جامعة الشهيد حمــة لخضر
كلية العلوم الدقيقة

السنة الثانية ماستر رياضيات
قسم الرياضيات

تحليــل مركــب

Analyse complexe

د.عبد الحميــد رحومه

عناويـن الدروس

الدرس الأول : الدوال الهولومورفيه لمتغير مركب واحد خواص عامة

1.1 الدالة المستمرة المركبة لمتغير مركب

تعريف 1. لتكن D مجموعه جزئيه من حقل الأعداد المركبه $\mathbb{C}$ نعرف الدالة المركبه f على D وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:

$$\exists z\in D \text{ tq } w=f(z)\in\mathbb{C}$$

مثال1. الدالة f معرفه على $\mathbb{C}-\{0\}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$: بحيث $w=f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ تسمى **دالة جوكوفسكي** وتملك خصائص عجيبه.

تعريف 2. نهاية الدالة f عند النقطة z_0 تكتب كما يلي :

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|z-z_0|\le\delta\Rightarrow|f(z)-w_0|\le\varepsilon$$

في الحقيقه أنه لما $z_0=x_0+iy_0$ و $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ وهذا لما $z=x+iy$ فانه لما $w_0=a_0+ib_0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a_0,\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b_0$$

مثال.2 الدالة f معرفه على $D\ \mathbb{C}-\{0\}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w=f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z}$ لا تملك نهايه عند $z_0=0$ بالفعل

$$\lim_{z=x+i.0\to0}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{z=x\to0}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{z=0+i.y\to0}\frac{\overline{z}}{z}=-\lim_{z=x\to0}\frac{iy}{iy}=-1$$

تعريف .3 الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 اذاوفقط :

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|z-z_0|\le\delta\Rightarrow|f(z)-f(z_0)|\le\varepsilon$$

مثال. 3 الدالة f معرفه على $\mathbb{C}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w=f(z)=\overline{z}$ مستمرة عند كل نقطة z_0 بالفعل.

$$\lim_{z\to z_0}\overline{z}=\overline{z_0}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|z-z_0|\le\delta\Rightarrow\left|\overline{z}-\overline{z_0}\right|=\left|\overline{z-z_0}\right|=|z-z_0|\le\delta=\varepsilon.$$

1.2 الدالة الهولومورفيه المركبة لمتغير مركب

تعريف .4 الدالة f اشتقاقيه عند النقطة z اذاوفقط :

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|\Delta z|\le\delta\Rightarrow\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|\le\varepsilon$$

نسمي كل دالة اشتقاقيه لمتغير مركب دالة هـــولومورفيه.

مثال. 4 الدالة f معرفه على $\mathbb{C}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w=f(z)=z^m$ هولومورفيه عند كل نقطة z بالفعل.

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{(z+\Delta z)^m-z^m}{\Delta z}=mz^{m-1}\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left(z^m\right)=mz^{m-1}$$

نظريه .1 الدالة $f=u+iv$ هولومورفيه عند النقطة $z=x+iy$ اذاوفقط اذا تحققت شروط **كـــــــوشي ريمان** :

$$\lim_{\Delta z=\Delta x+i\Delta y\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)\Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\wedge\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

في هذه الحالة :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

البرهـان :

$$\lim_{\Delta z=\Delta x\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

أيضا

$$\lim_{\Delta z=i\Delta y\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=-i\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}$$

$$=-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

ومنه نستخلص أن الدالة $f = u + iv$ هولومورفيه عند النقطة $z = x + iy$ اذا تحققت شروط **كـــــوشي ريمان** :وفي هذه الحالة

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

يمكن اثبات الاستلزام العكسي بسهولة أي أنه لما الدالة $f = u + iv$ تحقق عند النقطة $z = x + iy$ شروط **كـــــوشي ريمان** :

:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

فان الدالة $f = u + iv$ هولومورفيه عند النقطة $z = x + iy$.

بمعنى أن العلاقه (1) تستلزم ما يلي :

$$\lim_{\Delta z = \Delta x i \Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

يساوي بالضبط باستخدام نشور تايلر للرتبة 1.

$$\lim_{\Delta x + i\Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

هذا معناه

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

مثال. 5 الدالة f معرفه على $\mathbb{C}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w = f(z) = z^2$ هولومورفيه عند كل نقطة z بالفعل.

$$w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u(x,y) + iv(x,y)$$

ومنه

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$
$$v(x,y) = 2xy$$

تحققان شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$w = f(z) = z^2$ هولومورفيه عند كل نقطة z ثم ان :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x + i2y = 2z$$

مثال. 6 الدالة f معرفه على $\mathbb{C}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w = f(z) = \bar{z}^2$ ليست هولومورفيه عند كل نقطة z بالفعل.

$$w = f(z) = \bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy = u(x,y) + iv(x,y)$$

لنتحقق من شروط كوشي ريمان .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x\right) \neq \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -2x\right)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y\right) \neq \left(-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y\right)$$

مثال. 7 الدالة f معرفه على $\mathbb{C}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{C}$:بحيث $w = f(z) = \exp(z)$ هولومورفيه عند كل نقطة z بالفعل.

$$w = f(z) = \exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)\cos y + i\exp(x)\sin y = u(x,y) + iv(x,y)$$

لنتحقق من شروط كوشي ريمان .

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\exp(x)\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\exp(x)\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

هذا معناه لما $w=f(z)=\exp(z)$ فان :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\exp(x)(\cos y+i\sin y)=\exp(z)$$

نظريه 2. اذا كانت الدالة $f=u+iv$ هولومورفيه فان $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مترافقتان توافقيا وبالتالي f لابلاصيه اي تحقق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبالتالي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وأيضا :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0\quad\ldots..(5)$$

البرهان : الدالة $f=u+iv$ هولومورفيه فهي تحقق شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

لنعاود الاشتقاق مرة اخرى لطرفي المساواتين فان :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial y\partial x}(x,y)$$

وباستخدام توطئة **شوارز** فان **:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=0$$

وحيث أن :

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\Delta u+i\Delta v$$

عندئذ نستنتج أن :

$$\Delta f=0$$

يمكن اثبات صحة القانون (5) حسب شرطي كوشي ريمان دوما كما يلي :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

نظريه 3. اذا كانت الدالة $u(x,y)$ توافقيه فهي لابلاصيه على $D\subset\mathbb{C}$ اي تحقق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

عندئذ توجد دالة $v(x,y)$ مرافقة توافقيه لها (بمعنى يحققان شرطي كوشي ريمان) بحيث أن $f=u+iv$ دالة هولومورفية على $D\subset\mathbb{C}$.
بحيث أن :

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^x\frac{\partial u}{\partial y}(s,0)ds \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

البرهـان الدالة $u(x,y)$ توافقيه فهي تقبل مرافقه توافقيه لها $v(x,y)$ فهما يحققان شرطي كوشي ريمان :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

لنكامل الشرط الأول أعلاه بالنسبة لـ y فان :

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt+C(x)$$

باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسيه لـ x و استخدام الشرط الثاني لكوشي ريمان فان :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\int_0^y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dt+C'(x)$$

وبالتالي :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\int_0^y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)dt+C'(x)$$

ومنه بالمكامله بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)+C'(x)$$

أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)+C'(x)=0$$

بالمكامله فان :

$$C(x)=-\int_0^x\frac{\partial u}{\partial y}(s,0)ds$$

وعليه :

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^x\frac{\partial u}{\partial y}(s,0)ds$$

فالدستور (7) صحيح.

مثال. 8 لتكن الدالة $u(x,y)=2xy+chx\sin y$ نثبت أنها توافقيه ثم نوجد عبارة الدالة $v(x,y)$ المرافقه التوافقيه لها بحيث $f=u+iv$ هولومورفيه.
الحـل :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2y+shx\sin y,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=chx\sin y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=2x+chx\cos y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-chx\sin y$$
ومنه :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$
وبالتالي الدالة $u(x,y)=2xy+chx\sin y$ توافقيه. عندئذ توجد دالة $v(x,y)$ مرافقة توافقيه لها (بمعنى يحققان شرطي كوشي ريمان) بحيث أن $f=u+iv$ دالة هولومورفية على $D\subset\mathbb{C}$.بحيث أن :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
وعليه :
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=2y+shx\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-2x-chx\cos y$$
لنكامل الشرط الأول أعلاه بالنسبة لـ y فان :
$$v(x,y)=y^2-shx\cos y+C(x)$$
باشتقاق طرفي هذه المادلة بالنسيه لـ x و استخدام الشرط الثاني لكوشي ريمان فان :
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-chx\cos y+C'(x)=-2x-chx\cos y$$
ومنه :
$$C'(x)=-2x\Rightarrow C(x)=-x^2+c$$
وعليه :
$$v(x,y)=y^2-x^2+shx\cos y+c$$
بالنسبه لعبارة $f=u+iv$ فهي :
$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=2xy+chx\sin y+i\left(y^2-x^2+shx\cos y+c\right)$$
وحيث أن :
$$shz=sh(x+iy)=shxch(iy)+chxsh(iy)=shx\cos x+chx\sin y$$
وعليه :
$$f(z)=-i(x+iy)^2-ishz=-i\left(z^2+shz\right)+C$$
قضية 1. (**الاحداثيات القطبيه**)
$$z=x+iy=re^{i\theta}\Leftrightarrow x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

شروط كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

تكافؤ

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

ومنه :

$$zf'(z)=r\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

مثلا :

$$\ln z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+iarctg\left(\frac{y}{x}\right)=\ln re^{i\theta}=\ln r+i\theta$$

وهذا لما $z=x+iy$ فالشروط أعلاه محققة ببساطة بينما شروط كوشيريمان معقدة جدا بالإحداثيات الديكارتيه.

1.3 المؤثران التفاضليان : $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

يمكن تعريف المؤثرين التفاضليين المساعدين :

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)..............................(8)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)..................................(9)$$

وعليه : الدالة f هولومورفيه اذا وفقط :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0............................(11)$$

ومشتقتها تعطى بالقانون :

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)................................(12)$$

البرهان : بالفعل : $z=x+iy$ فان $\bar{z}=x-iy$ وبالتالي :

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right), y=\frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)$$

أي أن :

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

وعليه : الدالة f هولومورفيه اذا وفقط :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

ومشتقتها تعطى بالقانون :

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال. 9 لتكن الدالة $f(z)=\exp(z)$ نثبت أنهاهولومورفيه ثم نوجد عبارة الدالة المشتقه لها.

لدينا حسب القانون أعلاه :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \exp(x+iy)}{\partial x}+i\frac{\partial \exp(x+iy)}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\exp(x+iy)-\exp(x+iy)\right)=0$$

فهي اذا هولومورفيه. لنحسب مشتقتها حسب القانون الثاني أعلاه.

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \exp(x+iy)}{\partial x}-i\frac{\partial \exp(x+iy)}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\exp(z)+\exp(z)\right)=\exp(z).$$

باتباع نفس الخطوات نستطيع اثبات هولومورفية الدالة اللوغارتمية :

$$\frac{\partial \log(z)}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log(x+iy)}{\partial x}+i\frac{\partial \log(x+iy)}{\partial y}\right)=0$$

$$\log'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log(x+iy)}{\partial x}-i\frac{\partial \log(x+iy)}{\partial y}\right)=\frac{1}{z}$$

باتباع نفس الخطوات نستطيع اثبات هولومورفية الدالة المثلثيه :

$$\frac{\partial \sin z}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial x}+i\frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial y}\right)=\cos(z)-\cos(z)=0$$

$$\sin'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial x}-i\frac{\partial \sin(x+iy)}{\partial y}\right)=\cos(z)$$

$$\frac{\partial \cos z}{\partial \bar{z}}=0$$

$$\cos'(z)=\frac{\partial \cos z}{\partial z}=-\sin(z)$$

الدرس الثاني : التكاملات الدوال المركبه لمتغير مركب ودساتير كوشي

2.1.تعريف التكامل الطولي

Γ منحنى موجه في المستوي (z) نفرض أن المنحنى أملس أو أملس بتقطع بحيث Γ يقبل تمثيلا بيانيا $x=x(t)$ و $y=y(t)$ بحيث x و y دالتين مستمرتين اشتقاقيتين بحيث $a\le t\le b$ و $x'^2(t)+y'^2(t)>0$ لكل t من المجال $[a\ \ b]$.

لتكن $f(z)$ دالة مركبه مستمرة على Γ نقسم المنحنى Γ الى أقواس من النقط الصور M_1 ، M_2 ، .... M_{n-1} والتي لواحقها الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، .... z_{n-1} على الترتيب.و z_0 و z_n هما لاحقتي الصورتين A و B وليكن ξ_k نقطة كيفيه من القوس $M_{k-1}\,M_k$ بحيث $k=1,2,3....n-1$ لنشكل المجموع $\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})$ نهاية هذا المجموع لما $n\to\infty$ وبحيث قطر كل قوس يتناه الى الصفر عندئذ :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})$$

بمعنى :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\left|\int_{\Gamma} f(z)dz-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})\right|\le\varepsilon$$

بحيث طول أطول قوس من الأقواس $M_{k-1}\,M_k$ لا يتجاوز أو اقل تماما من δ.

في الحقيقه لما : $f=u+iv$ فان

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma}\left(u(x(t),y(t))dx-v(x(t),y(t))dy\right)+i\int_{\Gamma}\left(v(x(t),y(t))dx+u(x(t),y(t))dy\right)\text{.............}(13)$$

خاصية 1. لنفرض أن f محدودة على Γ بمعنى :

$$\forall z\in\Gamma,\exists m>0,|f(z)|\le m$$

عندئذ :

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leq mlenght(\Gamma)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

بحيث :

$$\int_{\Gamma}|dz| = \sum_{k=1}^{n}|z_k - z_{k-1}| = lenght(\Gamma)$$

وعليه:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leq \int_{\Gamma}|f(z)||dz|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

بحيث :

$$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$$

مثال. 1 لتكن الدالة $f(z) = 1 + i - 2\bar{z}$ والمنحنى القطعي Γ الواصل بين النقطتين $z_0 = 0$ و $z_1 = 1 + i$ ذو المعادلة الديكارتيه $y = x^2$.

لنحسب التكامل :

$$\int_{\Gamma}(1 + i - 2\bar{z})dz$$

حسب الدستور أعلاه فان :

$$\int_{\Gamma}(1 + i - 2\bar{z})dz = \int_{\Gamma}((1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy) + i\int_{\Gamma}((1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy)$$

لدينا من الواضح أن :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ و } y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$$

$$\int_{\Gamma}(1 + i - 2\bar{z})dz = \int_{0}^{1}((1 - 2x) - 2(1 + 2x^2)x)dx + i\int_{0}^{1}((1 + 2x^2) + (1 - 2x)x)dx$$

مما يستلزم أن :

$$\int_{\Gamma}(1 + i - 2\bar{z})dz = -2 + \frac{4}{3}i$$

نظرية.1 Γ منحنى موجه في المستوي (z) نفرض أن المنحنى أملس أو أملس بتقطع بحيث Γ يقبل تمثيلا بيانيا $x = x(t)$ و $y = y(t)$ بحيث x و y دالتين مستمرتين اشتقاقيتين بحيث $a \leq t \leq b$ و $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$ لكل t من المجال $[a \ \ b]$.

نضع $z(t) = x(t) + iy(t)$ فان :

$$\int_{\Gamma} f(w)dw = \int_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

مثال. 2 لتكن $C(z_0, r)$ الدائرة التي مركزها z_0 ونصف القطر r لنحسب طول محيطها.

$$C(z_0, r) = \{z, z \in C, |z - z_0| = r\}$$

نضع $z = z_0 + re^{it}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ فان ، $dz = ire^{it}dt$ ، $|dz| = re^{it}dt$

$$Lenght(C(z_0, r)) = \int_{C(z_0, r)}|dz| = \int_{0}^{2\pi} re^{it}dt = 2\pi r$$

مثال. 2 لتكن النقط $O(0,0), A(0,a), D(a,b), B(0,b)$ ، لنحسب التكاملين :

$$\int_{OA} z^2dz, \int_{AD} z^2dz$$

لنلاحظ ما يلي :

$$\int_{OA} z^2dz = \int_{OA}(x + iy)^2(dx + idy) = \int_{OA}((x^2 - y^2)dx - 2xydy) + i\int_{OA}(2xydx + (x^2 - y^2)dy)$$

على الكانتور OA :

$$0 \leq x \leq a \text{ و } y = 0 \Rightarrow dy = 0$$

ومنه :

$$\int_{OA} z^2 dz = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

على الكانتور AD :

$$0 \le y \le b \text{ و } x = a \Rightarrow dx = 0$$

ومنه نستخلص :

$$\int_{AD} z^2 dz = \int_{AD} (x+iy)^2 (dx + idy) = \int_{AD} \left(\left(x^2 - y^2 \right) dx - 2xydy \right) + i \int_{AD} \left(2xydx + \left(x^2 - y^2 \right) dy \right)$$

ومنه :

$$\int_{AD} z^2 dz = -\int_0^b 2aydy + i \int_0^b \left(a^2 - y^2 \right) dy = -ab^2 + i \left(a^2 b - \frac{b^3}{3} \right)$$

على نفس المنوال يمكن حساب بقية التكاملات الكانتورية :

$$\int_{OB} z^2 dz = -i \frac{b^3}{3}$$

$$\int_{BD} z^2 dz = \frac{a^3}{3} - ab^2 + iab^3$$

توطئة كوشي 1. لتكن $C(z_0, r)$ الدائرة التي مركزها z_0 ونصف القطر r فان :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \qquad (17)$$

البرهان : نضع $z = z_0 + re^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$ فان ، $dz = ire^{it} dt$ ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = 1$$

2.2 دساتير كوشـــي

تعريف 1 نسمي كانتور مغلق Γ المنحنى أثر $\gamma(t)$ بحيث $a \le t \le b$ و $\gamma(a) = \gamma(b)$. فمثلا $C(z_0, r)$ كانتور مغلق.

توطئة كوشي 2. لتكن Γ كانتور مغلق و f دالة معرفة ومستمرة على Γ فان :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \qquad (18)$$

نظرية.2 (دستور كوشي 1) $\Gamma(a)$ كانتور مغلق يشمل النقطة a و f دالة مستمرة على Γ فان :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) \qquad (19)$$

البرهان : لتكن $C(a, r)$ الدائرة التي مركزها a ونصف القطر r نضع $z = z_0 + re^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$ فان ، $dz = ire^{it} dt$ ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz + f(a) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(a)} \frac{dz}{z - a}$$

باستخدام توطئة كوشي فان :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz + f(a)$$

لنثبت أن التكامل على $C(a, r)$ يؤول الى الصفر لما $r \to 0$. لنضع $z = a + re^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$ فان :

$$dz = ire^{it} dt \text{ ،} |z - a| = r$$

ومنه ::

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|\leq\frac{\max\limits_{z\in C(a,r)}\left|f(z)-f(a)\right|}{r}.2\pi r\underset{r\to 0}{\to}0$$

بالفعل : $r\to 0$ فان $f(z)\to f(a)$. وهو المطلوب اثباته.بالسبة للحيز المحصور خارج $C(a,r)$ وداخل $\Gamma(a)$ فالدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ هولومورفية معرفه جيدا فتكاملها على كانتور مغلق معدوم.

نظرية.3 (دستور كوشي 2) $\Gamma(a)$ كانتور مغلق يشمل النقطة a و f دالة مستمرة على Γ فان :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz=f'(a)\text{..........................}(20)$$

ثم ان :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\text{....................................}(21)$$

لكل $n=0,1,2,3....$.

البرهان : لنثبت صحة الدستور (19).

