Université Hamma Lakhder d'EL-OUED

Faculté de technologie

Département de Génie civile et hydraulique

Polycopié de la matière :
Mécanique Rationnelle

Fait par :

MEHAYECH

Sommaire

Chapitre I: Les Outils Mathématiques

I.1. Vecteurs

Un vecteur est un segment de droite OA sur lequel on a choisi une origine O et une extrémité **A** ,il est défini par: son origine , sa direction **,** son sens , son module

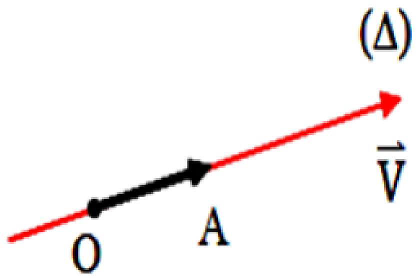

Fig.I.1:Prèsentation graphique d'un vecteur

Par convention on adopte la notation suivante : vecteur : $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{OA}$

Néanmoins, le vecteur peut se représenté en plusieurs types :

- **Vecteur libre** : la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;
- **Vecteur glissant** : le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé ;
- **Vecteur lié** : tous les éléments du vecteur sont déterminés ;
-**Vecteur unitaire** : c'est un vecteur dont le module est égal à 1.
- **Vecteurs colinéaires :** ils possèdent le même support.
-**Vecteurs coplanaires :** leurs supports se trouvent dans un même plan,
-**Vecteurs équipollents (équivalents) :** ils ont les mêmes grandeurs et les mêmes orientations, même s'ils n'ont pas le même point d'application.
- **Vecteurs égaux :** vecteurs équipollents de même sens.
-**Vecteurs opposés :** vecteurs équipollents de sens contraires ou opposés.
- **Vecteurs identiques :** vecteurs équipollents égaux de même origine.

I.2.Composante d'un vecteur :

L'origine d'un vecteur $\vec{A}$ dans l'espace à trois dimensions peut être l'origine O d'un système d'axes orthogonaux. Soit A_1, A_2 et A_3 les composantes de ce vecteur suivant les trois axes X, Y et Z.

Le vecteur A s'écrit alors : $\vec{A} = A_1\vec{i}+A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

Le module de $\vec{A}$ est $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2}$ (I-01)

En particulier, le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, d'origine O et d'extrémité le point M , de coordonnées (x, y, z) s'écrit : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Et a pour module: $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (I-02)

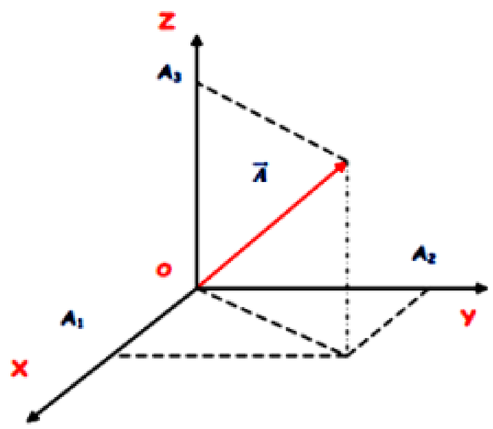

Fig.I.2:Les trois Composantes d'un vecteur

I.2.1.Les Coordonnées Polaires

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (r, φ) . (Fig. I.3) ,avec :

r :Rayon polaire

φ : Angle polaire

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r$ (I-03)

$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$ et $\vec{u}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi \quad \text{(I-04)}$$

Où (A_r, A_φ) représente les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est:

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = \arccos x/r \\ \varphi = \arcsin y/r \end{cases} \quad \text{(I-05)}$$

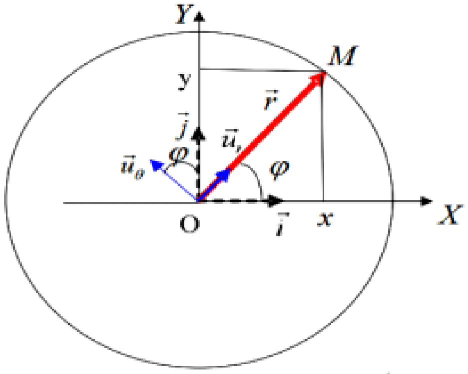

Fig.I.3:Coordonnees Polaires

1.2.2.Les Coordonnées Cylindriques et sphériques :

