demi surface du parallélogramme :

Exercice 6 :

Soit f un scalaire et $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ trois vecteurs quelconques, vérifier les relations suivantes :

1) $div(f\,\vec{A}) = f div\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{gradf}$;

2) $\overrightarrow{rot}(f\,\vec{A}) = \overrightarrow{gradf}\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

3) $\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$;

4) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rotA}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\,\vec{A}$;

5) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{gradf}) = \vec{0}$;

6) $div(\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \vec{0}$

7) $div(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{rotA} - \vec{A}\,\overrightarrow{rotB}$

1) $div(f\,\vec{A}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(fA_z)$

$$= f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= f div\,\vec{A} \;+\; \vec{A}\cdot\overrightarrow{gradf}$$

2) $$\overrightarrow{rot}(f\,\vec{A}) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}fA_x\\ fA_y\\ fA_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial fA_z}{\partial y} - \dfrac{\partial fA_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial fA_x}{\partial z} - \dfrac{\partial fA_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial fA_y}{\partial x} - \dfrac{\partial fA_x}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f\dfrac{\partial A_z}{\partial y} + A_z\dfrac{\partial f}{\partial y} - f\dfrac{\partial A_y}{\partial z} - A_y\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ f\dfrac{\partial A_x}{\partial z} + A_x\dfrac{\partial f}{\partial z} - f\dfrac{\partial A_z}{\partial x} - A_z\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ f\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + A_y\dfrac{\partial f}{\partial x} - f\dfrac{\partial A_x}{\partial y} - A_x\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}f\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) + A_z\dfrac{\partial f}{\partial y} - A_y\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ f\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) + A_x\dfrac{\partial f}{\partial z} - A_z\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ f\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) + A_y\dfrac{\partial f}{\partial x} - A_x\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = \overrightarrow{gradf}\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$$

3) $$\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_yC_z-B_zC_y\\B_zC_x-B_xC_z\\B_xC_y-B_yC_x\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_y\left(B_xC_y-B_yC_x\right)-A_z\left(B_zC_x-B_xC_z\right)\\A_z\left(B_yC_z-B_zC_y\right)-A_x\left(B_xC_y-B_yC_x\right)\\A_x\left(B_zC_x-B_xC_z\right)-A_y\left(B_yC_z-B_zC_y\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z+A_xB_xC_x-A_xB_xC_x\\A_zB_zC_x-A_zB_xC_z-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x+A_yB_yC_y-A_yB_yC_y\\A_xB_zC_x-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z+A_yB_zC_y+A_zB_zC_z-A_zB_zC_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}B_x\left(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\right)-C_x\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)\\B_y\left(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\right)-C_y\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)\\B_z\left(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\right)-C_z\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)\end{pmatrix}$$

$$=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})$$

4) $$\vec{rot}(\overrightarrow{rotA})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\\dfrac{\partial}{\partial y}\\\dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\\\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x\\\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_y\\\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z\end{pmatrix}=\overrightarrow{grad}(div\,\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

5) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

<u>D'une autre manière :</u>

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = f\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\right) = \vec{0}$

6) $div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

7) $div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$- A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot A} - \vec{A}\, \overrightarrow{rot B}$$