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz=\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{z-a}dz\right)=\frac{df}{dz}(a)=f'(a)$$

طريقة ثانيه :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)$$

و

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{z-a-\Delta a}dz=f(a+\Delta a)$$

ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\left(\frac{f(z)}{z-a-\Delta a}-\frac{f(z)}{z-a}\right)dz=f(a+\Delta a)-f(a)$$

وبالتالي :

$$\frac{\Delta a}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a-\Delta a)(z-a)}dz=\frac{f(a+\Delta a)-f(a)}{\Delta a}\underset{\Delta a\to 0}{\to}f'(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

مما يثبت صحة الدستور (20).

لنثبت صحة الدستور (21) بالتراجع .الدستور صحيح من أجل $n=0,1$. نفرض صحة الدستور من اجل n ونبرهن صحته من أجل $n+1$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{d}{nda}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n}}dz\right)=\frac{d^{n-1}f}{n(n-1)!dz^{n-1}}(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

مثال. 3 نطبق دساتير كوشي لحساب التكاملات الكانتورية :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-i|=2}\frac{\exp(iz^2)}{(z-i)^2}dz=\left(\exp(iz^2)\right)'_{z=i}=\left(2iz\exp(iz^2)\right)_{z=i}=-2\exp(-i).$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-i|=1}\frac{z^4+1}{(z-i)^3}dz=\left(z^4+1\right)^{//}_{z=i}=12i^3=-12i.$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-i|=3}\frac{\exp(z)}{(z+1)^2(z-i)^3}dz=\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\exp(z)}{(z+1)^2}\right)_{z=i}+\frac{d}{dz}\left(\frac{\exp(z)}{(z-i)^2}\right)_{z=-1}.$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-1|=3}\frac{z^4+1}{(z-i)(z+1)^2}dz=\left(\frac{z^4+1}{(z+1)^2}\right)_{z=i}+\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+1}{z-i}\right)_{z=-1}$$

الدرس الثالث : خاصية القيم المتوسطه ومبدأ القيمة العظمى ومتباينات كوشي

نتيجة 1. (خاصية القيمة المتوسطه) لتكن $C(z_0,r)$ الدائرة التي مركزها z_0 ونصف القطر r فان :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt=f(z_0)\quad(22)$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)dt=f(0)\quad(23)$$

ونكتب أيضا :

$$\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt=f(z_0)\quad(24)$$

تسمى بخاصية الـ **PVM**.

البرهان : لدينا حسب احدى دساتير كوشي

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$$

لنضع $z=z_0+re^{it}$ ، $0\le t\le 2\pi$ فان : $dz=ire^{it}dt$ مما يستلزم :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dy=f(z_0)$$

من السهل استنباط الدستور (23) بوضع $z_0=0$ في القانون (22).

نظرية 4. (مبدأ القيمة العظمى)

لتكن الدالة f الهولومورفيه على القرص المفتوح $D(0,R)=\{z:|z|<R\}$ ولنضع :

$$m(r)=\max_{|z|\le r}|f(z)|\quad(25)$$

بحيث $0<r\le R$. فان :

$$m(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|\quad(26)$$

البرهان : من الملاحظ أن $m(r)$ دالة معرفة وموجبه لما $r>0$ و متزايدة بالفعل :

$$r_1\le r_2\Rightarrow m(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|=m(r_2)$$

والعكس أيضا خاج القرص المفتوح.

$$M(r)=\max_{|z|\ge r}|f(z)|$$

دالة معرفة وموجبه لما $r>0$ و متناقصة.

حسب خاصية الـ PVM لدينا :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|dt\ge|f(z_0)|.\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{|f(z_0)|-\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|\right\}dt\le 0$$

بالفعل لأن :

$$|f(z_0)|.=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|dt\le 0$$

لنفرض القيمة العظمى (خارج القرص المحدد) كما يلي :

$$\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|\le|f(z_0)|.................(27)$$

من أجل $t_1\le t\le t_2$ بحكم f مستمرة فالمتراجحة (27) تبقى سائدة في هذه الحالة القيمة المتوسطة لـ $\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|$ أصغلر من $|f(z_0)|$ وهذا تناقض.

نظرية هامة جدا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{f(\lambda)}{\varepsilon}$$

وأيضا :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{i^n\varepsilon^{n-1}}{n!}f^{(n)}(\lambda)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f\left(i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{f(0)}{\varepsilon}$$

وأيضا :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f\left(i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{i^n\varepsilon^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0)$$

البرهان : من الطبيعي تصور $|z|=1$ وبالتالي لما θ تمسح المجال $[0\quad 2\pi[$ فان $z=i\varepsilon e^{i\theta}$ تمسح الدائرة الوحدة $C(0,1)=\{z,|z|=1\}$.

ومنه :

$$z=i\varepsilon e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=-\frac{dz}{\varepsilon.z}$$

ومنه حسب دساتير كوشي :

$$\int_0^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{|z|=1}\frac{f(\lambda+z)}{z}dz=-\frac{2i\pi}{\varepsilon}f(\lambda)$$

وكذلك

$$\int_0^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{i^n\varepsilon^n}{\varepsilon}\int_{|z|=1}\frac{f(\lambda+z)}{z^{n+1}}dz=-\frac{2i\pi}{n!}\frac{i^n\varepsilon^n}{\varepsilon}f^{(n)}(\lambda)$$

مثال 13. لنحسب التكاملان الجيبيان :

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+2(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$$

نتيجـة 2. لتكن الدالة f الهولومورفيه على القرص المفتوح $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ بحيث :

1) $|z|<1\Rightarrow|f|z||<1$ أو $f(D(0,1))\subset D(0,1)$

$f(0)=0$ (2
فان :
$$|f(z)|\le|z|...............................(28)$$
لكل $z\in D(0,1)$. تتحقق المساواة في حالة : $f(z)=kz$ بحيث $|k|=1$.

البرهان : الخاصية $f(0)=0$ يستلزم أن $\frac{f(z)}{z}$ هولومورفية على $D(0,1)=\{z:|z|<1\}$ وتحقق أيضا المحدودية :
$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<1$$
لكل z بحيث $]z[=\rho\le 1$ وعليه :
$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1}{\rho}$$
بمكننا جعل $\rho\to 1$.
ومنه حسب مبدأ القيمة العظمى فان :
$$\max_{|z|\le 1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|<1$$
وهذا يستلزم المتراجحه (28).

مثال .4. f هولومورفيـــة على القرص المملوء **:** $D(0,r)=\{z,|z|\le r\}$ وتحقق :
$$|f(z)|\le\frac{M}{|y|}$$
من أجل كل عدد مركب $z=x+iy$ يحقق $|z|=R$.(يقع على الحافة). أثبت صحــة المتباينـــة :
$$|z^2-R^2||f(z)|\le 2MR$$
وهذا لكل z يحقق $|z|\le R$.ثم استنتـج المحدوديـــة :
$$|f(z)|\le\frac{8M}{3R}.......................(29)$$
لكل z يحقق $|z|\le R$.

الحـل : سنقترح الدالة المساعده : $g(z)=(z^2-R^2)f(z)$.ليكن .. $m(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ ، لنلاحظ أن :
$$|z^2-R^2|=|z-R||z+R|$$
لنضع $z=\mathrm{Re}^{i\theta}$ فان : $|z^2-R^2|=R^2|e^{2i\theta}-1|=2R^2|\sin\theta|$ وبما أن : $|y|\ge|x+iy|=|z|\ge R$ ومنه :
$$\sup_{|z|=r}|g(z)|.=2R^2.m(r)\Rightarrow|z^2-R^2||f(z)|\le 2MR$$

نتيجه .3 (متباينة كوشي). لتكن D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق ∂D بحيث :
$$M=\max_{z\in\partial D}|f(z)|...................................(30)$$
و
$$L=\int_{\partial D}|d\xi|...(31)$$
ايضا
$$d_{\min}(z)=\max_{\xi\in\partial D}|\xi-z|................................(31)$$
عندئذ :
$$|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{ML}{d_{\min}^{n+1}(z)}.............................(32)$$
لكل z من D . ولكل $n=0,1,2,3....$.كحالتين خاصتين هامتين :

$$|f(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{ML}{d_{\min}(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

$$|f'(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{ML}{d_{\min}^{2}(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

لكل z من D.

البرهان : نطبق دستور كوشي (21) الحالة العامة على كانتور. $\forall z \in D$ لدينا

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dz$$

مما يستلزم :

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{|f(t)|}{|t-z|^{n+1}}|dz| \le \frac{Mn!}{2\pi d_{\min}^{n+1}(z)}\int_{\partial D}|dz| = \frac{MLn!}{2\pi d_{\min}^{n+1}(z)}$$

مما يثبت صحة الدستور (32).ومن ثم الدستورين (33) ، (34) صحيحين.

نتيجه 4. (متباينة كوشي على القرص المفتوح).

لتكن $D(z_0,R)$ المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق الدائرة $C(z_0,R)$ بحيث الدالة f معرفة ومستمرة على D بحيث :

$$M = \max_{z\in\partial D}|f(z)| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

و

ايضا

$$R = d_{\min}(z_0) = \max_{\xi\in C(z_0,R)}|\xi - z_0| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

عندئذ :

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{Mn!}{R^{n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

لكل z من D. ولكل $n = 0,1,2,3....$.كحالتين خاصتين هامتين :

$$|f(z)| \le \frac{M}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

البرهان : بالفعل

$$R = d_{\min}(z) = \max_{z\in C(z_0,R)}|\xi - z|.$$

وأيضا :

$$L = \int_{C(z_0,R)}|d\xi| = 2\pi R$$

ثم نطبق الدساتير (32) ، (33)، (34) السابقه.

نظرية 5. (نظرية ليوفيل)

لتكن $D(z_0,R)$ المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق الدائرة $C(z_0,R)$ بحيث الدالة f هولومورفيه على D بحيث :

لكل z من $C(z_0,R)$. :

$$|f(z)| \le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

عندئذ f ثابته.

البرهان :

نطبق الخاصيه (39) لدينا : $|f'(z)| \le \frac{M}{R^2}$ ثم نجعل $R \to \infty$ فان $|f'(z)| \le \frac{M}{R^2} \to 0$ ومنه $|f'(z)| = 0$ أي أن $f' = 0$.

مثال 5. لنثبت أن

$$\left|\int_C \frac{dz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right| \le \frac{9\pi}{16}$$

C القوس من الدائرة $|z|=3$ الرابط بين النقطتين $z=3$ و $z=3i$.

الحل :

$$\left|\bar{z}^2+\bar{z}+1\right| \ge |\bar{z}|^2-|\bar{z}|-1=9-3-1=5$$

ومنه

$$\left|\int_C \frac{dz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right| \le \frac{1}{5}\int_C |dz| = \frac{6\pi}{4}\frac{1}{5}=\frac{9\pi}{16}$$

الدرس الرابع : دساتير قرين وتطبيقاتها في حساب التكاملات المركبه

نظرية.6 (دستور قرين) في الحقيقه أن دستور **قرين** معروف يشكله التالي : لتكن D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق الدائرة C بحيث الدالة $f=p+iq$ هولومورفيه على D فان :

$$\oint_C p(x,y)dx+q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$$

التكامل الأول كانتوري بينما التكامل الثاني مساحي.

تطبيق.1 القرص الذي نصف قطر R. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le R^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=R^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x=rcos\theta, y=rsin\theta$$
$$dx=-rsin\theta d\theta, dy=rcos\theta d\theta$$
$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le R$$

$$\oint_C 2ydx+3xdy=\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^R rdrd\theta=2\pi\frac{R^2}{2}=\pi R^2$$

نظرية.7 (نظرية قرين)

القرص الذي نصف قطر R. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le R^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=R^2\}$ بحيث الدالة $f=p+iq$ هولومورفيه على D فان

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx-\frac{\partial q}{\partial x}dy\right)==-\iint_D p(x,y)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy$$

البرهان : من الواضح :

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx-\frac{\partial q}{\partial x}dy\right)=\oint_C p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}dx-p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}dy$$

ثم نطبق دستور قرين الأول. نتحصل على :

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}\right)-\frac{\partial q}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}$$

تطبيق نموذجي.2

القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=r^2\}$

لنحسب قيمة التكامل المضاعف : $\iint_D (4x^3-2xy)\,dxdy$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x=rcos\theta, y=rsin\theta$$
$$dx=-rsin\theta d\theta, dy=rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

بتطبيق دستور قرين

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

فان

$$\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C xy^2dx + x^4dy = -r^4 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3\theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$$

يمكن للقارئ التفرغ الآن لاتمام الحساب .

تطبيق نموذجي.3

القطع الناقص المملوء. $D = \{(x,y): 0 \le 9x^2 + 8y^2 \le 72\}$ الذي حافته القطع الناقص: $C = \{(x,y): 9x^2 + 8y^2 = 72\}$

لنحسب قيمة التكامل المضاعف : $\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = 2\sqrt{2}cos\theta, y = 3sin\theta$$
$$dx = -2\sqrt{2}d\theta, dy = 3cos\theta d\theta$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$

بتطبيق دستور قرين

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

فان

$$\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C xy^2dx + x^4dy = -72 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3\theta d\theta + 3\langle 2\sqrt{2}\rangle^4 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$$

ثم نكمل حساب التكاملات.

نظرية.8 (نظرية قرين نسخة مركبة)

لتكن D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق الدائرة C بحيث الدالة $B(z,\bar{z})$ مستمرة وتقبل مشتقات جزئية على D بحيث :
لكل $z = x + iy$ من C. :

$$\oint_C B(z,\bar{z})dz = 2i \iint_D \frac{\partial B(z,\bar{z})}{\partial \bar{z})} dxdy$$

البرهان نتذكر أن :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ ، } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

نضع $B(z,\bar{z}) = p(x,y) + iq(x,y)$ فان

$$\oint_C B(z,\bar{z})dz = \oint_C (p(x,y) + iq(x,y))(dx + idy) =$$

$$\oint_C p(x,y)dx - q(x,y)dy + i\int_C q(x,y)dx + p(x,y)dy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= i \iint_D \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

$$= \boldsymbol{2i} \iint_D \frac{\partial B(z, \overline{z})}{\partial \overline{z})} dxdy$$

2. توطئة كوشي

1. $f = p + iq$ *هولومورفية عندئذ* :

$$\frac{\partial\left(i\left(f(z)\right)\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(f(z)\right)}{\partial y} = 0$$

2.لتكن D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق الدائرة C بحيث f هولومورفيه على D :

$$\int_C f(z) dz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

البرهان : نطبق شروط **كوشي ريمان**

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

نستنتج :

$$\frac{\partial\left(i\left(f(z)\right)\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(i(p + iq)\right)}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial p}{\partial x}$$

على نفس المنوال

$$\frac{\partial\left(f(z)\right)}{\partial y} = \frac{\partial(p + iq)}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial y}$$

ومنه :

$$\frac{\partial\left(i\left(f(z)\right)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(f(z)\right)}{\partial y} = 0$$

وبالتالي :

$$\int_C f(z)(dx + idy) = \int_C f(z)dx + if(z)dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial\left(i\left(f(z)\right)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(f(z)\right)}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

وهوالمطلوب اثباته.

تطبيق .4 (المساحة)

D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق C بحيث الدالة $B(z, \overline{z})$ مستمرة وتقبل مشتقات جزئية على D بحيث :

$Area\ (D)$. :يرمز لمساحة D

$$\iint_D dx\, dy = Area\ (D) = \frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz$$

البرهان : لدينا

$$\text{ó}Area\,(D) = \iint_D dx\,dy$$

من جهة ثانية :

$$\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz = \frac{1}{2i}\int_C (x-iy)(dx+idy) = \frac{1}{2i}\int_C xdx+ydy + \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

$$= \iint_D dx\,dy = Area(D)$$

على سبيل المثال $C(0,r)=\{(x,y): x^2+y^2=r^2\}$ مساحتها تساوي πr^2 وحدة مربعه وعليه :

$$\frac{1}{2i}\int_{C(0,r)} \bar{z}dz = \pi r^2$$

الدرس الخامس : مبدأ العمدة ونظريات روشي

نظرية 9. (مبدأ العمدة)

D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق C لنفرض أن f هولومورفية على D باستثناء $z=\alpha$ الذي هو قطب لـ f للرتبه p وأن $z=\beta$ هو صفر لـ f للرتبة n عندئذ :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n-p............................(42)$$

تسمى أيضا نظرية **روشي** .

البرهان : نقترح الكانتورين المنفصلين C_1 و C_2 داخل C واللذان يشملان القطب $z=\alpha$ والصفر $z=\beta$ على الترتيب ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وحيث أن :

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$$

على C_1

وأيضا :

$$f(z) = G(z)(z-\beta)^n$$

على C_2

بحيث F وG دالتان هولومورفيتان معرفتان فان :

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} = \frac{F'}{F} - \frac{p}{z-\alpha}$$

وايضا :

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} = \frac{G'}{G} + \frac{n}{z-\beta}$$

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F'(z)}{F(z)}dz-\frac{p}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{dz}{z-\alpha}=0-p$$

وكذلك :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{G'(z)}{G(z)}dz+\frac{n}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{dz}{z-\beta}=0+n$$

الخلاصة أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n-p$$

تطبيق.5 القرص الذي نصف قطره 5. $D=\{(x,y):0\le(x-1)^2+(y+2)^2\le 25\}$ الذي حافته الدائرة :
$C=\{(x,y):0\le(x-1)^2+(y+2)^2=25\}$ نقترح القطب $z=i$ والصفر $z=2$ على الترتيب فهما ينتميان الى داخل C

ومنه : لما $f(z)=\frac{(z-2)^5}{(z-i)^3}\exp(z)$ فان :

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=(5-3)2i\pi=4i\pi$$

نظرية .10 (نظرية روشي الحالة العامة)

D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق C لنفرض أن f هولومورفية على D باستثناء $z=\alpha_i$ اللتي هو اقطاب لـ f للرتب p_i بحيث $i=1,2,3....j$ على الترتيب وأن $z=\beta_i$ هي أصفار لـ f للرتب n_i بحيث $i=1,2,3....k$ فانه لما $P=\sum_{i=1}^{j}p_i$ و $N=\sum_{i=1}^{k}n_i$ عندئذ :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P............................(43)$$

البرهان: نقترح الكانتورات المنفصله C_i و D_i داخل C والتي تشمل الاقطاب $z=\alpha_i$ والأصفار $z=\beta_i$ على الترتيب

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{D_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j}\int_{C_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وحيث أن :

$$f(z)=\prod_{i=1}^{j}\frac{F_i(z)}{(z-\alpha_i)^{p_i}}$$

وأيضا :

$$f(z)=\prod_{i=1}^{k}G_i(z)(z-\beta_i)^{n_i}$$

بحيث F و G دالتان هولومورفيتان معرفتان فان :

$$(\log f)'=\frac{f'}{f}=\sum_{i=1}^{j}\frac{F_i'}{F_i}-\sum_{i=1}^{j}\frac{p_i}{z-\alpha_i}$$

وايضا :

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{k} \frac{G_i'}{G_i} + \sum_{i1}^{k} \frac{n_i}{z-\beta_i}$$

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_i}\frac{F_i'(z)}{F_i(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j} p_i \int_{C_i}\frac{dz}{z-\alpha_i} = 0 - \sum_{i=1}^{jj} p_i = -P$$

وكذلك :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i1}^{k}\int_{C_i}\frac{G_i'(z)}{G_i(z)}dz + \frac{n}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_1}\frac{dz}{z-\beta_i} = 0 + \sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

الخلاصة أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j}\int_{C_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

تطبيق.6 القرص الذي نصف قطره 5. $D = \{(x,y): 0 \le (x-1)^2 + (y+2)^2 \le 25\}$ الذي حافته الدائرة :
$C = \{(x,y): 0 \le (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25\}$ نقترح القطبين $z = \pm i$ والأصفار $z = \pm 2$ على الترتيب فهما ينتميان الى داخل C