Dans les phénomènes de physique et de science de terre et astronomie, le système de coordonnées cylindrique et sphérique est souvent utilisé, le vecteur $\vec{u}$ dans une base cylindrique est donné par : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{K})$ est donné par : $\vec{u} = r.\vec{e}_r + z.\vec{K}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r + z.\vec{K} \quad \text{(I-06)}$$

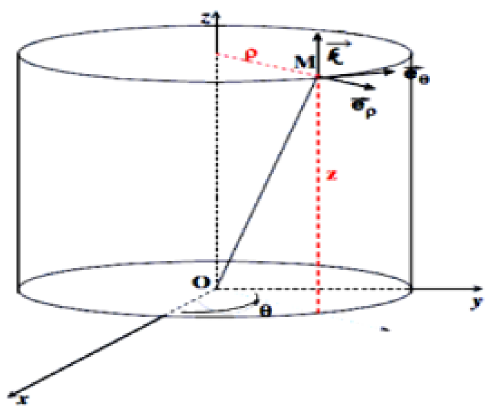

Fig. I.4. Les coordonnées cylindriques

Or que dans l'espace des coordonnées sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ le vecteur $\vec{u}$ est défini comme : $\vec{u} = r.\vec{e}_r$, $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$ (I-07)

Etant que **r** est calculé sur l'espace tridimensionnel comme la démontre l'égalité suivante :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2} + u_z^{\,2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_x = r.\sin\varphi.\cos\theta \\ u_y = r.\sin\varphi.\sin\theta \\ u_z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{(I-08)}$$

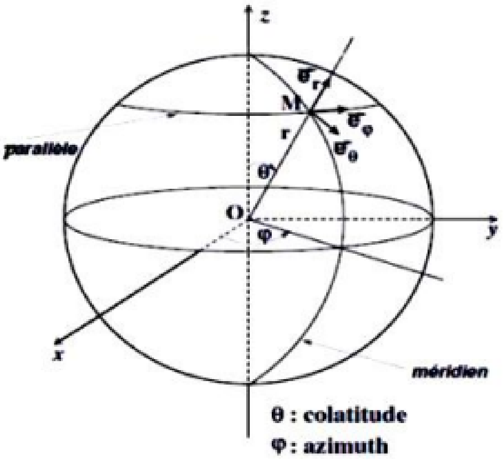

Fig. I.5. Les coordonnées Sphériques

I.3.Opération sur les vecteurs :

I.3.1. Addition des vecteurs :

La sommation des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ s'effectue en transportant les origines des deux vecteurs en un seul point A afin de construire un parallélogramme dont les cotés sont $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Le vecteur résultant $\vec{V}$ est défini par : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

$$= (V_{1x} + V_{1y} + V_{1z})\vec{e}_1 + (V_{2x} + V_{2y} + V_{2z})\vec{e}_2 + (V_{3x} + V_{3y} + V_{3z})\vec{e}_3 \qquad \text{(I-08)}$$

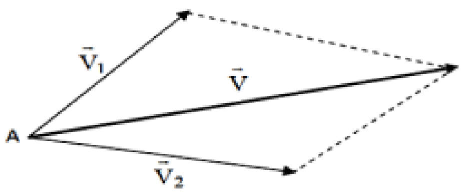

Fig. I.6 .Règle du parallélogramme

À partir de la construction du parallélogramme, nous pouvons déduire une autre méthode graphique pour l'addition des vecteurs. Cette méthode est connue sous le nom ***règle du triangle***. Nous pourrons dessiner seulement la moitie du parallélogramme. Le vecteur résultant de l'addition de deux vecteurs peut être trouvé en disposant $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ bout à bout et en joignant ensuite l'origine de $\vec{V}_1$ à l'extrémité de $\vec{V}_2$

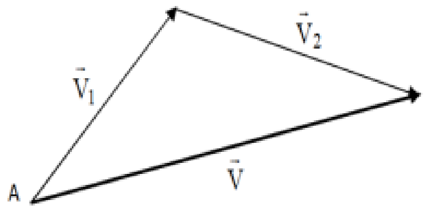

Fig. I.7. Règle du triangle

L'addition de plusieurs vecteurs de fait en disposant tous les vecteurs bout à bout et en traçant le vecteur qui a comme origine, l'origine du premier vecteur, et comme extrémité, l'extrémité du dernier. Cette façon de procéder traduit graphiquement la *règle du polygone*.