ومنه : لما $f(z) = \frac{(z^2-4)^5}{(z^2+1)^3}\exp(z)$ ولما $f(z) = \frac{(z^2-4)^3}{(z^2+1)^2}\exp(z)$ فان :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (10-6)2i\pi = 8i\pi$$

أيضا :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (6-4)2i\pi = 4i\pi$$

نظرية .11 (نظرية روشي 3)

D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق C لنفرض أن g هولومورفية على D لنفرض أن f هولومورفية على D باستثناء $z = \alpha_i$ اللتي هو اقطاب لـ f للرتب p_i بحيث $i = 1,2,3....j$ على الترتيب وأن $z = \beta_i$ هي أصفار لـ f للرتب n_i بحيث $i = 1,2,3....k$ فانه لما $P = \sum_{i=1}^{j} p_i$ و $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ عندئذ :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k} n_i g(\beta_i) - \sum_{i=1}^{j} p_i g(\alpha_i) \qquad (44)$$

البرهان : نقترح الكانتورات المنفصله C_i و D_i داخل C والتي تشمل الاقطاب $z = \alpha_i$ والأصفار $z = \beta_i$ على الترتيب

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{D_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j}\int_{C_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وحيث أن :

$$f(z) = \prod_{i=1}^{j}\frac{F_i(z)}{(z-\alpha_i)^{p_i}}$$

وأيضا :

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} G_i(z)(z-\beta_i)^{n_i}$$

بحيث F و G دالتان هولومورفيتان معرفتان فان :

$$\left(\log f\right)' = \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{j} \frac{F_i^{/}}{F_i} - \sum_{i=1}^{j} \frac{p_i}{z-\alpha_i}$$

وايضا :

$$\left(\log f\right)' = \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{k} \frac{G_i'}{G_i} + \sum_{i1}^{k} \frac{n_i}{z-\beta_i}$$

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_i} g(z)\frac{F_i'(z)}{F_i(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j} p_i \int_{C_i}\frac{g(z)}{z-\alpha_i}dz = 0 - \sum_{i=1}^{j} p_i g(\alpha_i)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i1}^{k}\int_{C_i} g(z)\frac{G_i'(z)}{G_i(z)}dz + \frac{n}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_1}\frac{g(z)}{z-\beta_i}dz = 0 + \sum_{i=1}^{k} n_i g(\beta_i)$$

الخلاصة أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{j}\int_{C_i} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{C_i} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k} n_i g(\beta_i) - \sum_{i=1}^{j} p_i g(\varepsilon_i)$$

تطبيق.7. D مترابط ببساطه الذي حافته الكانتور المغلق C لما $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ كثير حدود له n جذر بسيط و 0 قطب نتذكر مجموع الجذور يساوي $-\frac{a_1}{a_0}$ فان :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} \beta_k = -\frac{a_1}{a_0}$$

وأيضا :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} z^2\,\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} \beta_k^2 = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2}$$

في حالة : $f(z) = 2z^3 + z^2 + z - 1$ ، فان

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} z^2\,\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{5}{4}$$

نظرية .12 (نظرية روشي 4)

D المترابط ببساطة والذي حافته الكانتور المغلق C هو اتحاد عدد منته من الأقواس للصف C^1 لنفرض أن f و g هولومورفيان على D بحيث $\forall z \in C$:

$$|f(z)| > |g(z)| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

فان :

$$Z(f+g, C) = Z(f, C) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

للاشارة أن $Z(f)$ المقصود بها عدد أصفار f على D.

البرهان : لدينا $\forall z \in C$:

$$|f(z)| > |g(z)| \Rightarrow 1+\frac{g}{f} \neq 0$$

وعليه :

$$Z(f+g,C)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{1+\frac{g'(z)}{f'(z)}}{1+\frac{g(z)}{f(z)}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=Z(f,C)$$

لأن الدالة $z \to \dfrac{1+\frac{g'(z)}{f'(z)}}{1+\frac{g(z)}{f(z)}}$ هولومورفيه ومعرفة بمعنى تكاملها على الكانتور المغلق C معدوم.

تطبيق.8 القرص الذي نصف قطره 2. $D=\{|z|<2\}$ الذي حافته الدائرة : $C(0,2)=\{|z|=2\}$ نقترح المعادلة :

$$\chi(z)=z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

نقترح : $f(z)=z^5$ و $g(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$ ، من الواضح أن $\forall z \in C(0,2)$:

$$|f(z)|=|z|^5=2^5=32>31=|2|^4+|2|^3+|z|^2+|2|+1\geq |g(z)|$$

ومنه حسب نظرية روشي 4 :

$$Z(f+g,C(0,2))=Z(f,C(0,2))$$

وبما أن $f(z)=z^5$ له 0 كجذر مكرر 5 مرات .مما يكافؤ :

$$Z(\chi(z),C(0,2))=5.$$

تطبيق.9 القرص لذي نصف قطره 2. $D(0,r)=\{|z|<r\}$ الذي حافته الدائرة : $C(0,r)=\{|z|=r\}$ نقترح المعادلة :

$$z^7-5z^3+12=0$$

أثبت أن جذور المعادلة لا تنتمي الى الدائرة $\{C(0,1)=\{|z|=1\}$ وتنتمي الى الدائرة $\{C(0,2)=\{|z|=2\}$

على الدائرة : $C(0,1)=\{|z|=1\}$

نقترح : $g(z)=z^7-5z^3$ و $f(z)=12$ ، من الواضح أن:

$$|f(z)|=12>6\geq |1|^7+5|1|^3\geq |g(z)|$$

ومنه حسب نظرية روشي 4 :

$$Z(f+g,C(0,1))=Z(f,C(0,1))=0$$

على الدائرة : $C(0,2)=\{|z|=2\}$

نقترح : $g(z)=12-5z^3$ و $f(z)=z^7$ ، من الواضح أن:

$$|f(z)|=|2|^7=128>52\geq 5|2|^3+12\geq |g(z)|$$

ومنه حسب نظرية روشي 4 :

$$Z(f+g,C(0,2))=Z(f,C(0,2))=7$$

الدرس السادس : نشور تايلر ونشور لوران ونظرية الرواسب وتطبيقاتها

6.1 تعريف.1 f دالة معرفة وتحليلية (هولومورفيه) عند النقطة $z=z_0$ أي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $z=z_0$ من الشكل :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n ....(47)$$

بحيث $C(z_0,r)=\{|z-z_0|=r\}$ و

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} ....(48)$$

. $n=0,1,2,3........$

مثال .1 نعتبر الدالة $f(w)=\frac{1}{1-w}$ تحليلية فهي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $w=0$ السلسلة الهندسية

$$f(w)=\frac{1}{1-w}=1+w+w^2+...w^n+....$$

بحيث $|w|<1$. ومنه $f'(w)=\frac{1}{(1-w)^2}$ تحليلية فهي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $w=0$.بالفعل

$$f'(w)=\frac{1}{(1-w)^2}=1+2w+3w^2+...nw^{n-1}+....$$

مثال .2 نعتبر الدالة $f(z)=\frac{1}{2z-1}$ تحليلية فهي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $z=1$ السلسلة

$$f(z)=\frac{1}{1+2(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n(z-1)^n$$

بحيث $|z-1|<1$. ومنه $f'(z)=\frac{1}{(2z-1)^2}$ تحليلية فهي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $z=1$.بالفعل

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n2^{-1+n}(z-1)^n$$

بحيث $|z-1|<1$.

لنغير الوضعية كالآتي :

$$f(z)=\frac{1}{2(z-1)}\frac{1}{1+\frac{1}{2(z-1)}}=\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{-n}(z-1)^{-n}$$

$$f(z)=\frac{1}{2(z-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^{-1-n}(z-1)^{-n-1}$$

بحيث $|z-1|>2$.(من الواضح أن $z=1$ هي قطب للدالة $f(z)=\frac{1}{2z-1}$ بحيث $|z-1|>2$.فهي غير تحليلية.

6.2 الجذور والأقطاب وتصنيفاتها

تعريف.2 $z=z_0$ جذر للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$ اذا وفقط :

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ f''(z_0)=0\ .....\ f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

وها يتحقق فقط لما :

$$f(z)=(z-z_0)^m F(z)................................(49)$$

بحيث $F(z)$ تحليليه ومعرفة وتحقق $F(z_0)\neq 0$.

مثال .3 نعتبر الدالة $f(z)=z(z^2+1)^3$ تقبل الأعداد $z=0$ ، $z=i$ ، $z=-i$ كجذور للرتب 1، 3,3 على الترتيب.

تعريف.3. $w=w_0$ قطب جذر للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$ اذا وفقط :

$$f(z)=(z-w_0)^{-m}G(z)..................................(50)$$

بحيث $G(z)$ تحليليه ومعرفة وتحقق

$$G(w_0)\neq 0,\ G'(w_0)\neq 0,\ G''(w_0)\neq 0\ \ldots\ldots\ G^{(m-1)}(w_0)\neq 0,\ G^{(m)}(w_0)\neq 0$$

نظرية أساسية .1

$w=w_0$قطب للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$ اذا وفقط :

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-w_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-w_0)^{m-1}}+\ldots..\frac{c_{-1}}{(z-w_0)^1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-w_0)^n\ldots\ldots\ldots\ldots(51)$$

بحيث $c_{-m}\neq 0$.

بمعنى $w=w_0$قطب جذر للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$ اذا وفقط اذا كان نشر لوران (كسلسلة قوى لـ : $z-w_0$ سالبة) تملك عدد محدود من الحدود ذات الأس السالب.

مثال .4 نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^7}$ تقبل $z=0$ كقطب للرتبة 5. بالفعل :

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots.\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\ldots..$$

وبالتالي :

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}=\frac{1}{2}\frac{1}{z^5}-\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6!}\frac{1}{z}-\frac{1}{8!}z+\frac{1}{10!}z^3\ldots\ldots\ldots\ldots$$

نظرية اساسية .3 (نشور تايلر على المترابط بتكرارية)

المترابط بتكرارية D ذو الحافتين الكانتورين المغلقين C_1 و C_2 (مثلا $p<|z-a|<r$ مترابط بتكرارية ذو الحافتين الدائرتين : $|z-a|=p$ و $|z-a|=r$.

الدالة f تحليلية ومحدودة على المترابط بتكرارية D ذو الحافتين الكانتورين المغلقين C_1 و C_2 نشورة وفق سلسلة تايلر :

$$f(z)=\ldots\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots..\frac{c_{-1}}{(z-a)^1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

بحيث أن :

$$c_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,\ n=0,1,2\ldots.$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw,\ n=0,1,2\ldots.$$

البرهان :

توطئة : $q\neq 1$ فان :

$$1+q+q^2+\ldots q^{m-1}=\frac{1-q^m}{1-q}\Leftrightarrow\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots q^{m-1}+\frac{q^m}{1-q}$$

دستور كوشي على المترابط بتكرارية :

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(53)$$

بالنسبة للحافة الخارجية الكانتور المغلق $C_1=C(0,r_1)$:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)\left(1-\dfrac{z-a}{w-a}\right)}=\frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{n-1}\frac{(z-a)^k}{(w-a)^k}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{w-z}$$

وعليه :

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\right)(z-a)^k+\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw$$

لنثبت أن :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

بالفعل : نضع $1<\left|\frac{z-a}{w-a}\right|=\gamma$.لما $w\in C_1$ فان :

$$|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\geq|w-a|-|z-a|=r_1-|z-a|$$

وحيث أن :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},k=0,1,2....n$$

وعليه حسب ميباينة كوشي :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n}{r_1-|z-a|}2\pi r_1\underset{z\in c}{Max}|f(z)|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

بالنسبة للحافة الداخليه الكانتور المغلق $C_2=C(0,r_2)$:

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}=\sum_{n=0}^{n-1}\frac{(w-a)^k}{(z-a)^{k+1}}+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{z-w}$$

ومنه التكامل الثاني أعلاه يساوي :

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}f(w)dw}{z-a}+\frac{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}(w-a)f(w)dw}{(z-a)^2}+.....\frac{\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}(w-a)^{n-1}f(w)dw}{(z-a)^n}+W_n$$

بحيث أن

$$|W_n|=\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{c_2}\frac{f(w)}{z-w}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n dw\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

بالفعل :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw\right|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n}{r_1-|z-a|}2\pi r_2\underset{z\in c}{Max}|f(z)|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

ومنه يمكن نشر الدالة f بسلسة قوى تحت الشروط أعلاه :

$$f(z)=.......+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+.....\frac{c_{-1}}{(z-a)^1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

بحيث أن :

$$c_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,n=0,1,2....$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw,n=0,1,2....$$

مثال 5. نعتبر الدالة $f(z)=\frac{\exp(2z)}{(z-1)^3}$ تحليلية فهي نشورة وفق سلسلة تايلر في جوار $z=1$. المتغير المساعد $u=z-1$ يؤول الى الصفر لما $z\to 1$ وعليه :

$$f(z)=\frac{\exp(2z)}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{u^3}\exp(2u)=\frac{e^2}{u^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n u^n}{n!}$$

ومنه :

$$f(z)=\frac{\exp(2z)}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+.....$$

ومنه $z=1$ هي قطب للرتبة 3 للدالة $f(z)=\frac{\exp(2z)}{(z-1)^3}$.

6.4 حساب الرواسب عند الأقطاب

فكرة الراسب بسيطة جدا يمكن استنباطها من الدراسة الاتيه $z=z_0$ قطب للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$ اذا وفقط :

$$f(z)=\frac{F(z)}{(z-z_0)^m}..................(54)$$

بحيث $F(z)$ تحليليه ومعرفة وتحقق $F(z_0)\neq 0$.على كانتور C مغلق يشمل $z=z_0$ يمكن تطبيق احدى دساتير كوشي :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{F(z)}{(z-z_0)^m}dz=\frac{F^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}..................(55)$$

وهو يسمى الراسب $f(z)$ عند القطب $z=z_0$ وعليه لما $z=z_0$ قطب للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)dz=\operatorname{Re}s(f,z_0)$$

بحيث أن :

$$\operatorname{Re}s(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]..................(56)$$

نظرية أساسيه.4 (الرواسب)

$z=z_0$قطب قطب للرتبة m للدالة التحليلية $f(z)$:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+.....\frac{c_{-1}}{(z-z_0)^1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n............................(57)$$

فانه لما الكانتور C المغلق يشمل $z=z_0$:

$$\operatorname{Re}s(f,z_0)=c_{-1}..(58)$$

البرهان :

بالفعل لدينا :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)dz=\sum_{n=m}^{-2}\frac{1}{2i\pi}c_{-n}\int_C\frac{dz}{(z-z_0)^n}+c_{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{dz}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2i\pi}c_n\int_C(z-z_0)^n dz$$

من الواضح حسب دساتير كوشي فانه لما الكانتور C المغلق يشمل $z=z_0$:

$$\int_C(z-z_0)^n dz=0, n=0,1,2.....................(59)$$

و

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{dz}{z-z_0}=1......................................(60)$$

و

$$\int_C \frac{dz}{\left(z-z_0\right)^n}=0, n=12,3,,,,......................(61).$$

ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f\left(z\right)dz=c_{-1}$$

وعليه :

$$\operatorname{Re}s\left(f,z_0\right)=c_{-1}.......................................(62)$$

مثال 6. نعتبر الدالة $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}$ تقبل $z=0$ كقطب للرتبة 5. بالفعل :

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}=\frac{1}{2}\frac{1}{z^5}-\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6!}\frac{1}{z}-\frac{1}{8!}z+\frac{1}{10!}z^3...............$$

كوشي فانه لما الكانتور C المغلق يشمل $z=0$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f\left(z\right)dz=\frac{1}{6!}$$

أي أن : $\operatorname{Re}s\left(f,z_0\right)=\frac{1}{6!}=\frac{1}{5040}$.

مثال 7. نعتبر الدالة $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$ تقبل $z=0$ كقطب للرتبة 3. بالفعل :

$$f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-...\right)\right]=\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+....$$

وعليه :

$\operatorname{Re}s(f,0)=0$.

مثال 8. نعتبر الدالة $f(z)=\frac{(z-i)\sin z}{z^3(z+1)}$ تقبل $z=0$ كقطب للرتبة 3 و $z=-1$ كقطب بسيط ومنه يوجد راسبين :

$$\operatorname{Re}s(f,0)=\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-i)\sin z}{(z+1)}\right)\right]_{z=0}$$

و

$$\operatorname{Re}s(f,i)=\left(\frac{(z-i)\sin z}{z^3}\right)_{z=-1}$$

لو نقترح الكانتور المغلق $C(0,2)=\{z,|z|=2\}$ فان :

$$\int_{C(0,2)}\frac{(z-i)\exp(z)}{z^3(z+1)}dz=2i\pi(\operatorname{Re}s(f,0)+\operatorname{Re}s(f,-1))................................(63)$$

يمكن للقارئ اتمام الحساب.

نتيجة 1. نعتبر الدالة $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ تقبل $z=z_0$ كقطب بسيط بمعنى $\psi(z_0)=0$ و $\psi'(z_0)\neq 0$ فان :

$$\operatorname{Re}s\left(f,z_0\right)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}..(64)$$

البرهان :

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

مثال .9 نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{(z+i)\sin z}{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$ تقبل $z=0$ كقطب بسيط ومنه يوجد راسب :

$$\operatorname{Re}s(f,0)=\left[\frac{(z+i)\sin z}{-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}\right]_{z=0}=0$$

نتيجه .2 . نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ تقبل $z=z_0$ كقطب للرتبة 2 بمعنى $\psi(z_0)=0$ و $\psi'(z_0)=0$ و $\psi''(z_0)\neq 0$ فان :

$$\operatorname{Re}s(f,z_0)=2\frac{\varphi'(z_0)}{\psi''(z_0)}\text{...}(65)$$

البرهان : نستخدم نشر تايلر البسيط للدالة $\psi(z)$ في جوار $z=z_0$ بالفعل :

$$\psi(z)=\psi(z_0)+(z-z_0)\psi'(z_0)+\frac{1}{2}(z-z_0)^2\psi''(z_0)=\frac{1}{2}(z-z_0)^2\psi''(z_0)$$

يمكن استخدام قاعدة لوبيتال مرتين :

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^2}=\frac{\psi''(z_0)}{2}$$

ومنه في ظل نفس الشروط أعلاه :

$$\operatorname{Re}s(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^2 f(z)\right)'=2\frac{\varphi'(z_0)}{\psi''(z_0)}$$

مثال .9 نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{(z+i)^2}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ تقبل $z=\frac{\pi}{2}$ كقطب للرتبة 2 ومنه :

$$\operatorname{Re}s\left(f,\pi/2\right)=4\frac{\frac{\pi}{2}+i}{2}=2\left(i+\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال .10 نعتبر الدالة $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ تقبل $z=\frac{\pi}{4}$ كقطب بسيط و $z=0$ قطب مكرر للرتبة 2 ومنه :

$$\operatorname{Re}s(f,0)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z^2}{z-\frac{\pi}{4}}\right)'=2\frac{2z\cos z^2}{6z-\frac{\pi}{2}}\underset{z\to 0}{\to}0=0$$

وأيضا :

$$\operatorname{Re}s\left(f,\frac{\pi}{4}\right)=\left[\frac{\sin z^2}{z^2}\right]_{z=\frac{\pi}{4}}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}$$

مثال .11 نعتبر الدالة $f(z)=(1+z^2)\exp\left(-\frac{1}{z}\right)$ تقبل $z=0$ كقطب اساسي (شذوذ لا يعدم المقام) لحساب الراسب نستخدم نشر تايلر:

$$f(z)=(1+z^2)\exp\left(-\frac{1}{z}\right)=(1+z^2)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+..\right)$$

ومنه

$$\operatorname{Re}s\left(f,0\right)=c_{-1}=-\left(1+\frac{1}{3!}\right)=-\frac{7}{6}$$

مثال .12 نعتبر الدالة $f(z)=z^{3}\exp\left(-\frac{1}{z^{2}}\right)$ تقبل $z=0$ كقطب اساسي (شذوذ لا يعدم المقام) لحساب الراسب نستخدم نشر تايلر :

$$f(z)=z^{3}\exp\left(-\frac{1}{z^{2}}\right)=z^{3}\left(1-\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{2!z^{4}}-\frac{1}{3!z^{3}}+..\right)$$

ومنه :

$$\operatorname{Re}s\left(f,0\right)=c_{-1}=\frac{1}{2}$$

مثال.13 لما $F(z)$ و $G(z)$ تحليليان على C_{α} و α هو جذر المعادلة لاكرانج : $z=a+\xi F(z)$ فان :

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{G(z)}{z-a-\xi F(z)},\beta\right)=\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)G(z)}{z-a-\xi F(z)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{G(z)}{\dfrac{z-a-\xi F(z)}{z-\alpha}}=\frac{G(\alpha)}{1-\xi F'(\alpha)}$$

ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{a}}\frac{G(z)}{z-a-\xi F(z)}dz=\frac{G(\alpha)}{1-\xi F'(\alpha)}$$

6.5 التكاملات الجيبية المركبة : $\int_{0}^{2\pi}f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta$

من السهل جدا التعامل مع هذا النوع من التكاملات الجيبية المركبة بتحويلها الى تكاملات لكوشي على الدائرة الوحدة. بالفعل :

$$z=e^{i\theta}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

من الطبيعي تصور $|z|=1$ وبالتالي لما θ تمسح المجال $\left[0\quad 2\pi\right[$ فان $z=e^{i\theta}$ تمسح الدائرة الوحدة $C(0,1)=\{z,|z|=1\}$. ومنه :

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

وعليه التكامل الجيبي :

$$\int_{0}^{2\pi}f\left(\cos\theta,\sin\theta\right)d\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(66)$$

يصبح تكامل لكوشي من الشكل :

$$-i\int_{C(0,1)}f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(67)$$

نظرية هامة جدا

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{f(\lambda)}{\varepsilon}$$

وأيضا :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(\lambda+i\varepsilon.e^{i\theta}\right)d\theta=-\frac{i^{n}\varepsilon^{n-1}}{n!}f^{(n)}(\lambda)$$

البرهان : من الطبيعي تصور $|z|=1$ وبالتالي لما θ تمسح المجال $\left[0\quad 2\pi\right[$ فان $z=i\varepsilon e^{i\theta}$ تمسح الدائرة الوحدة $C(0,1)=\{z,|z|=1\}$.

ومنه :

$$z = i\varepsilon e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = -\frac{dz}{\varepsilon . z}$$

ومنه حسب دساتير كوشي :

$$\int_0^{2\pi} f\left(\lambda + i\varepsilon . e^{i\theta}\right) d\theta = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{|z|=1} \frac{f(\lambda + z)}{z} dz = -\frac{2i\pi}{\varepsilon} f(\lambda)$$

وكذلك

$$\int_0^{2\pi} f\left(\lambda + i\varepsilon . e^{i\theta}\right) d\theta = -\frac{i^n \varepsilon^n}{\varepsilon} \int_{|z|=1} \frac{f(\lambda + z)}{z^{n+1}} dz = -\frac{2i\pi}{n!} \frac{i^n \varepsilon^n}{\varepsilon} f^{(n)}(\lambda)$$

مثال 13. لنحسب التكاملان الجيبيان :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + 2(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

1.نستخدم التحويل أعلاه :

$$z = e^{i\theta} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, |z| = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + 2(\cos\theta + \sin\theta)} = -i \int_{C(0,1)} \frac{1}{a + \left(z + \frac{1}{z}\right) - i\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} = i \int_{C(0,1)} \frac{1}{a + \frac{z^2 + 1 - i(z^2 - 1)}{z}} dz$$

ومنه :

$$I = i \int_{C(0,1)} \frac{z}{(1-i)z^2 + az + 1 + i} dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

المعادلة : $(1-i)z^2 + az + 1 + i = 0$ فان $\Delta = a^2 - 4(1-i)(1+i) = a^2 - 8$ فجذري المعادلة هما :

$$z_1 = -\frac{-a + i\sqrt{a^2 - 8}}{2(1-i)}, z_2 = \frac{-a - i\sqrt{a^2 - 8}}{2(1-i)}$$

يمكن تحقيق انتماء أحد الجذرين فقط الى داخل الدائرة الوحدة $C(0,1)$ لأن طويلة جداؤهما أقل من 1 وعليه لنفرض الجذر الأول ينتمي الى داخل الدائرة الوحدة $C(0,1)$ ومنه :

$$I = i \int_{C(0,1)} \frac{z}{(1-i)z^2 + az + 1 + i} dz = i \int_{C(0,1)} \frac{z}{(1-i)(z - z_1)(z - z_2)} dz$$

أي ان :

$$I = \frac{i}{1-i} \int_{C(0,1)} \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = \frac{i}{1-i} \int_{C(0,1)} \frac{\frac{z}{z - z_2}}{z - z_1} dz = 2i\pi \frac{i}{1-i} \left[\frac{z}{z - z_2}\right]_{z = z_1} = -\frac{2\pi}{1-i} \frac{z_1}{z_1 - z_2}$$

وأخيرا:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + 2(\cos\theta + \sin\theta)} = -\frac{2\pi}{1-i} \frac{-a + i\sqrt{a^2 - 8}}{2i\sqrt{a^2 - 8}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(69)$$

2.لنحسب التكامل الثاني : . $J=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$

نستخدم التحويل :

$$z=e^{i\theta}\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta=\frac{dz}{iz},|z|=1$$

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=\int_C\frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$$

جذري المعادلة :

$$(1-2i)z^2+6iz-1-2i$$

هما على التوالي:

$$z_1=2-i,z_2=\frac{2-i}{5}\Rightarrow|z_1|>1,|z_2|<1$$

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i},\frac{2-i}{5}\right)=\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\left(z-\frac{2-i}{2}\right)\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=\frac{1}{2i}$$

$$\int_C\frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi$$

وعليه :

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=\pi$$

مثال 14. لنحسب التكامل الجيبي :

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$$

بحيث $a>b>0$.

نستخدم التحويل أعلاه :

$$z=e^{i\theta}\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta=\frac{dz}{iz},|z|=1$$

عندئذ :

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}-i\int_{C(0,1)}\frac{1}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z}=-ib\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z^2+(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}$$

بحيث :

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},\beta=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

وحيث أن $\alpha\beta=1$ فان القطب α فقط ينتمي الى داخل الدائرة الوحدة $C(0,1)$ لأن طويلة جداؤهما يساوي 1

$$I=-ib\int_{C(0,1)}\frac{\frac{1}{z-\beta}}{z-\alpha}=-ib\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

ومنه :

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\;.................................(70)$$

بحيث $a>b>0$.

توطئة جوردان Γ_R نصف الدائرة العلوي نصف قطره R و f دالة تحقق الشروط الآتية :

1. f تحليلية على $\{z,\operatorname{Im} z\geq 0\}$
2. $|f(z)|\underset{|z|=R\to\infty}{\to}0$ هذا الشرط يتحقق مثلا لما :

$$|f(z)|\leq\frac{M}{R^k}\underset{|z|=R\to\infty}{\to}0$$

عندئذ لما $m>0$:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)\exp(imz)dz=0$$

البرهان :

$$\left|\int_{\Gamma_R}f(z)\exp(imz)dz\right|\leq\underset{|z|=R}{Max}|f(z)|\int_0^{\pi}|\exp(imR(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta|$$

$$\left|\int_{\Gamma_R}f(z)\exp(imz)dz\right|\leq 2R\underset{|z|=R}{Max}|f(z)|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp(-mR\sin\theta)d\theta\underset{R\to\infty}{\to}0$$

تطبيق من اجل $k>0$ لنحسب التكاملين :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\exp(iax)}{x^2+k^2}dx$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x(x^2+k^2)}dx$$

استنتج ما يلي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{\exp(ak)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos ax}{x^2+k^2}dx=0$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx=\frac{\pi}{2k^2}(1-\exp(ak))$$

نقترح الدالة التحليليه :

$$f(z)=\frac{z}{z^2+k^2}$$

Γ_R نصف الدائرة العلوي نصف قطره R و f دالة تحقق الشروط الآتية :

$$|f(z)|=\left|\frac{z}{z^2+k^2}\right|=\frac{R}{R^2-k^2}\leq\frac{M}{R^k}\underset{|z|=R\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ومنه حسب توطئة جوردان :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z\exp(iaz)}{z^2+k^2}dz=0$$

من جهة أخرى :

$$\int_{-R}^{+R}\frac{x\exp(iax)}{x^2+k^2}dx+\int_{\Gamma_R}\frac{z\exp(iaz)}{z^2+k^2}=2i\pi\operatorname{Re}s(f,ik)$$

$$2i\pi\operatorname{Re}s(f,ik)=2i\pi\left[\frac{z}{z+ik}\exp(iaz)\right]_{z=ik}=\frac{i\pi}{\exp(ak)}$$

ومنه :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\exp(iax)}{x^2+k^2}dx=\frac{i\pi}{\exp(ak)}$$

وبالتالي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{\exp(ak)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos ax}{x^2+k^2}dx=0$$

لنحسب التكامل الثاني من أجل ذلك Γ_R نصف الدائرة العلوي نصف قطره R ونعتبر C_r نصف الدائرة العلوي نصف قطره r و f دالة تحقق الشروط الآتية :

$$f(z)=\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}$$

النصف العلوي م الدائرتين يشمل القطبين البسيطين $z=0$ و $z=ik$ ولما تكون ψ دالة هولومورفية فان :

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}\psi(w)dw=\lim_{r\to0}\int_0^r\psi(r\exp(it))dt=0$$

الدالة المساعدة :

$$g(z)=\frac{1}{z(z^2+k^2)}$$

تحقق المحدودية :

$$|g(z)|\leq\frac{1}{|z|(|z|^2-k^2)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ومنه حسب توطئة جوردان :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}dz=0$$

وعليه :

$$\int_{-R}^{-r}\frac{\exp(iax)}{x(x^2+k^2)}dx+\int_{r}^{R}\frac{\exp(iax)-\exp(-iax)}{x(x^2+k^2)}dx=2i\int_{r}^{R}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx$$

لحساب الراسب عند $z=0$ نحسب معامل C_{-1} النشر لـ $\frac{1}{z}$ للدالة f

$$f(z)=\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}=\frac{1}{k^2}\frac{k^2+z^2-z^2}{z(z^2+k^2)}(\exp(iaz)-1+1)$$

$$f(z)=\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}=\frac{1}{k^2}\frac{1}{z}+\frac{z^2(\exp(iaz)-1)}{z^2+k^2}$$

وحيث أن الدالة $\psi(z)=\frac{z^2(\exp(iaz)-1)}{z^2+k^2}$ هولومورفية على النصف العلوي م للدائرة الصغرى C_r التي تشمل القطب البسيط $z=0$

ولما تكون ψ دالة هولومورفية فان :

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{z^2(\exp(iaz)-1)}{z^2+k^2}dz=0$$

ومنه نتحصل على :

$$\int_{C_r}\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}dz=\frac{1}{k^2}\int_{C_r}\frac{dz}{z}+\int_{C_r}\frac{z^2(\exp(iaz)-1)}{z(z^2+k^2)}dz$$

وحيث أن :

$$\int_{C_r}\frac{z^2(\exp(iaz)-1)}{z(z^2+k^2)}dz\underset{r\to 0}{\to}0$$

وحسب نظرية كوشي :

$$\int_{C_r}\frac{dz}{z}=2i\pi$$

فان :

$$\int_{C_r}\frac{\exp(iaz)}{z(z^2+k^2)}dz=\frac{-i\pi}{k^2}$$

ومنه :

$$\lim_{R,r\Rightarrow\infty,0}2i\int_{r}^{R}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx-\frac{i\pi}{k^2}=2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx=2i\pi\frac{\exp(-ka)}{2k^2}$$

ومنه :

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx=2i\pi\frac{\exp(-ka)}{2k^2}+\frac{i\pi}{k^2}$$

مما يستلزم :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx=\pi\frac{\exp(-ka)}{2k^2}+\frac{\pi}{2k^2}=\frac{\pi}{2k^2}(1-\exp(ak))$$

الدرس السابع : نشورلاكرانج وتطبيقاتها في حساب مجاميع السلاسل

نظرية.7 (نظرية لاكرانج). $\phi(z)$ دالة تحليلية على الدائرة المغلقة C_a والتي تشمل النقطة a و z هو جذر المعادلة لاكرانج :

$$z=a+\xi\phi(z)\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

ويأخذ $z=a$ لما $\xi=0$.فان :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \phi(a)^n \text{..............................}(72)$$

وعليه لما $F(z)$ تحليلية على C_a و z هو جذر المعادلة لاكرانج :

$$F(z) = F(a) + \xi\phi(F(z)) \text{...}(73)$$

ويأخذ $z = F(a)$ لما $\xi = 0$.فان :

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(F'(a)\phi(a)^n.\right) \text{..............................}(73)$$

البرهان :لدينا حسب (71) $f(z) = z - a - \xi\phi(z) = 0$ بحيث f يملك جذر وحيد بسيط z فقط ليس هناك أقطاب و $g(z) = z$ سنطبق خلال هذا البرهان الدستور (44).

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} w \left(\frac{1 - \xi\phi'(w)}{w - a - \xi\phi(w)} \right) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{w}{w-a} (1 - \xi\phi'(w)) \frac{1}{1 - \xi \dfrac{\phi(w)}{w-a}} dw$$

وحيث أن :

$$\frac{1}{1 - \xi \dfrac{\phi(w)}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}$$

ومنه :

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{w}{w-a} (1 - \xi\phi'(w)) \frac{1}{1 - \xi \dfrac{\phi(w)}{w-a}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{w}{w-a} (1 - \xi\phi'(w)) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n \phi^n(w)}{(w-a)^n} \right) dw$$

يساوي بمراعاة العلاقة (71) كون $\dfrac{\xi\phi(w)}{w-a} = 1$ فان :

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{w}{w-a} dw + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2i\pi} \int_{C_a} \left(\frac{w\phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}} - \frac{w\phi^{n-1}(w)\phi'(w)}{(w-a)^n} \right) dw$$

الآن لدينا :

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dw} \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} = \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}} - \frac{\phi^{n-1}(w)\phi'(w)}{(w-a)^n}$$

وبمراعاة :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{w}{w-a} dw = a$$

ومنه توصلنا الى الدستور :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2i\pi} \int_{C_a} \frac{w}{n} \left(\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} \right) dw$$

باستخدام التكامل بالتجزئة مع مراعاة الخاصية الهولومورفية والكانتور المغلق تستلزمان : $\left[\dfrac{w}{n} \dfrac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} \right]_{C_a} = 0$ فان :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2i\pi n} \int_{C_a} \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} dw$$

وحسب احدى دساتير كوشي فان :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[\left(\phi^n (w) \right)^{(n-1)} \right]_{w=a}$$

واخيرا :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(\phi^n (a) \right)^{(n-1)}$$

مثال.15 و z هو جذر المعادلة لاكرانج :

$$z = a + \frac{1}{2}\xi\left(z^2 - 1\right)\text{...}(74)$$

ويأخذ $z = a$ لما $\xi = 0$.فان :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\xi + \xi^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left(a^2 - 1\right)^n \text{...............................}(75)$$

للآشارة أن :

$$\frac{d^n}{da^n} \left(a^2 - 1\right)^n = \left(\left(a^2 - 1\right)^n \right)^{(n)}$$

الحل : نطبق دستور لاكرانج (71) و(72) بحيث أن : $\phi(z) = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right)$

$\phi(z)$دالة تحليلية على الدائرة المغلقة C_a والتي تشمل النقطة a و z هو جذر المعادلة لاكرانج :

$$z = a + \frac{1}{2}\xi\left(z^2 - 1\right)$$

ويأخذ $z = a$ لما $\xi = 0$.فان :

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(a^2 - 1\right)^n \text{............................}(76)$$

المعدلة للاكرانج : $z = a + \frac{1}{2}\xi\left(z^2 - 1\right)$ تستلزم الجذرين الوحيدين :

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\xi^2 - 2a\xi + 1}}{\xi}$$

ثم نختبر المتطابقة الآتية :

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\xi^2 - 2a\xi + 1}}{\xi} \right)' = \frac{2\xi}{2\xi\sqrt{\xi^2 - 2a\xi + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2a\xi + 1}}$$

باشتقاق طرفي المعادلة (76) فان :

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2a\xi + 1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left(a^2 - 1\right)^n \text{............................}(76)$$

باتباع نفس الخطوات يمكن التطرق الى معادلة لاكرانج أخرى .

مثال.15 و z هو جذر المعادلة لاكرانج :

$$z = \xi . z^p + 1 \text{...}(74)$$

ويأخذ $z = 1$ لما $\xi = 0$.فان :

$$z = 1 + \xi + \frac{2p}{1!}\xi^2 + \frac{3p(3p-1)}{3!}\xi^3 . + . \frac{4p(4p-1)(4p-2)}{4!}\xi^4 \text{...................................}(75)$$

من اجل $p=\frac{1}{2}$ فان : z هو جذر المعادلة لاكرانج $z=\xi.\sqrt{z}+1$ ويأخذ $z=1$ لما $\xi=0$.فان :

$$z=1+\xi+\frac{1}{1!}\xi^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{3!}\xi^3.+.\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)}{5!}\xi^5+..................................(75)$$

الدرس الثامن : نشور ميثاق لوفلر وتطبيقاتها في حساب مجاميع السلاسل

8.1. نشور ميثاق لوفلر

نظرية.8 (نظرية لوفلر) نفرض أن أقطاب الدالة $f(z)$ متباعدة بمسافة منتهية وهي الأقطاب $(a_i)_{i=1,2,3.....}$ بحيث

$$|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le..............$$

نفرض أن $(b_i)_{i=1,2,3.....}$ رواسب $f(z)$ عند $(a_i)_{i=1,2,3.....}$ أي أن :

$$b_i=\operatorname{Re}s(f,a_i),i=1,2,3.......$$

C_N دوائر أنصاف أقطارها R_N بحيث $R_N\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z\in C_N$:

$$|f(z)|<M$$

فان :

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{a_n}\right)....................................(76)$$

البرهان

$f(z)$ لها قطب $z=a_n$ بحيث $n=1,2,3........$ و $z=\xi$ (ليس قطب لـ $f(z)$) هو قطب لـ $\frac{f(z)}{z-\xi}$ ومنه :

$$\operatorname{Re}s(\frac{f(z)}{z-\xi},a_n)=\underset{z\to\xi}{Lim}(z-a_n)\frac{f(z)}{z-\xi}=\frac{b_n}{a_n-\xi}$$

وأيضا :

$$\operatorname{Re}s(\frac{f(z)}{z-\xi},\xi)=\underset{z\to\xi}{Lim}(z-\xi)\frac{f(z)}{z-\xi}=f(\xi)$$

حسب نظرية الرواسب :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z-\xi}dz=\sum_{a_n\in C_N}\operatorname{Re}s(f,a_n)+\operatorname{Re}s(f,\xi)=f(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n-\xi}$$

الدوائر C_N تحيط بكل الأقطاب $a_1,a_2,a_3.........a_n.....$ لما $f(z)$ تحليليه عند الصفر فان :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z}dz=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}....................................(77)$$

ومنه :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\left(\frac{1}{z-\xi}-\frac{1}{z}\right)f(z)dz=f(\xi)-f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-\xi}-\frac{1}{a_n}\right)$$

مما يكافؤ :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z(z-\xi)}dz=f(\xi)-f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-\xi}-\frac{1}{a_n}\right)$$

لنلاحظ الآن :

$$\left|z-\xi\right| \geq \left|z\right|-\left|\xi\right| = R_N - \left|\xi\right|$$

حسب متباينة كوشي :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z(z-\xi)}dz\right| \leq \frac{M}{R_N}\frac{2\pi R_N}{R_N-\left|\zeta\right|} \to 0$$

لما $R_N \underset{N\to\infty}{\to} \infty$ وهذا لما $N \to \infty$.