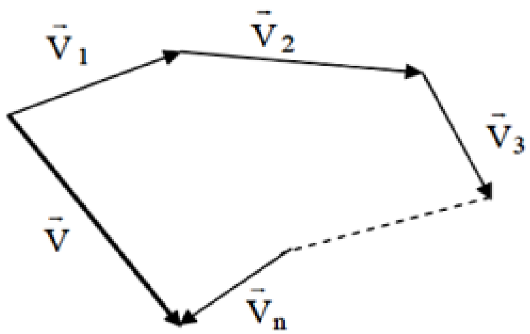

Fig.I.9. Règle du polygone

D'autre part, La sommation des vecteurs est :

* Commutative : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2\ \vec{V}_1$ (I-10)

* Associative : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ (I-11)

* Distributive par rapport à la somme vectorielle : $\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda\,\vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2$ (I-12)

*Distributive par rapport à la somme scalaire : $\vec{V}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1\vec{V} + \lambda_2\vec{V}$ (I–13)

I.3.2 .Soustraction des vecteurs :

La soustraction de deux vecteurs $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ est le vecteur $\vec{V}$ défini comme l'addition du vecteur $\vec{V}_1$ à un vecteur $\vec{V}'_2$ égal et opposé à $\vec{V}_2$.

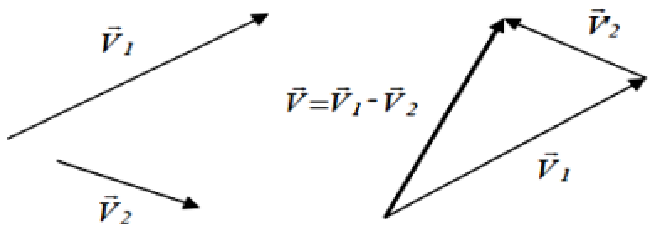

Fig. I.10. Soustraction de deux vecteurs

I.3.3. Décomposition des vecteurs :

Nous avons montrés jusqu'à maintenant qu'il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs vecteurs par un vecteur unique. Réciproquement, il est toujours possible de remplacer un vecteur unique $\vec{V}$ par deux ou plusieurs vecteurs. Ces vecteurs sont appelés les *composantes* du vecteur original $\vec{V}$. Nous devons considérer deux cas d'intérêt particulier :

1. Une des composantes $\vec{V}_1$ est fixée. On calcule la deuxième composante en utilisant la règle du triangle.

2. Les deux directions de décomposition sont données. La grandeur et l'orientation des composantes sont obtenues en appliquant le principe du parallélogramme.

I.4. Produit des vecteurs :

I.4.1.Produit scalaire entre deux vecteurs :

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$,leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire, , (Fig. I.11) : $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\cos\theta$ (I-14)

Tel que θ est l'angle entre les deux vecteurs, Ce produit admet quelque propriétés tel que : $\vec{i}.\vec{i} = 1$, $\vec{i}.\vec{j} = 0$

Un produit scalaire de deux vecteurs est :

* Commutatif : $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_2.\vec{V}_1$ (I-15)

* Associatif par rapport la multiplication d'un scalaire :
$\lambda(\vec{V}_1.\vec{V}_2) = \lambda\,\vec{V}_1\;.\lambda\vec{V}_2 = \vec{V}_1\;.(\lambda\vec{V}_2)$ (I-16)

* Distributif par rapport la somme vectorielle :

$$\vec{V}_1 \,.\, (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 + (\vec{V}_1.\vec{V}_3) \qquad \text{(I-17)}$$

* Nul si seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux :

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 = \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0 \qquad \text{(I-18)}$$