وهذا يستلزم أن :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z(z-\xi)}dz\right| \to 0$$

وهذا لما $N \to \infty$.

مثال.16 نطبق نظرية ميثاق لوفلر لنثبت أن :

$$\cot g(z) = \frac{1}{z} + \sum_n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)\text{...}(78)$$

الحل نضع : $f(z) = \cot g(z) - \frac{1}{z} = \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z}$ الأقطاب من الشكل $z = n\pi$ بحيث $n = 0,1,2,3.......$

لنحسب الرواسب عند كل قطب من الأقطاب.

$$\operatorname{Re}s(f, n\pi) = \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = \lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z}\lim_{z\to n\pi}\frac{z\cos z-\sin z}{z} = 1$$

نطبق لوبيتال فنتحصل على :

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\cot g(z) - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = 0$$

الدوائر C_N دوائر أنصاف أقطارها $R_N = \left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$ بحيث $R_N \underset{N\to\infty}{\to} \infty$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z \in C_N$:

تحيط بكل الأقطابالسالفة الذكر ومنه دستور ميثلق لوفلر :

$$\cot g(z) - \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)$$

نتيجة.1

$$\cot g(z) - \frac{1}{z} = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}\text{..................................}(79)$$

البرهان : لدينا

$$\cot g(z) - \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right) = \sum_{-\infty}^{1}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)$$

وهذا يستلزم أن :

$$\cot g(z) - \frac{1}{z} = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}$$

دساتير شهيرة .

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} - 2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2} - \frac{1}{z^2-4\pi^2} + \frac{1}{z^2-9\pi^2} - ....\right)\text{...................................}(80)$$

$$\frac{1}{\pi\cos z} = \frac{1}{-z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{3}{-z^2+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} + \frac{5}{-z^2+\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2} - \text{.................................}(81)$$

$$\frac{\tan z}{2z}=\frac{1}{-z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{-z^2+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{-z^2+\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}-\dots\dots(82)$$

$$\operatorname{csc} hz=\frac{1}{z}-2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2}-\frac{1}{z^2+4\pi^2}+\frac{1}{z^2+9\pi^2}-\dots\right)\dots\dots(83)$$

$$\tanh z=2z\left(\frac{1}{z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{z^2+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}+\frac{1}{z^2+\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}-\right)\dots\dots(84)$$

$$\cot anhz=\frac{1}{z}+2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2}+\frac{1}{z^2+4\pi^2}+\frac{1}{z^2+9\pi^2}-\right)\dots\dots(85)$$

8.2. تطبيقات نظرية ميثاق لوفلر في حساب مجاميع السلاسل

نظرية.9. $f(z)$ دالة معطاة معلومه فان :

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} f(n)=-\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\cot g\pi z f(z),\lambda)\dots\dots(85)$$

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\cos c\pi z f(z),\lambda)\dots\dots(86)$$

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\sec\pi z f(z),\lambda)\dots\dots(87)$$

البرهان : ليكن C_N الكانتور يشمل كل أقطاب $f(z)$ اقطاب $\cot g\pi z$ هي $z=0,\pm1,\pm2,\pm3;\dots..$

$$\operatorname{Re}s(\pi f(z)\cot g\pi z, z=n)=\lim_{z\to n}\pi\frac{z-n}{\sin\pi z}f(z)\cos\pi z=f(n)$$

بتطبيق نظرية الرواسب :

$$\int_{C_N}\pi f(z)\cot\pi z dz=\sum_{n=-N}^{N}f(n)+\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(f(z)\cot\pi z,\lambda)$$

لدينا من أجل $z=x+iy$ و $y>\frac{1}{2}$ او $y<-\frac{1}{2}$:

$$|\cot\pi z|=\left|\frac{\exp(i\pi z)+\exp(-i\pi z)}{\exp(i\pi z)-\exp(-i\pi z)}\right|\le\frac{|\exp(i\pi z)|+|\exp(-i\pi z)|}{|\exp(i\pi z)|-|\exp(-i\pi z)|}\le\frac{\exp(-\pi y)+\exp(\pi y)}{\exp(\pi y)-\exp(-\pi y)}$$

$$|\cot\pi z|\le\frac{\exp(-\pi y)+\exp(\pi y)}{\exp(\pi y)-\exp(-\pi y)}\le\frac{1+\exp(-2\pi y)}{1-\exp(-2\pi y)}\le\frac{1+\exp(-\pi)}{1-\exp(-\pi)}=L$$

لما $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ فانه لما $z=N+\frac{1}{2}+iy$:

$$|\cot\pi z|=\left|\cot\pi\left(N+\frac{1}{2}+iy\right)\right|=|\tanh\pi y|\le\left|\tanh\frac{\pi}{2}\right|\le K$$

لما $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ فانه لما $z=-N-\frac{1}{2}+iy$ فان :

$$|\cot\pi z|=\left|\cot\pi\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right|=|\tanh\pi y|\le\left|\tanh\frac{\pi}{2}\right|\le K$$

ومنه :

$$\left|\int_{C_N}\pi f(z)\cot \pi z dz\right|\le \frac{\pi AM}{N^k}(8N+4)\underset{N\to\infty}{\to}0$$

ومنه نستنتج أن :

$$\int_{C_N}\pi f(z)\cot \pi z dz=\sum_{n=-N}^{N} f(n)+\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s\left(f(z)\cot \pi z,\lambda\right)\underset{N\to\infty}{\to}0$$

ومنه :

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} f(n)=-\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s\left(\pi \cot g\pi z f(z),\lambda\right)$$

مثال.17 نطبق نظرية ميثاق لوفلر لنثبت من اجل $a>0$ أن :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\frac{\pi}{a}\coth \pi a...(88)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\pi}{a}\coth \pi a.\right)..(89)$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ لديها قطبين بسيطين هما : $z=\pm ia$ الرواسب لـ $\pi\dfrac{1}{z^2+a^2}\cot \pi z$ عند القطب $z=ia$ هو ك

$$\lim_{z\to ia}\frac{(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)}\pi \cot g\pi z=\frac{\pi \cot i\pi a}{2ia}=-\frac{\pi}{2a}\coth \pi a$$

$$\lim_{z\to -ia}\frac{(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)}\pi \cot g\pi z=\frac{\pi \cot i\pi a}{2ia}=-\frac{\pi}{2a}\coth \pi a$$

الدالة $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ تستوفي شروط المحدودية علو الكانتورات C_N أي :

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{z^2+a^2}\right|<\frac{M}{|z|^k}\underset{|z|\to\infty}{\to}0$$

ومنه نطبق الدستور أعلاه :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=-\left[\operatorname{Re}s\left(\pi\frac{\cot \pi z}{1+z^2},ia\right)+\operatorname{Re}s\left(\pi\frac{\cot \pi z}{1+z^2},-ia\right)\right]=\frac{\pi}{a}\coth \pi a.$$

فالدستور (88) محقق. بالنسبة للنتيجة (89) يمكن التأكد مها كما يلي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{\pi}{a}\coth \pi a$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\pi}{a}\coth \pi a$$

مما يستلزم أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\pi}{a}\coth \pi a\right)................................(90)$$

نظرية (استخدام نشور ميثاق لوفلر في حساب الجداءات اللامنتهيه)

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)..(1)$$

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)................................(2)$$

$$\sinh z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\text{.......................................}(3)$$

$$\cosh z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\text{.................................}(4)$$

البرهان : نستخدم احدى نشور ميثاق لوفلر السابقة فان

$$\int_0^z\left(\cot gt-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\frac{\sin z}{z}=\int_0^z\left(\frac{2t}{t^2-\pi^2}+\frac{2t}{t^2-4\pi^2}+.....\right)dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ومنه :

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

الدرس التاسع : الجداءات غير المنتهية للدوال الهولومورفيه وتقاربها الجداءات غير المنتهيه لبلاشك

9.1. تعريف.1 نعتبر الجداء المنته بحيث متتالية العداد المركبة $w_k \neq -1, k=1,2,3.....n$:

$$p_n=(1+w_1)(1+w_2)..............(1+w_n)=\coprod_{k=1}^{n}(1+w_k)$$

في حالة وجود نهاية :

$$Lim_{n\to\infty}p_n=p=\coprod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$$

نقول ان الجداء غير المنته $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ متقارب .

في حالة تقارب الداء غير المنته $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)$ نقول أن $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+w_n)$ متقارب مطلقا.

. تعريف.2 نعتبر الجداء المنته بحيث $f_n(z)\neq -1, n=1,2,3.......$ متتالية دوال هولومورفية على الجموعة Ω:

$$P_n(z)=(1+f_1(z))(1+f_2(z))..............(1+f_n(z))=\coprod_{k=1}^{n}(1+f_k(z))$$

في حالة وجود نهاية :

$$Lim_{n\to\infty}P_n(z)=P(z)=\coprod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

نقول ان الجداء غير المنته $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ متقارب وهولومورفي .

في حالة تقارب الداء غير المنته $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|)$ على الجموعة Ω: نقول أن $\coprod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ متقارب مطلق على الجموعة Ω.

توطئة شهيرة .1 1 نعتبر الجداء المنته بحيث متتالية العداد المركبة $w_k \neq -1, k=1,2,3.....n$:

$$p_N=\coprod_{k=1}^{N}(1+w_k),\ p_N^*=\coprod_{k=1}^{N}(1+|w_k|)$$

فان :

$$\left|p_N^*\right| = \prod_{k=1}^{N}\left(1+\left|w_k\right|\right) \le \exp\left(\sum_{k=1}^{k=N}\left|w_k\right|\right)...............................(91)$$

و أيضا :

$$\left|p_N - 1\right| \le p_N^* - 1...(92)$$

البرهان : نطبق المتراجحه الأسيه

$$x \ge 0 \Rightarrow 1 + x \le \exp(x)..(93)$$

باعتبار : $x = \left|w_k\right|, k = 1,2,3........N.$ نتحصل على :

$$1 + \left|w_k\right| \le \exp\left(\left|w_k\right|\right), k = 1,2,3........N.$$

ومنه الخاصية (91) محققة.

لنثبت صحة العلاقة (92) باستخدام العلاقه :

$$p_{N+1} - 1 = \prod_{k=1}^{N+1}\left(1 + w_k\right) = p_N\left(1 + w_{N+1}\right) - 1 = \left(p_N - 1\right)\left(1 + w_{N+1}\right) + w_{N+1}$$

وبما ان العلاقة (92) صحيحة من اجل $N = 1$ بوضوح فانه لما تكون صحيحة من أجل N فان :

$$\left|p_{N+1} - 1\right| \le \left|p_N - 1\right|\left(1 + \left|w_{N+1}\right|\right) + \left|w_{N+1}\right| \le \left(p_N^* - 1\right)\left(1 + \left|w_{N+1}\right|\right) + \left|w_{N+1}\right| = p_{N+1}^* - 1$$

نظرية.1

الجداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + w_n\right)$ متقارب فان $w_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ بمعنى :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + w_n\right) \text{متقارب} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = 0........................(94)$$

البرهان : في حالة وجود نهاية : $Lim_{n\to\infty} p_n = p = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + w_n\right)$ فان :

$$Lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}} = Lim_{n\to\infty}\left(1 + w_n\right) = 1$$

$$Lim_{n\to\infty} 1 + w_n = 1 \Rightarrow Lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

مما يثبت صحة العلاقة (94).

نظرية.2

الجداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left|w_n\right|\right)$ متقارب بحيث $w_n \ne -1, n = 1,2,3......$ متقارب اذا وفقط :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|w_n\right| < \infty............................(95)$$

البرهان : نستخدم المتراجحة :

$$\left(1 - \varepsilon\right)\left|w_n\right| \le \left|\log\left(1 + w_n\right)\right| \le \left(1 + \varepsilon\right)\left|w_n\right|$$

للأشارة $\log\left(1 + w_n\right)$ يرمز للفرع الرئيسي للوغاريتم .بمعنى التحديد الرئيسي لعمدة اللوغاريتم محصور في المجال $\left]-\pi \quad \pi\right[$ بالفعل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \Rightarrow \left|\frac{\log(1 + x)}{x} - 1\right| \le \varepsilon$$

ومنه باستخدام كون $w_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$:

$$\left(1 - \varepsilon\right)\left|w_n\right| \le \left|\log\left(1 + w_n\right)\right| \le \left(1 + \varepsilon\right)\left|w_n\right|$$

فالسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+w_n)|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ لهما نفس طبيعة التقارب. ومنه :

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)<\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|w_n|<\infty$$

مثال .1 الجداءين اللامنتهيين $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{n+1}{2^n}\right)$متقاربين اذا وفقط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty$ لما $p>1$. و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}<\infty$ وهذا. وبالتالي :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\infty$$

نظرية. 2 نعتبر $f_n(z)\neq -1, n=1,2,3.......$ متتالية دوال هولومورفية على الجموعة $\forall z\in\Omega$ من $\mathbb{C}$ بحيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|<\infty..............................(96)$$

فان $\forall z\in D\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ مفتوح :

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))........................(97)$$

متقارب وعلى كل $\forall z\in\Delta\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ لا يشمل اي صفر من أصفار $f_n(z), n=1,2,3.......$ فان :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}................................(98)$$

البرهان : يمكن ملاحظة :

$$(\log f(z))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

وأيضا :

$$Lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{n}(1+f_n(z))=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))=f(z)$$

وحسب تعريف النهاية نستخلص ما يلي :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\geq 0\Rightarrow\forall n\geq N,\forall z\in D:\left|\prod_{n=1}^{n}(1+f_n(z))-f(z)\right|\leq\varepsilon$$

مثال . نعتبر الجداء اللامنته :

$$f(z)=\exp\left(\frac{\pi iz}{2k}\right)\frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{q^{2n}}{\xi^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\xi^2\right)}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{q^{2n+1}}{\xi^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n+1}\xi^2\right)}$$

متقارب مطلقا بحيث أن : $q=e^{-\frac{k'}{k}}$.وتحقق : $f(z+2ik')=f(z)$. لكل z .

9.2 الجداءات غير المنتهيه لبلاشك Produits infinis de Blaschke

تعريف.1 (تحويل بلاشك) نعرف تحويل بلاشك على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ الدالة : $z\mapsto\varphi(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ بحيث $a\in D$

وهي تحقق الميزات الآتية :

1. $|z|=1 \Rightarrow |\varphi(z)|=1$

2. $\varphi'(z)=\dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \neq 0$ بحيث $\forall z \in D=\{z,|z|<1\}$.

3. φ هولومورفية من $D_z=\{z,|z|<1\}$ نحو $D_w=\{w,|w|<1\}$ بمعنى أن :

$$\forall z \in D=\{z,|z|<1\}: |\varphi(z)|<1 \Rightarrow \varphi(D_z(0,1)) \subseteq D_w(0,1)$$

البرهان : بالفعل :

$$|a|=1 \Rightarrow |1-\bar{a}z|=|1-\bar{a}z||a|=|z-a|=|a-z| \Rightarrow \left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|=|\varphi(z)|=1$$

ومنه صورة الدوائر الوحدة في المستوي oz بواسطة تحويل بلاشك هي دوائر وحدة في المستوي ow . وبما أن :

$$|z|<1 \Rightarrow 1-\bar{a}z=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\bar{a}}$$

$$|a|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\bar{a}}\right|>1$$

ومنه تحويل بلاشك معرف جيدا على القرص الوحدة $D_z=\{z,|z|<1\}$ فالمشتقة $\varphi'(z)=\dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \neq 0$ دوما على القرص الوحدة $D_z=\{z,|z|<1\}$ فهو تحويل كونفورملي **Transformation conforme**. لنختبر كاشفا ما مثلا :

$$\left|\frac{\frac{i}{2}-a}{1-\bar{a}\frac{i}{2}}\right|=\left|\varphi\left(\frac{i}{2}\right)\right|=\left|\frac{i-2a}{2-i\bar{a}}\right|<1$$

وبما أن $\left|\frac{i}{2}\right|<1 \Rightarrow \frac{i}{2} \in D(0,1)$ ومنه صورة القرص الوحدة في المستوي oz هي القرص الوحدة في المستوي ow .

بمعنى :

$$w=\varphi(z), \forall z \in D=\{z,|z|<1\} \Rightarrow |w|=|\varphi(z)|<1$$

نظرية.1 (نظرية بلاشك) $(a_n)_{n=1,2,3.....}$ متتالية من $\mathbb{C}$ عناصر من القرص الوحدة $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ نعرف الجداء الامنته لبلاشك على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ الدالة :

$$z \mapsto B(z)=z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n} \qquad (99)$$

بحيث $a \in D$ يسمى جداء بلاشك وهو جداء متقارب هولومورفي على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ فقط لما يتحقق شرط بلاشك :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty \qquad (100)$$

جداء **بلاشك** يحقق :

1. $|z|<1 \Rightarrow |B(z)|<1$

2. $\forall \theta \in [-\pi \quad \pi]$:

$$\left|B\left(e^{i\theta}\right)\right|=1 \qquad (101)$$

3. لا يقبل أصفارا غير $(a_n)_{n=1,2,3.....}$ والصفر للرتبة k .

البرهان : نستخدم احدى نظريات تقارب الجداء اللامنته للدوال الهولومورفية الهوموغرافيه.لنختبر تقارب سلسلة الدوال (102) على المتراصات الاتية $\{z,|z| \leq r\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|......................................(102)$$

الحد العام لها يساوي :

$$\left|1-\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|=\left|\frac{a_n\left(1-\overline{a_n}z\right)-|a_n|(a_n-z)}{1-\overline{a_n}z}\right|=\left|\frac{a_n+z|a_n|}{\left(1-\overline{a_n}z\right)a_n}\right|(1-|a_n|)..............(103)$$

لدينا $|z|\le r$ مع ملاحظة $\left|\frac{|a_n|}{a_n}\right|=1$ يستلزم أن :

$$|z|\le r\Rightarrow\left|\frac{a_n+z|a_n|}{\left(1-\overline{a_n}z\right)a_n}\right|\le\frac{1+r}{1-r}$$

السلسلة (102) متقاربة لما تتقارب السلسلة :

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)..(104)$$

وهذا محقق بناء على شرط بلاشك المحقق (100). ومنه جداء بلاشك متقارب مطلقا على المتراصات $\{z,|z|\le r\}$ من القرص الوحدة $D(0,1)$. ومنه جداء بلاشك هولومورفي على القرص الوحدة $D(0,1)$. ونكتب : $B\in H(D(0,1))$.

لنلاحظ أنكل عامل من عوامل جداء بلاشك هي تحويل لبلاشك بالفعل لما $\forall z\in D(0,1)$:

$$\left|\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|=\left|\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\right|<1$$

ومنه :

$$w=B(z),\forall z\in D=\{z,|z|<1\}\Rightarrow|w|=|B(z)|<1$$

وبالتالي :

$$|z|<1\Rightarrow|B(z)|<1$$

مما يثبت صحة الخواص المذكورة أعلاه لجداء **بلاشك**.

نظرية.2 (خواص جداءات بلاشك) $\forall z\in D(0,1)$ فان :

$$\frac{B'(z)}{B(z)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{\left(1-\overline{a_n}z\right)(a_n-z)}..(105)$$

$$B'(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(z)}{a_n-z}\frac{1-|a_n|^2}{\left(1-\overline{a_n}z\right)}..(106)$$

$$|B'(z)|\le|B(z)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n-z|}\frac{1-|a_n|^2}{\left|1-\overline{a_n}z\right|}..(107)$$

بوضع :

$$B_n(z)=\frac{B(z)}{b_n(z)}$$

بحيث

$$b_n(z)=\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}$$

جداء لامنته لبلاشك فان $\forall z\in D(0,1)$:

$$B'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(z)B_n(z)\ldots\ldots(108)$$

$$|B'(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{\left|1-\overline{a_n}z\right|^2}|B_n(z)|\ldots\ldots(109)$$

$$\frac{1-|B(z)|^2}{2\left(1-|z|^2\right)}\le\frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2}\le 2\frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2}\ldots\ldots(110)$$

بملاحظة أن :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-e^{i\theta}\right|d\theta=0\ldots\ldots(111)$$

فان :

$$Lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta=0\ldots\ldots(112)$$

مثال 1. : يمكن اعتبار جداء **بلاشك** $z\mapsto B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}$ بمعنى الصفر ليس بجذر له.وهو يحقق $\forall\theta\in[-\pi\quad\pi]$:

$$\left|B\left(e^{i\theta}\right)\right|=1\ldots\ldots(113)$$

على سبيل المثال بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}<\infty$ فان جداء **بلاشك** :

$$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}}{1-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z}$$

متقارب $\forall z\in D(0,1)$ وهولومورفي على القرص الوحدة $D(0,1)$ ويحقق المحدودية : :

$$|z|<1\Rightarrow|B(z)|=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left|z-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\right|}{\left|1-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right|}<1$$

. $z\in D(0,1)\subset\mathbb{C}$

الدرس العاشر : نظرية التفكيك لفيرشتراس للدوال الصحيحة وخواص الدالة جـامـا Gamma function

9.1. تعريف1. (دوال فيرشتراس)

دوال فيرشتراس معرفة على القرص الوحده $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ من $\mathbb{C}$ من الشكل :

$$E_0(z)=1-z$$

$$E_p(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots\frac{z^p}{p}\right)\ldots\ldots(114)$$

وهي تحقق الميزة الهامه الآتيه $\forall p=0,1,2,3\ldots.$:

$$\left|1-E_p(z)\right|\le|z|^{p+1}\ldots\ldots(115)$$

. $\forall z\in D(0,1)=\{z,|z|<1\}$

البرهان : لدينا $\forall p = 1,2,3....$

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ...\frac{z^p}{p}\right)......................................(116)$$

الدوال المشتقة $-E_p'(z)$ تقبل الصفر كجذر للرتبة p فنشور سلسلة قوى لها ذات معاملات سالبه حقيقيه ومنه :

$$1 - E_p(z) = -\int_0^z E_p'(w)dw$$

$1 - E_p(z)$ تقبل $z = 0$ كصفر للرتبة $p+1$ ومنه لما :

$$\varphi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}}, \qquad |z| \le 1$$

لننشر $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ بحيث $a_n \ge 0, n = 0,1,2....$ حسب نظرية سلاسل القوى :

$$|\varphi(z)| \le \varphi(1), \quad \text{لما} \quad |z| \le 1$$

$$\Rightarrow |1 - E_p(z)| \le |z|^{p+1}$$

مما يثبت صحة الخاصية (115).

نظرية.1(نظرية فيرشتراس) $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n \ne 0, n = 0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$

لنعتبر $\{p_n\}_{n=0,1,2.......}$متتالية أعداد طبيعية غير سالبة بحيث : لكل $r > 0$ توجد متتالية $\{r_n\}_{n=0,1,2.......}$ من الأعداد الموجبة (مثلا $\{|z_n|\}_{n=0,1,2.......}$) بحيث شرط فيرشتراس محقق وهو :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty...(117)$$

فان مفكوك **فيرشتراس**

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)..(118)$$

هو دالة صحيحة ولها اصفار المجموعه $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ من $\mathbb{C}$ ولا يقبل أي أصفار أخرى غير ذلك من $\mathbb{C}$.في حالة تكرارية الجذر α , m مرة فان α هو جذر لـ $p(z)$ للرتبة m .

البرهان : نستخدم عادة المتراصات $|z| \le r$ من $\mathbb{C}$ كما حدث في اثبات تقارب جداء **بلاشك** لاثبات تقارب مفكوك **فيرشتراس**. بالفعل :

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \le \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$$

وحيث أن $0 \le \frac{r}{r_n} \le 1$ ومنه السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty$ مما يستلزم تقارب السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|..(119)$$

السلسلة (118) متقاربة مطلقا على كل متراص $|z| \le r$ من $\mathbb{C}$ وبالتالي الجداء اللامنته **لفيرشتراس** $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ متقارب مطلقا على كل متراص $|z| \le r$ من $\mathbb{C}$.

نظرية.2(نظرية فيرشتراس) $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n \ne 0, n = 0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$

لنعتبر $\{p_n\}_{n=0,1,2.......}$متتالية أعداد طبيعية غير سالبة و f دالة صحيحه بحث $f(0) \ne 0$ و $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ اصفار لـ f توجد دالة صحيحة g بحيث :

$$f(z)=\exp(g(z)).\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)............................(120)$$

البرهان : بالفعل $\forall z\in\mathbb{C}$ فان

$$\frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)}\neq 0$$

ومنه f توجد دالة صحيحة g بحيث $\forall z\in\mathbb{C}$:

$$\frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)}=\exp(g(z))$$

مما يستلزم :

$$f(z)=\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

مما يؤكد صحة الدستور (120).

نظرية.3(صيغتا فيرشتراس) $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n\neq 0, n=0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n|\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ و

$$|z_1|<|z_2|<|z_3|<|z_4|<...<|z_n|..........$$

لنعتبر f دالة صحيحة والتي أصفارها البسيطة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ فان :

$$f(z)=f(0)\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)...................................(121)$$

بحيث :

$$\kappa=\frac{f'(0)}{f(0)}$$

لما : $f(0)=1$ فان :

$$f(z)=\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

لنعتبر f دالة صحيحة والتي أصفاره المكررة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ بتكراريات $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, ... \mu_n..........$ فان :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}+.......+\frac{1}{m-1}\frac{z^{m-1}}{z_n^{m-1}}\right)\right]^{\mu_n}.....................................(122)$$

بحيث أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^m}<\infty...(123)$$

في حالة :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^3}<\infty...(124)$$

فان صيغة فيرشتراس تصبح من الشكل :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}\right)\right]^{\mu_n}...................................(122)$$

9.2. الدالة جاما Fonction Gamma

تعريف.2 من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ نعرف الدالة جاما كما يلي

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

وهي فورا حقق الخواص الأساسيه الآتية $\{z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ $\forall z \in$:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $\Gamma(0) = \Gamma(1) = 1$

البرهان :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt = -\lim_{t\to\infty} t^z e^{-t} + z\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = z\Gamma(z)$$

نتيجة 1. من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ و $\Gamma(z+2) = (z+1)z\Gamma(z)$

2. $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)(z+n-2).......(z+1)z\Gamma(z)$

نظرية 5. أصفارالدالة $\Gamma(z)$ بسيطة وهي : $0,-1,-2,-3,......-n,......$ تحقق الشروط اعلاه وصيغة فيرشتراس لها :

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)....................................(125)$$

مما يستلزم ان :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)....................................(126)$$

من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. بحيث :

$$\Gamma'(0) = \gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log n.........................(127)$$

يسمى ثابت **أويلر**.

البرهان : لدينا من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)(z+n-2).......(z+1)z\Gamma(z)$$

يستلزم :

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = (z+n)(z+n-1)(z+n-2).......(z+1)\frac{1}{\Gamma(z+n+1)}$$

ومنه جذور $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ هي بالضبط $0,-1,-2,-3,......-n,......$ وهي تحقق شروط التباعد **لفيرشتراس**.

نطبق نظرية **فيرشتراس** لدينا :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(z+1)}$$

لحساب $\Gamma'(0)$ نستخدم الدستور (125) باعتبار $z = 1$ بالفعل :

$$\frac{1}{\Gamma(2)} = 1 = \exp(\gamma)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\exp\left(-\frac{1}{n}\right)$$

لوغاريتم الطرفين يستلزم أن : $\Gamma'(0) = \gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log n$.وهذا يؤكد صحة الدستورين (125) ، (126).

نظرية 6.

$$\Gamma(m)=2\int_0^{\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}dx......................................(128)$$

من اجل: $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$ لدينا :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}...(129)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}...(130)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}...(131)$$

البرهان : نضع $t=x^2$ فان :

$\Gamma(m)=\int_0^{\infty}t^{m-1}e^{-t}dt=2\int_0^{\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}dx$ من أجل $\mathrm{Re}\,m>0\}$.

لاثبات العلاقة (129) لدينا :

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=4\int_0^{\infty}x^{2m-1}e^{-x^2}dx\int_0^{\infty}y^{-2m+1}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^{2m-1}y^{-2m+1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

نستخد الاحداثيات القطبيه : $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, dxdxy=rdrd\theta$

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(\tan g\theta)^{-2m+1}re^{-r^2}drd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan g\theta)^{-2m+1}d\vartheta=\frac{\pi}{\sin m\pi}$$

من أجل $\mathrm{Re}\,m>0\}$.

نتحول الى العلاقة (130) :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\pi$$

بطريقة ثانية :

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}re^{-r^2}drd\theta=\pi$$

نتحول الى العلاقة (131) لدينا :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

مما يستلزم أن : $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}.$.

نظرية 7.

$$\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m.}}...(132)$$

$$\prod_{k=1}^{2m}\Gamma\left(\frac{k}{2m+1}\right)=\frac{(2\pi)^m}{\sqrt{2m+1.}}...(133)$$

البرهان : لدينا

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin m\pi}$$

لنعتبر الجداء المساعد **الجـــامي** :

$$\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)=\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

ومنه :

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)^2=\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}\ldots\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{(m-1)\pi}{m}}$$

مما يستلزم صحة المساواة :

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}.}$$

نظرية 8. من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re} z>0\}$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(134)$$

ومنه

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(135)$$

وأيضا :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)=2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(136)$$

ومنه :

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(137)$$

البرهان :

لدينا حسب الدستور (126) :

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$$

باشتقاق الطرفين :

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z}+\gamma.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{z}{n}}-\frac{1}{n}\right)$$

من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re} z>0\}$ مما يستلزم أن المشتق اللوغاريتمي للدالة جاما يكتب على النمط التالي :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{z}\right).+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z+1}\right)++\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{z+3}\right)+\ldots..$$

أو جمعا :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right).$$

من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z > 0\}$. بقية الدساتير يمك استنباطها بسهولة بالغة.

بمكاملة طرفي العبارة الاشتقاقية :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right) = 2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).$$

فان :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = c2^{az+b}\Gamma|2z|$$

باستخدام بعض القيم الشهيرة للدالة جاما عند 0 أو 1 فان :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma|2z|$$

ممكن استخدام المقاربة الشهيرة :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = Lim_{n\to\infty}\frac{(z+1)(z+2).....(z+n)}{n^z n!}$$

مما يستلزم مباشرة أن :

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C} \ \operatorname{Re} z > 0\}$.

الدرس الحادي عشر : الفضاء $H^2(|z|<1)$ لهاردي كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للقياس المساحي على القرص الوحدة و أنوية بيرقمان و المسائل الحديه على $H^2(|z|<1)$.

11.1 تعريف 1. (الفضاء $H^2(|z|<1)$ لـهاردي)

$$H^2(|z|<1) = \left\{f : f \in H(|z|<1), \underset{0\le r<1}{Sup} M_2(f,r) < \infty\right\}..............................(138)$$

بحيث أن :

$$M_2(f,r) = \sqrt{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\right\}}..(139)$$

الفضاء لهاردي $\left(H^2(|z|<1), \|\ \|_{H^2}\right)$ ناظمي بحيث :

$$\|f\|_{H^2} = Lim_{r\to 1^-} M_2(f,r)..(140)$$

$\left(H^2(|z|<1), \langle\ \rangle_{H^2}\right)$ فضاء لهلبرت بالنسبة للجداء السلمي :

$$\langle f,g\rangle_{H^2} = Lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\overline{g\left(re^{i\theta}\right)}d\theta...(141)$$

للأشارة : $f \in \left(H^2(|z|<1), \langle\ \rangle_{H^2}\right)$ فان :

$$Lim_{r\to 1^-} f\left(re^{i\theta}\right) = f\left(e^{i\theta}\right), existe$$

تسمى Limite tangentielle (Limite radiale).

$$\|f\|_{H^2} = Lim_{r\to 1^-}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta} = \|f\|_{L^2}$$

متراجحة كوشي شوارز

فان $f,g \in H^2(|z|<1)$ وتحقق $f.g \in H(|z|<1)$:

$$Lim_{r\to 1^-}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})g(re^{i\theta})d\theta\right|. \le 2\pi\|f\|_{H^2}\|g\|_{H^2} \ldots\ldots(142)$$

نظرية 1.(مساواة بارسفال)

فانه لما $f \in H^2(|z|<1)$ فانه لما $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، $z=re^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \ldots\ldots(143)$$

البرهان :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta \ldots\ldots(144)$$

وحيث أن :

$$f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m} r^m e^{-im\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

وحيث أن :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \delta_{n,m}, n,m = 0,1,2,3,\ldots\ldots$$

بحيث أن $\delta_{n,n}=1, n,=0,1,2,3,\ldots.$ و $\delta_{n,m}=0, n\neq m, n,m=0,1,2,3,\ldots.$. فان : :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

مما يؤكد صحة الدستور (144).

نظرية 2.

فانه لما $f \in H^2(|z|<1)$ فانه لما $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ فان:

$$\|f\|_{H^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2} \ldots\ldots(145)$$

و $Lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}), existe$

وتحقق دستور كوشي :

$$f.(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\xi}\frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi \ldots\ldots(146)$$

Γ_z كانتور مل يحيط بالنقطة z .

وتحقق متباينة كوشي $n=0,1,2,3\ldots\ldots$:

$$|a_n| \le \frac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{r^n} \ldots\ldots(147)$$

وكذلك :

$$\left| f^{n}(0)\right| \le \frac{n!}{r^{n}} \max_{|z|=r}\left| f(z)\right| ....(148)$$

البرهان : لدينا مما سبق ذكره :

$$\| f\|_{H^{2}(|z|<1)} = Lim_{r\to 1^{-}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2} d\theta = Lim_{r\to 1^{-}} \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}\right|^{2} r^{2n}. = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}\right|^{2}$$

وايضا :

$$.f.(z) = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(re^{it}\right)}{re^{it}-z}e^{it}dt \underset{r\to 1^{-}}{\to} .\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{z}}\frac{f^{*}(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

لنكمل اثبات متباينة كوشي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}\right|^{2} r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2} d\theta \le \left(\max_{|z|=r}\left| f(z)\right|.\right)^{2}$$

مما يستلزم :

$$\left|a_{n}\right|^{2} r^{2n} \le \left(\max_{|z|=r}\left| f(z)\right|.\right)^{2} \Rightarrow \left|a_{n}\right| \le \frac{\max_{|z|=r}\left| f(z)\right|}{r^{n}}$$

وايضا :

$$\left|a_{n}\right| \le \frac{\max_{|z|=r}\left| f(z)\right|}{r^{n}} \Rightarrow \left| f^{n}(0)\right| \le \frac{n!}{r^{n}}\max_{|z|=r}\left| f(z)\right|$$

مفهوم المساحة لتحويل مركب

نعتبر التحويل المركب $w = f(z)$ و الدائرة $E = \{|z| = r\}$ المقصود بمساحة التحويل المركب $w = f(z)$ مساحة صور الدوائر $E = \{|z| = r\}$ بواسطة التحويل نفسه $w = f(z)$ وهي لما $w = u + v$:

$$A = \iint_{f(E)} dudv...(149)$$

$$w = f(z) \Rightarrow dudv = \left| f'(x+iy)\right| dxdy$$

ومنه :

$$A = \iint_{E}\left| f'(x+iy)\right| dxdy...(150)$$

وحيث أن : لما $z = re^{i\theta}$ فان $w = f(z) = \mathrm{Re}^{i\phi}$ فان مساحة $C = f(E)$ تعطى بالقانون:

$$A = -\frac{r}{4}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{2} d\theta..(151)$$

البرهان :

نستخدم الاحداثيات القطبيه الصورة :

$$w = f(z) = R(\cos\phi + i\sin\phi)$$

فان الدائرة $E = \{|z| = r\}$ تحول الى $C = f(E)$ مساحته تعطى بالعلاقة :

$$A = \frac{1}{2}\int_{C} R^{2} d\phi = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R^{2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta...(152)$$

بحيث أن : $z = re^{i\theta}$.حسب شروط كوشي ريمان القطبيه :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}$$

ومنه نتحصل على العبارة :

$$A=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}R^2\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta=-\frac{r}{2}\int_{-\pi}^{\pi}R\frac{\partial R}{\partial r}d\theta=-\frac{r}{4}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{\pi}R^2d\theta$$

وحيث أن : لما $z=re^{i\theta}$ فان $w=f(z)=\mathrm{Re}^{i\phi}$ فان مساحة $C=f(E)$ تعطى بالقانون :

$$A=-\frac{r}{4}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta.....................................(153)$$

نظرية 3.

لما $f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ فانه لما $z=re^{i\theta}$ و لما :

$$\pi^{-1}A=\frac{1}{r^2}-\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2r^{2n}...(154)$$

وبالتالي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2\leq 1...(155)$$

البرهان : لدينا مما سبق ذكره :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta.=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(re^{i\theta}\right)\overline{f\left(re^{i\theta}\right)}d\theta$$

مما يستلزم صحة المساواة :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{re^{i\theta}}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^ne^{in\theta}\right)\left(\frac{1}{re^{-i\theta}}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}r^ne^{-in\theta}\right)d\theta=2\pi\left(\frac{1}{r^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_n\right|^2r^{2n}\right)$$

ومنه :

$$A=-\frac{r}{4}\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta\right).=-\frac{\pi r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_n\right|^2r^{2n}\right)$$

مما يستلزم :

$$\pi^{-1}A=\frac{1}{r^2}-\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2r^{2n}$$

وهو ما يؤكد صحة الدستور (149).