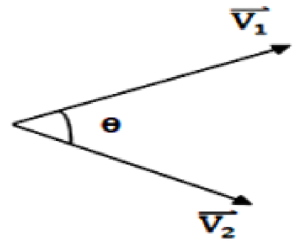

Fig. I.11. Produit scalaire

I.4.2 .Produit vectoriel : Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, leur produit vectoriel est un vecteur orienté (Fig. I.12), $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}$

*la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

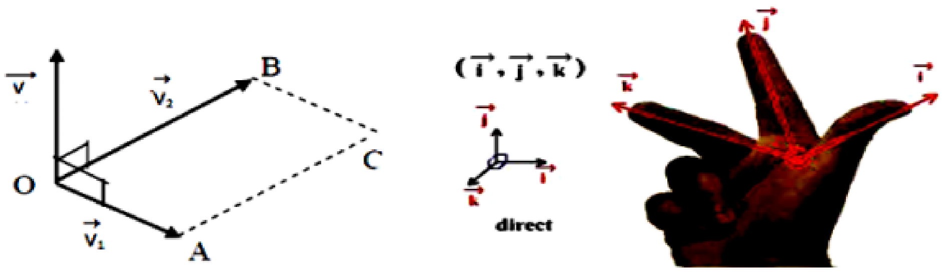

Fig. I.12. Produit vectoriel

* le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite

* sa norme vaut $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\sin\alpha$ (I-19)

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

***Propriétés:** $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = 0, \ \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) + \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} + z_1x_2\vec{\imath} - x_1z_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 \ - y_1x_2)\vec{k}$$

il peut être aussi déterminer par la méthode du déterminant

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} \quad \text{(I-20)}$$

D'autre part, Le produit vectoriel est :

* Distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) \wedge \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 + \left(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1\right) \ \text{ et } \ \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3\right) \quad \text{(I-21)}$$

* Associatif par rapport la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \lambda\,\vec{V}_1 \ \wedge \lambda\vec{V}_2 = \vec{V}_1 \ \wedge (\lambda\vec{V}_2) \quad \text{(I-22)}$$

*Antisymétrique où anticommutatif : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = -(\vec{V}_2 \ \wedge \vec{V}_2)$ (I-23)

* Nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires :

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \text{(I-24)}$$

I.4.2. Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2)x_1 - (x_2z_3 - z_2x_3)y_1 + (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 \quad \text{(I-25)}$$

I.4.3. Règle des sinus dans un triangle

Soit un triangle quelconque ABC nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.

Dans les triangles ABD et CBD , nous avons :

$\sin\alpha = \frac{DB}{AB}$, et $\sin\beta = \frac{DB}{BC}$ d'où

AB $\sin\alpha$ = BC $\sin\beta$,On déduit : $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}$

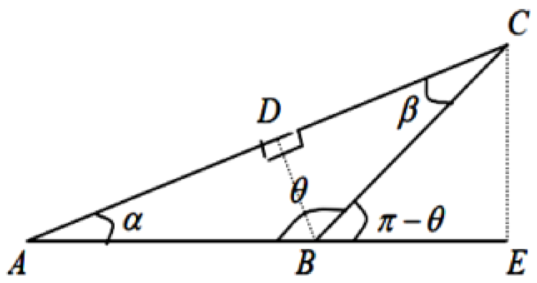

Fig. I.13.Règle des sinus dans un triangle

I.4.3. Règle des sinus dans un triangle

Soit un triangle quelconque ABC nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.

Dans les triangles ABD et CBD , nous avons :

$\sin\alpha = \frac{DB}{AB}$, et $\sin\beta = \frac{DB}{BC}$ d'où

AB $\sin\alpha$ = BC $\sin\beta$,On déduit : $\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}$

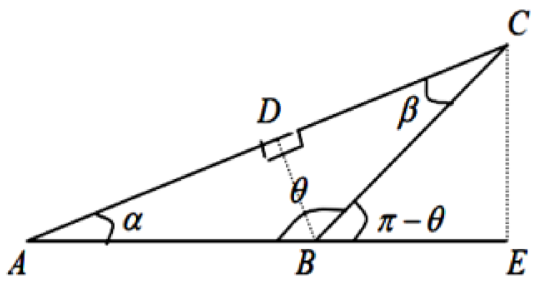

Fig. I.13.Règle des sinus dans un triangle