A عبارة على مقدار مساحي بالفعل :

$$\frac{1}{r^2}\geq\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2r^{2n}$$

ومنه لما $r\to 1^-$ فان :

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2\leq 1$$

11.2 . كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للقياس المساحي على القرص الوحدة وأنوية بيرقمان ومسائل حدية على الفضاء $H^2(|z|<1)$

دستور **قرين** يمكن من الانتقال م التكامل المساحي الى التكامل الطولي بالفعل :

$D=\{z,|z|<1\}$ مترابط ببساطة حافته الكاتور المغلق $C=\{z,|z|=1\}$ فانه لما f و g هولومورفيتان على D :

$$\iint_D f(z)\overline{g'(z)}dxdy=\frac{1}{2i}\int_C f(z)\overline{g(z)}dz.................................(156..a)$$

وخاصية القيم المتوسطة f مستمرة على $\{z,|z-\xi|\leq r\}$ ::

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z-\xi|\le r} f(z)dxdy......................(156..b)$$

الفضاء لهاردي على القرص الوحدة $H^2(|z|<1)$ هو فضاء لهلبرت مزود بالجداء السلمي :

$$\langle f,g\rangle=\iint_D f(z)\overline{g(z)}dxdy...(157)$$

والناظم :

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\iint_D |f(z)|^2 dxdy}.....................................(158)$$

متباينة كوشي شوارز :

$$|\langle f,g\rangle|=\left|\iint_D f(z)\overline{g(z)}dxdy\right|\le\sqrt{\iint_D |f(z)|^2 dxdy}\sqrt{\iint_D |g(z)|^2 dxdy}.........................(159)$$

من الممكن تطبيق الية المعمدة لغرهام شميدت على جملة مستقلة خطيا للحصول على جملة متعامدة من كثيرات الحدود بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على االقرص الوحدة

أي أن : لنعتبر $\varphi_n(z)=\lambda_n z^n+\lambda_{n-1}z^{n-1}+....\lambda_1 z+\lambda_0$ $n=0,1,2,3,....$ فان الجملة $\{\varphi_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ متعامدة على القرص الوحدة.اتحقق لما $n,m=0,1,2,3,....$ و $n\ne m$ فان :

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=\iint_D \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}dxdy=0.......................................(160)$$

وتحقق أيضا لما $n=0,1,2,3,....$:

$$\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle=\iint_D |\varphi_n(z)|^2 dxdy=\|\varphi_n\|^2.....................................(161)$$

الجملة متعامدة من كثيرات الحدود بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على االقرص الوحدة

$\varphi_n(z)=\lambda_n z^n+\lambda_{n-1}z^{n-1}+....\lambda_1 z+\lambda_0$ $n=0,1,2,3,....$ يمكن تحويلها الى جملة متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة $\{F_n(z)\}_{n=0,1,2....}$. بالفعل نضع لما $n=0,1,2,3,....$:

$$F_n(z)=\frac{\varphi_n(z)}{\|\varphi_n(z)\|_0}..(162)$$

اي تحقق لما $n,m=0,1,2,3,....$ و $n\ne m$ فان :

$$\langle F_n,F_m\rangle=\iint_D F_n(z)\overline{F_m(z)}dxdy=0.......................................(163)$$

وتحقق أيضا لما $n=0,1,2,3,....$:

$$\langle F_n,F_n\rangle=\iint_{|z|<1}|F_n(z)|^2 dxdy=1.....................................(164)$$

معامل نشر فورييه لدالة مستمرة $f(z)$ بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسه $\{F_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ لما $n=0,1,2,3,....$ بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface:

$$C_n(f)=\langle f,F_n\rangle=\iint_D f(z)\overline{F_n(z)}dxdy=\|\varphi_n\|^2.....................................(165)$$

فسلسلة فورييه نشور $f(z)$ هي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(f)F_n(z)$$

ويحقق متباينة باسل :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n(f)|^2\le\langle f,f\rangle...(166)$$

تعريف أساسي للمسألة الحدية ونظرية الاسقاط العمودي Etremal problem and orthogonal projection theorem

نظرية الاسقاط العمودي : $(H,\langle,\rangle)$ فضاء لهلبرت و $F\subset H$ مغلق ومحدب فان $a\in F$ فان المسألة الحدية :

$$\sigma = \underset{x\in F}{Min}\|x-a\|$$

تملك حلا وحيدا $b\in F$ يسمى المسقط العمودي للنقطة $a\in F$ وهو يحقق :

$$\sigma = \underset{x\in F}{Min}\|x-a\| = \|b-a\|$$

بمعنى :

$$\forall x\in F \quad \|b-a\|\le\|x-a\|$$

بصفة خاصة المسألة الحدية :

$$\sigma = \underset{x\in F}{Min}\|x\|$$

تملك حلا وحيدا $b\in F$ يسمى المسقط العمودي للنقطة $0\in F$ وهو يحقق :

$$\sigma = \underset{x\in F}{Min}\|x\| = \|b\|$$

بمعنى :

$$\forall x\in F \quad \|b\|\le\|x\|$$

المسألة الحدية الشهيرة على فضاء هلبرت

$$\mu_n = \underset{\alpha_n,\alpha_{n-1},.....\alpha_1,\alpha_0}{Min}\left\{\|f-Q_n\|^2, Q_n=\alpha_nF_n+\alpha_{n-1}F_{n-1}+.....\alpha_1F_1+F_0\right\}.............(167)$$

الحل الحدي Solution extrémale لها هو كثير حدود فورييه Polynôme de Fourrier :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}C_k(f)F_k$$

الذي يحقق لكل $Q_n=\alpha_nF_n+\alpha_{n-1}F_{n-1}+.....\alpha_1F_1+\alpha_0F_0$:

$$\forall\alpha_0,\alpha_1....\alpha_{n-1},\alpha_n\in\mathbb{C}: \quad \|f-S_n\|^2\le\|f-Q_n\|^2$$

أي أن :

$$\mu_n=\|f-P_n\|^2...(168)$$

والقيمة الحدية Valeur extremale تساوي :

$$\mu_n=\|f\|^2+\sum_{k=0}^{n}\left|C_k(f)^2\right|..(169)$$

الجملة $1,z,z^2,z^3,.....z^n....$ تؤلف جملة متعامدة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة .بالفعل نطبق دستور قرين (156) :

$$\iint_{|z|<1}z^n\bar{z}^m dxdy=\frac{1}{2(m+1)i}\int_{|z|=1}z^n\bar{z}^{m+1}dz.=\frac{1}{2(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta=0$$

لما $n,m=0,1,2,3,....$ بحيث $n\neq m$.وهذا ما يؤكد صفة التعامد للجملة $1,z,z^2,z^3,.....z^n....$.ثم ان :

$$\iint_{|z|<1}z^n\bar{z}^n dxdy=\frac{1}{2(n+1)i}\int_{|z|=1}z^n\bar{z}^{n+1}dz.\ \frac{1}{2(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-n)\theta}d\theta=\frac{\pi}{n+1}$$

مما يستلزم أن لما $n=0,1,2,3,....$:

$$F_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n..(170)$$

تؤلف جملة متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة.

معامل نشر فورييه لدالة مستمرة $f(z)$ بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسه بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface

$: n = 0,1,2,3,....$ لما $\{F_n(z)\}_{n=0,1,2....}$

$$C_n(f) = \langle f, F_n \rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{|z|<1} f(z)\bar{z}^n dxdy = Lim_{r\to 1} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \iint_{|z|<r} f(z)\bar{z}^n dxdy ....(171)$$

نطبق القانون (156) فان :

$$C_n(f) = Lim_{r\to 1} \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{|z|=r} f(z) \frac{\bar{z}^{n+1}}{n+1} .dz$$

لحساب معامل نشر فورييه نستخدم دستور كوشي كما يلي :

$$|z|^2 = z\bar{z} = r^2 \Rightarrow \bar{z}^{n+1} = \frac{r^{2n+2}}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow C_n(f) = Lim_{r\to 1} \frac{1}{2(n+1)i} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{|z|=r} f(z) \frac{r^{2n+2}}{z^{n+1}} .dz$$

$$\Rightarrow C_n(f) = Lim_{r\to 1} \frac{\pi r^{2n+2}}{(n+1)!} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} f^{(n)}(0) = \frac{\pi}{(n+1)!} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} f^{(n)}(0)$$

فسلسلة فورييه نشور $f(z)$ هي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} C_n(f) z^n ....(172)$$

ويحقق متباينة باسل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} \left| f^{(n)}(0) \right|^2 \le \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \left| f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^2 \rho d\rho d\theta ....(173)$$

للعلم أن : $z = \rho e^{i\varsigma\theta}$ بحيث $0 \le \rho \le\to 1$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ و $: dxdy = \rho d\rho d\theta$

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| f\left(\rho e^{i\theta}\right) \right|^2 \rho d\rho d\theta ....(174)$$

بما أن : $F_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ $n = 0,1,2,3,....$ تؤلف جملة متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة. نسمي نواة حالة لبيرقمان :

$$K_n(z, z_0) = \sum_{k=0}^{n} F_k(z) \overline{F_k(z_0)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left(z\bar{z}_0\right)^k ....(175)$$

وهي تساوي حسب نظرية كثيرات الحدود المتعامده :

$$K_n(z, z_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left(z\bar{z}_0\right)^k = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \left(z\bar{z}_0\right)^{n+1}}{1 - z\bar{z}_0} ....(176)$$

وعليه :

$$K_n(z_0, z_0) = \sum_{k=0}^{n} |F_k(z_0)|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} (k+1)|z_0|^{2k} = \frac{1}{\pi} \frac{1 - |z_0|^{2n+2}}{1 - |z_0|^2}$$

للأشارة ان :

$$K_n(z, z_0) \underset{n\to\infty}{\to} K(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \overline{F_n(z_0)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(z\bar{z}_0\right)^n$$

وبالتالي :

$$K(z,z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)\overline{F_n(z_0)}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z\overline{z_0})^n=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{z_0})^2}\quad(177)$$

وأيضا :

$$K(z_0,z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}|F_n(z_0)|^2=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|z_0|^{2n}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-|z_0|^2)^2}\quad(178)$$

11.3. المسائل الحدية المشروطة وأنوية بيرقمان Noyaux de Bergman

نظرية 5.

المسألة الحدية يوجد حل $f_0(z)\in L^2$ يحقق :

$$\langle f_0,f_0\rangle\le\langle f,f\rangle,\qquad\forall f\in L^2\qquad f_0(\xi)=f(\xi)=1\quad(179)$$

أي أن :

$$\underset{f\in L^2,\,f(\xi)=1}{Min}\langle f,f\rangle=\langle f_0,f_0\rangle$$

ويحقق :

$$\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}f(z)dxdy=f(\xi)\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}dxdy\quad(180)$$

وأيضا :

$$\iint_{|z|<1}|f_0(z)|^2dxdy=\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}dxdy\quad(181)$$

البرهان : بالفعل المجموعة : $\{f\,/\,f\in L^2,\ f(\xi)=1\}$ محدبة ومغلقة في الفضاء الهلبرتي $(L^2,\langle,\rangle)$ وعليه فالحل موجود ووحيد.

الخاصية (180) مؤكدة.بالفعل لما $g(z)\in L^2$ بحيث $g(\xi)=0$ فان :

$$\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}g(z)dxdy=0$$

وعليه باختيار $g(z)=f(z)-f(\xi)$ فهي تحقق الشروط $g(z)\in L^2$ بحيث $g(\xi)=0$ ومنه :

$$\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}(f(z)-f(\xi))dxdy=0$$

يمكن ملاحظة أن الشرط $f_0(\xi)=1$ يستلزم أن:

$$\iint_{|z|<1}|f_0(z)|^2dxdy=\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}.f_0(z)dxdy=f_0(\xi)\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}.f_0(z)dxdy=\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}.f_0(z)dxdy$$

مما يستلزم أن :

$$\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}f(z)dxdy=f(\xi)\iint_{|z|<1}\overline{f_0(z)}dxdy$$

نظرية 6.

$$\iint_{|z|<1}\overline{K(z,z_0)}f(z)dxdy=f(z_0)\quad(182)$$

ومنه :

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-z\overline{z_0})^2}dz=\overline{f(z_0)}$$

أو :

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{\overline{f(z)}}{(1-\overline{z}z_0)^2}\overline{dz}=f(z_0)$$

النواة الحالة لبيرقمان تحقق أيضا :

$$\iint_{|z|<1} |K(z,z_0)|^2 dxdy = K(z_0,z_0) \quad \text{.........}(183)$$

البرهان :

بالفعل أن الشرط $f_0(\xi)=1$ يستلزم أن:

$$K(z,\xi) = \frac{f_0(z)}{\langle f_0, f_0 \rangle} \quad \text{.........}(184)$$

لنستخدم الخاصية (180) :

$$\iint_{|z|<1} \overline{f_0(z)} f(z) dxdy = f(\xi) \iint_{|z|<1} \overline{f_0(z)} dxdy$$

ومنه :

$$\iint_{|z|<1} \overline{K(z,\xi)} f(z) dxdy = f(\xi)$$

يمكن ملاحظة بالفعل أن الشرط $f_0(\xi)=1$ يستلزم أن:

$$f_0(z) = \frac{K(z,\xi)}{K(\xi,\xi)}$$

ومنه فان :

$$\iint_{|z|<1} |K(z,\xi)|^2 dxdy = K(\xi,\xi)$$

مما يثبت صحة العلاقة (183).

نتيجة هامة 1.

المسألة الحدية يوجد حل $f_0(z) \in L^2$ يحقق :

$$\langle f_0, f_0 \rangle \le \langle f, f \rangle, \qquad \forall f \in L^2 \qquad f_0(\xi) = f(\xi) = 1 \quad \text{.........}(185)$$

ويحقق :

$$f_0(z) = \frac{K(z,\xi)}{K(\xi,\xi)} \quad \text{.........}(186)$$

البرهان : واضح.

نتيجة هامة . 2 التأكد من عبارة النواة الحالة لبيرقمان

لنتأكد من عبارة النواة الحالة لبيرقمان عن طريق نشر فورييه لها بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة

$$n = 0,1,2,3,.... \qquad F_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

بالفعل :

$$C_n(K(z,.)) = \iint_{|z|<1} \overline{K(z,\xi)} F_n(z) dxdy = \overline{\iint_{|z|<1} K(z,\xi) \overline{F_n(z)} dxdy} = \overline{F_n(\xi)}$$

وبالتالي عبارة نشر سلسلة فورييه لنواة بيرقمان الحالة هي :

$$K(z,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(\xi)} F_n(z)$$

وأيضا :

$$K(\xi,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}|F_n(\xi)|^2$$

المسائل الحدية المشروطة . Etremal problems with condition

نعتبرفي ما يلي الجملة المتعامدة والمتجانسة $(F_n(z))_{n=0,1,2,3.........}$ بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة .

نظرية 7. المسألة الحدية بشرط واحد :

$$\mu_n=\underset{\alpha_n,\alpha_{n-1},.....\alpha_1,\alpha_0}{Min}\left\{\|Q_n\|^2,Q_n=\alpha_nF_n+\alpha_{n-1}F_{n-1}+.....\alpha_1F_1+F_0,Q_n(\xi)=1\right\}.............(187)$$

الحل الحدي Solution extrémale لها هو كثير حدود فورييه Polynôme de Fourrier :

$$S_n(z)=\frac{K_n(z,\xi)}{K_n(\xi,\xi)}...(188)$$

بحيث أن :

$$K_n(z,\xi)=\sum_{k=0}^{n}F_k(z)\overline{F_k(\xi)}...(189)$$

تسمى كثيرحدود نواة برقمان والقيمة الحدية تساوي :

$$\mu_n=\frac{1}{K_n(\xi,\xi)}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2}....................................(190)$$

البرهان : حسب نظرية و تعريف أساسي للمسألة الحدية.1 فان الحل للمسألة (187) يعطى على شكل كثير حدود فورييه أو مزج خطي :

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kF_k(z)$$

بحيث :

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_kF_k(\xi)=1..(191)$$

ثم ان :

$$\|Q_n\|^2=\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2$$

ومنه :

$$1=\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_kF_k(\xi)\right|^2\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2......................................(192)$$

فالمساواة (190) محققة فقط لما $k=0,1,2,3.........n.$: $\lambda_k=\lambda\overline{F_k(\xi)}$.مما يستلزم أن :

$$\|Q_n\|^2=\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|^2\geq\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2}$$

$$\lambda_k=\lambda\overline{F_k(\xi)},\sum_{k=0}^{n}\lambda_kF_k(\xi)=1\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2$$

ومنه الحل للمسألة الحدية المشروطة (187) هو من الشكل :

$$S_n(z)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\overline{F_k(\xi)}F_k(z)}{\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2}=\frac{K_n(z,\xi)}{K_n(\xi,\xi)}$$

القيمة الحدية يمكن حسابها كما يلي :

$$\mu_n = \|S_n\|^2 = \left\|\frac{K_n}{K_n(\xi,\xi)}\right\|^2 = \frac{1}{K_n^2(\xi,\xi)}\|K_n\|^2$$

بحيث أن :

$$\|K_n\|^2 = \iint_{|z|<1} |K_n(z,\xi)|^2\, dxdy = K_n(\xi,\xi)$$

ومنه :

$$\mu_n = \frac{1}{K_n^2(\xi,\xi)}\|K_n\|^2 = \frac{1}{K_n(\xi,\xi)} = \left(\sum_{k=0}^{n}|F_k(\xi)|^2\right)^{-1}$$

مثال : المسألة الحدية المشروطة عند الصفر بالنسبة لجملة كثيرات الحدود المتعامدة والمتجانسة بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface على القرص الوحدة $(F_n(z))_{n=0,1,2,3.........}$.

أوجد :

$$\mu_n = \underset{\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots..\alpha_1,\alpha_0}{Min}\left\{\|Q_n\|^2, Q_n = \alpha_n F_n + \alpha_{n-1}F_{n-1} + \ldots..\alpha_1 F_1 + F_0, Q_n(0) = \beta\right\}$$

كثير الحدود الحل الحدي Solution extrémale لها هو كثير حدود فورييه Polynôme de Fourrier و القيمة الحدية يمكن حسابهما كما يلي :

$$S_n(z) = \beta\frac{\sum_{k=0}^{n}F_k(z)\overline{F_k(0)}}{\sum_{k=0}^{n}|F_k(0)|^2} = \beta\frac{K_n(z,0)}{K_n(0,0)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(193)$$

$$\mu_n = \frac{\beta}{\sum_{k=0}^{n}|F_k(0)|^2} = \beta\left(\sum_{k=0}^{n}|F_k(0)|^2\right)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(194)$$

نظرية 8. المسألة الحدية بشرط واحد :

$$\mu = \underset{\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots..\alpha_1,\alpha_0}{Min}\left\{\|f\|^2, f \in L^2(|z|<1), f(\xi)=1\right\} \ldots\ldots\ldots..(195)$$

الحل الحدي Solution extrémale لها :

$$S(z) = \frac{K(z,\xi)}{K(\xi,\xi)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(196)$$

بحيث أن :

$$K(z,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)\overline{F_n(\xi)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(197)$$

تسمى الدالة كيرنل النواة برقمان والقيمة الحدية تساوي :

$$\mu = \frac{1}{K(\xi,\xi)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}|F_n(\xi)|^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(198)$$

البرهان :

القيمة الحدية يمكن حسابها كما يلي :

$$\delta = \|S\|^2 = \left\|\frac{K}{K(\xi,\xi)}\right\|^2 = \frac{1}{K^2(\xi,\xi)}\|K\|^2$$

بناء على خواص الدالة كيرنل واة بيرقمان :

$$\|K\|^2 = \iint_{|z|<1} |K(z,\xi)|^2 \, dxdy = K(\xi,\xi) \text{..........................} (199)$$

فان :

$$\delta = \|S\|^2 = \frac{1}{K(\xi,\xi)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(\xi)|^2 \right)^{-1} \text{..............................} (200)$$

نظرية 9. المسألة الحدية بشرطين :

$$\delta = \underset{\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0}{Min} \left\{ \|f\|^2, \ f \in L^2(|z|<1), \ f(\xi)=1, \ f(\eta)=0 \right\} \text{.............} (201)$$

الحل الحدي Solution extrémale لها :

$$S_0(z) = \frac{K_1(z,\xi)}{K_1(\xi,\xi)} \text{..} (202)$$

تسمى الدالة كيرنيل نواة برقمان والقيمة الحدية تساوي :

$$\mu = \frac{1}{K_1(\xi,\xi)} \text{....................................} (203)$$

بحيث الدالة كيرنل انواة بيرقمان الثانية :

$$K_1(z,\xi) = K(z,\xi) - \frac{K(\eta,\xi)}{K(\eta,\eta)} K(z,\eta) \text{..} (204)$$

بحيث $K(\eta,\eta) > 0$.وهي تحقق الشرط الصفري :

$$K_1(\eta,\xi) = K(\eta,\xi) - \frac{K(\eta,\xi)}{K(\eta,\eta)} K(\eta,\eta) = 0 \text{......................................} (205)$$

للعلم أن :

$$\mu^{-1} = K_1(\xi,\xi) = K(\xi,\xi) - \frac{|K(\eta,\xi)|^2}{K(\eta,\eta)} \text{..} (206)$$

البرهان : بحيث الدالة كيرنل انواة بيرقمان الثانية :

$$K_1(z,\xi) = K(z,\xi) - \frac{K(\eta,\xi)}{K(\eta,\eta)} K(z,\eta).$$

تحقق بالفعل الشرط الصفري :

$$K_1(\eta,\xi) = K(\eta,\xi) - \frac{K(\eta,\xi)}{K(\eta,\eta)} K(\eta,\eta) = 0$$

أيضا بناء على الخاصية الأساسية :

$$\iint_{|z|<1} \overline{K(z,\xi)} f(z) dxdy = f(\xi)$$

نستنتج أن النواة الثانية لبيرقمان تحقق نفس الخاصية أعلاه:

$$\iint_{|z|<1} \overline{K_1(z,\xi)} f(z) dxdy = f(\xi)$$

وهذا لما $f(\eta) = 0$. وأيضا نتحقق من أن :

$$K_1(\xi,\xi) = K(\xi,\xi) - \frac{|K(\eta,\xi)|^2}{K(\eta,\eta)} \text{..} (207)$$

11.4. كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للقياس الطولي على الدائرة الوحدة $C = \{|z| = 1\}$ ومسائل حدية على الفضاء L^2

تعريف أساسي 1.

لنعتبر $G_n(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^n$ $n=0,1,2,3,....$ فان الجملة $\{G_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على الدائرة الوحدة $C=\{|z|=1\}$.

البرهان : لما $n,m=0,1,2,3,.............................$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} z^n \overline{z}^m d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_C z^n \overline{z}^m |dz|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta=\delta_{n,m}, ...(208)$$

لنلاحظ أن $n=0,1,2,3.....$:

$$\|G_n\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_C |z|^{2n}|dz|=\frac{1}{2\pi}2\pi 1=1 ....(209)$$

فان الجملة $\{G_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على الدائرة الوحدة.

2. تعريف أساسي

من الممكن تطبيق الية المعمدة لغرهام شميدت على جملة مستقلة خطيا للحصول على جملة متعامدة من كثيرات الحدود بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على االدائرة الوحدة

أي أن : لنعتبر $\varphi_n(z)=\lambda_n z^n+\lambda_{n-1}z^{n-1}+....\lambda_1 z+\lambda_0$ $n=0,1,2,3,....$ و بحيث $\lambda_n>0$ فان الجملة $\{\varphi_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ متعامدة بالنسبة للقياس الطولي Mesure longueur d'arc على الدائرة الوحدة $C=\{|z|=1\}$ تحقق لما $n,m=0,1,2,3,....$ و $n\neq m$ فان لما $z=e^{i\theta}$:

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_C \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}|dz|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}d\theta=0 ....(210)$$

وتحقق أيضا لما $n=0,1,2,3,....$ لما $z=e^{i\theta}$:

$$\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_C |\varphi_n(z)|^2|dz|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(z)|^2 d\theta=\|\varphi_n\|^2 ....(211)$$

الجملة لكثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على االدائرة الوحدة $C=\{z,|z|=1\}$ $\varphi_n(z)=\lambda_n z^n+\lambda_{n-1}z^{n-1}+....\lambda_1 z+\lambda_0$ $n=0,1,2,3,....$ يمكن تحويلها الى جملة متعامدة ومتجانسة بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على الدائرة الوحدة $\{G_n(z)\}_{n=0,1,2....}$. بالفعل نضع لما $z=e^{i\theta}$ و $n=0,1,2,3,....$:

$$G_n(z)=\frac{\varphi_n(z)}{\|\varphi_n(z)\|} ....(212)$$

اي تحقق لما $n,m=0,1,2,3,....$ و $n\neq m$ فانه لما $z=e^{i\theta}$:

$$\langle G_n,G_m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_C G_n(z)\overline{G_m(z)}|dz|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G_n(z)\overline{G_m(z)}d\theta=0 ....(213)$$

وتحقق أيضا لما $n=0,1,2,3,....$ لما $z=e^{i\theta}$:

$$\langle G_n,G_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|G_n(z)|^2 d\theta=1 ....(214)$$

معامل نشر فورييه لدالة مستمرة $f(z)$ بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسه $\{G_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ بالنسبة للقياس الطولي Mesure de la longueur d'arc على الدائرة الوحدة. لنضع $z=e^{i\theta}$ و $n=0,1,2,3,....$:

$$C_n(f)=\langle f,G_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_C f(z)\overline{G_n(z)}|dz|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)\overline{G_n(z)}d\theta ....(215)$$

فسلسلة فورييه نشور $f(z)$ هي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(f) G_n(z)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(216)$$

ويحقق متباينة باسل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(f)|^2 \le \langle f, f\rangle\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(217)$$

بحيث أن لما $z = e^{i\theta}$:

$$\langle f, f\rangle = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_C |f(z)|^2 |dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2 d\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(218)$$

الدوال الناطقة المتعامدة والمتجاسة على المترابط بتكرارية $D = \{0 < \rho = |z| < 1\}$.

أولا وقبل كل شيء نشير الى دسور كوشي على المترابط بتكرارية $D = \{0 < \rho = |z| < \sigma\}$ لدالة تحليلية f هو ما يلي

لما $0 < \rho = |z| < \sigma$ فان :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{0<\rho<|z|<\sigma} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\sigma} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}dw\ldots\ldots\ldots\ldots(219)$$

ودستور قرين :

$$\iint_D f(z)\overline{g'(z)}dxdy = \frac{1}{2i}\int_{|z|=\sigma} f(z)\overline{g(z)}dz - \frac{1}{2i}\int_{|z|=\rho} f(z)\overline{g(z)}dz\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(220)$$

لنفرض أن $\nu = \ldots\ldots\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots.$ $g_\nu(z)$ تحقق التعامد بالنسبة للقياس المساحي :

$$\iint_D \overline{g'_\mu(z)}.g'_\nu(z)dxdy = \delta_{\nu,\mu}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(221)$$

تعريف أساسي .2

لنعتبر $g_\nu(z) = z^\nu$ $\nu = \ldots\ldots\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots.$ فان الجملة $\{g_\nu(z)\}_{\nu=0,1,2\ldots.}$ متعامدة ومتجانسة بمعامل تجنيس يحسب لاحقا على المترابط بتكرارية $D = \{0 < \rho = |z| < 1\}$.

البرهان : دستور قرين يستلزم أن لما $\mu,\nu = \ldots\ldots\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots.$:

$$\frac{1}{2i}\int_{|z|=\sigma} \overline{g_\mu(z)}.g'_\nu(z)dz - \frac{1}{2i}\int_{|z|=\sigma} \overline{g_\mu(z)}.g'_\nu(z)dz\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(222)$$

فان معامل التجنيس :

$$a_{\nu,\mu} = \frac{\nu}{2i}\int_{\partial D} \bar{z}^{\mu}.z^{\nu-1}dz = \frac{\nu}{2i}\int_{|z|=1} \bar{z}^{\mu}.z^{\nu-1}dz - \frac{\nu}{2i}\int_{|z|=\rho} \bar{z}^{\mu}.z^{\nu-1}dz$$

لنلاحظ أن :

$$|z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

وايضا :

$$|z|^2 = \rho \Rightarrow \bar{z} = \frac{\rho}{z}$$

وبالتالي :

$$a_{\nu,\mu} = \frac{\nu}{2i}\int_{|z|=1} z^{\nu-\mu-1}dz - \frac{\nu\rho^{2\mu}}{2i}\int_{|z|=\rho} \bar{z}^{\mu}.z^{\nu-\mu-1}dz$$

بتطبيق نظرية الرواسب فان كلا التكاملين معدوم لما $\mu = \nu$ مما يثبت صحة التعامد و أيضا :

$$\nu = \mu \Rightarrow a_{\nu,\nu} = \pi\nu\left(1-\rho^{2\nu}\right)$$

ومنه تحصلنا على جملة من الدوال الناطقة متعامدة ومتجنسة Orthonormal Rationnal Functions $\{g'_\nu(z)\}_\nu$ على المترابط بتكرارية $D=\{0<\rho=|z|<1\}$ بالنسبة للقياس المساحي Area and Planar mesure بحيث :

$$g_\nu(z)=\frac{z^\nu}{\sqrt{\pi\nu(1-\rho^{2\nu})}}$$

وهذا لما $\nu=.........-3,-2,-1,0,1,2,3,....$.

النواة الحالة لبيرقمان

بما أن الجملة

$$K(z,\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}g'_\nu(z)\overline{g'_\nu(\xi)}..(223)$$

تعطى بالعبارة الشاملة :

$$K(z,\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\nu}{1-\rho^{2\nu}}\left(z\overline{\xi}\right)^{\nu-1}..(224)$$

والقيمة الخاصة :

$$K(\xi,\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\nu}{1-\rho^{2\nu}}|\xi|^{2(\nu-1)}..(224)$$

معامل النشر لفورييه

معامل نشر فورييه لدالة مستمرة $f(z)$ بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسه بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface

$$g_\nu(z)=\frac{z^\nu}{\sqrt{\pi\nu(1-\rho^{2\nu})}}$$

وهذا لما $\nu=.........-3,-2,-1,0,1,2,3,....$.يساوي أيضا معامل نشر فورييه لدالة مستمرة $f'(z)$ بالنسبة للجملة المتعامدة والمتجانسه بالنسبة للقياس المساحي Mesure de surface $\{g'_\nu(z)\}_\nu$ فهو يساوي :

:

$$C_\nu(f)=\langle f',g'_\nu\rangle=\iint_D f'(z)\overline{g'_\nu(z)}dxdy..................................(225)$$

حسب دستور قرين :

$$C_\nu(f)=\frac{1}{2i}\int_{\partial D}f'(z)\overline{g_\nu(z)}.dz.................................(226)$$

ويحقق :

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu(f)g_\nu(z)$$

ويساوي بالطبع :

$$C_\nu(f)=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}f'(z)\overline{g_\nu(z)}.dz-\frac{1}{2i}\int_{|z|=\rho}f'(z)\overline{g_\nu(z)}.dz..................(227)$$

اعمال موجهة قصيرة

التمرين الأول

التحويل المركب $f(z)=2z+\dfrac{1}{2z}+1+i$ أوجد نطاق الهولومورفية ثم أثبت هولومورفية $f(z)$ أحسب المشتقة الأولى لها .

ليكن المستطيل المملوء : $D=\{z/1\le \operatorname{Re} z\le 2,2\le \operatorname{Im} z\le 3\}$.أثبت أن $f(z)$ محدودة على D أي :

$$\forall z\in D:\exists M>0,|f(z)|\le M$$

تأكد أن القيمة العظمى تنتمي فعلا الى الحافة (المستطيل D).
أثبت أن :

$$\iint_{|z|<1}\left|\frac{z}{1-z^2}\right|dxdy < 4.$$

التمرين الثاني

أثبت أن معادلة الدوائر : $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ تكتب على شكلها القطبي لما $z=x+iy$ التالي : $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+b=0$

يطلب التعبير عن a و b بدلالة A و B و C. استنتج من ذلك أن صور الدوائر السابقة بواسطة التحويل $w=f(z)=\dfrac{\lambda}{z}$ هي دوائر أيضا حدد العناصر المميزة لها.

بين أن صور الدوائر المارة بالصفر : $x^2+y^2+Ax+By=0$ بواسطة التحويل $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$ هي مستقيمات حددها.

التمرين الثالث

نعتبر القطع الناقص Ω الذي معادلته في المستوي المركب (أي المعادلة القطبية) $|z-1|+|z+1|=6$ أثبت أن المعادلة التحليلية لـ Ω من الشكل لما $z=x+iy$ فان

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1.$$

أرســـــــم Ω بعناية واهتمام مع تحديد العناصر المميزة . طبق دستور **Green** لحساب التكامل المساحي :

$$\iint_{\Omega}\left(3x^2-2y\right)dxdy.$$

D المترابط ببساطة الذي حافته C كانتور مغلق نفرض أن $f(z)$ هولومورفية على D كيف تثبت أن:

$$\oint_C f(z)dz=0$$

التمرين الرابع

صور المستقيمات الشاقولية $C=\{z,\operatorname{Re}z=c\}$ بواسطة التحويل $w=f(z)=z^2$ هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها.

صور المستقيمات الافقية $C=\{z,\operatorname{Im}z=d\}$ بواسطة التحويل $w=g(z)=2z^2+4$ هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها

التمرين الخامس

1. أوجد نشر تايلر للدالة $f(z)=\log(1+z)$ على القرص المفتوح $|z|<1$: استنتج المحدودية :

$$\left|1-\frac{\log(1+z)}{z}\right|\le\frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}.$$

أثبت أن :

$$|z|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}|z|\le|\log(1+z)|\le\frac{3}{2}|z|$$

ماذا تستنتـــــــج بالنسبة للمجموعة الصورة.

2. f دالة تحليليه نشوره بصيغة تايلر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ على القرص $|z|\le r$ وتحقق الخاصية المحدودية :

$$\exists M>0\,,\exists r_0>0\,,r_0\le r\;,|z|\le r_0\Rightarrow|f(z)|\le M$$

كيف تحسب معاملات النشر a_n. أثبت المحدودية الآتية : $|a_n|\le M$ لكل n عدد طبيعي .

3. λ ثابت موجب أثبت أن صور الدوائر $D(0,r)=\{z,|z|=r\}$ بواسطة التحويل $f(z)=\dfrac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{r^2}\right)$ هي دوائر يطلب تحديد المركز ونصف القطر. يمكن إثبات المتراجحة المساعدة الآتية :

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow\left|\frac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\right|=\frac{2\exp(\lambda\operatorname{Re}(z))}{r^2}\operatorname{Re}(z)$$

4 .نعتبـر الدالة $u(x,y)$ المعرفــة بالعبارة الآتية

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2+1}{(x+1)^2+y^2}$$

- أوجد مجال تعريفها مع الرسم.
- أثبث أنها توافقية ثم أوجد المرافقة التوافقية لهـــا $v(x,y)$ بحيث $f=u+iv$ هولومورفية .بحيث $f(1)=\frac{1}{2}$.
- الدوال الهوموغرافية الهولومورفية تتمتع بميزة هامة و التي نريد اثباتها.
- لتكن $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ احدى هذه الدوال أوجد مجال هولومورفيتها.

نسمي المشتقـة لـ **شوارز** derivative **Schwarzian** لـ f هي دالة لـ z التالية :

$$L_f(z)=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

- أثبت الآن مــــا يلي: $g(z)$ دالة هولومورفية فان

$$h=f\circ g\Rightarrow L_h(z)=L_g(z)$$

5 ..أثبت الاستلزام المنطقي **من أجل كل عدد مركب** z **يحقق** $|z|<1$

$$|t|=1\Rightarrow|1-\bar{z}t|=|z-t|$$

طبق دستور **كوشـــــي Cauchy** لإثبات المتباينة التالية

في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f\in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K>0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$(1-|z|^2)|f(z)|\le K$$

و هذا لكل z يحقق $|z|<1$.

استنتج حـــــادا من الأعـــــــلى للكمية الآتية . ما يسمى (Area of $f(.)$).

$$\iint_{|x+iy|<1}|f(x+iy)|^2\,dxdy$$

أعمال موجهة 01

تمرين1. كيف تحسب الراسب الآتــــــي : $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{8z+i}\right)$. نشر تايلر للدالة : $f(z)=\frac{1}{3-z}$ كسلسلة قوى ل $z-4i$.أوجد نصف قطر التقارب.

نعتبر الآن $f(z)=\frac{\sin z}{\cos(z^3)-1}$ ماهو نوع النقطة الشاذة عند الصفر.أحسب الراسب عند الصفــر.أحسب التكامل $\int_C \bar{z}dz$ بحيث $C=\{z,|z-i|=2\}$. فالتكامل $\int_C \bar{z}dz$ بحيث $C=triangle(ABC)$. و $A=i$ ، $B=2+i$ ، $C=2i$. $\int_{ACDB}\bar{z}dz$ بحيث $D=2(1+i)$ للعلم ان :

$$\int_C \bar{z}dz=2i.area(C)$$

تمرين2. أضبط الراسب عند الصفر :

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-i}\right):$$

نعتبر الدالة المركبة : , $f(z)=\frac{1}{z^4+(1-i)z^3-iz^2}$ $f:D\to C$. أوجد النطاق D من C والذي عليه f هولومورفية..أحسب $\int_C f(z)dz$ بحيث $C=\{z,|z|=2\}$. أي الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 2 . طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب. في حالة $C=\{z:|z-i|=2\}$.اثبت أن :

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-\bar{a}z|^2}|dz|=2\pi(1-|a|^2)^{-1}.$$

تمرين3 .أثبت أن معاملات النشر الآتــي : $\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$ تحقق العلاقة التراجعية : $C_n=C_{n-1}+C_{n-2}$ أحسب الحدود الأولى.

أوجد نشري لـــــــوران الممكنين للدالة : $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$ مع تحديد دائرتي التقارب .

نفس السؤال : $f(z)=\frac{z^2}{z^2-3z+2}$ يطلب ايجاد نشري لـــــــوران الممكنين على المنطقتين : $2<|z|<1$ و $2<|z-3|<1$.

تمرين4. كيف تحسب ζ : $\zeta=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^3(\pi-z)^2}$.أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجــمـوع سلسلة متقاربة ثـــم أحسب التكـــــــــــامل العقدي $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|<2\pi}\frac{\cos z}{z^2(z+i\pi)^3}dt$. أثبت بصراحـــــة أن $\left|\int_C\frac{\exp(z)}{1+z^2}dz\right|\leq\frac{e^2}{3}.4\pi$ بحيث C هــي الدائرة $|z|=2$ في الاتجاه الموجب

نعتبــر التكامل العددي الحقيقي $I_n(a)=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a+\cos\theta}d\theta$.بحيث n عدد طبيعي و a حقيقي يحقق $a>1$.وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها. نبين طبيعة كل قطب من الأقطاب الثلاثة للدالة المركبة تحت التكامل و انتمائه للــدائرة السابقة المتحصل عليها ثم استنتج قيمــــــــــة $I_n(a)$ ..

تمرين 5. طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب بحيث $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب : $\int_{\Gamma}\frac{z^2}{(z^3+i)^2(iz^3-8)^3}dz$

بحيث الجذر التكعيبي يحسب حسب الفرع الذي من أجـــــله $\sqrt[3]{-1}=-1$. يطلب التأكد من الانتماء و التكرارية لكل قطب.

أعمال موجهة 02

تمرين1.نشر تايلر للدالة : $f(z)=\frac{1}{3-z}$ كسلسلة قوى ل $z-4i$.أوجد نصف قطر التقارب.نعتبر الآن $f(z)=\frac{\sin z}{\cos(z^3)-1}$

ماهو نوع النقطة الشاذة عند الصفــر.أحسب الراسب عند الصفر.

تمرين2.نعتبر الدالة المركبة : , $f(z)=\frac{1}{z^4+(1-i)z^3-iz^2}$ $f:D\to C$.أوجد النطاق D من C والذي عليه f هولومورفية..أحسب $\int_C f(z)dz$ بحيث $C=\{z,|z|=2\}$. أي الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 2 . طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب. في حالة $C=\{z:|z-i|=2\}$.

تمرين3 .أثبت أن معاملات النشر الآتــي : $\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ تحقق العلاقة التراجعية : $C_n=C_{n-1}+C_{n-2}$ أحسب الحدود الأولى.

أوجد نشري لـــــــوران الممكنين للدالة : $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}$ مع تحديد دائرتي التقارب .

نفس السؤال : $f(z)=\frac{z^2}{z^2-3z+2}$ يطلب ايجاد نشري لـــــــوران الممكنين على المنطقتين : $2>|z|>1$ و $2>|z-3|>1$.

تمرين4.ثـــم أحسب التكـــــــــامل العقدي $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|<2\pi}\frac{\cos z}{z^2(z+i\pi)^3}dt$. أثبت بصراحــــة أن $\left|\int_C\frac{\exp(z)}{1+z^2}dz\right|\le\frac{e^2}{3}.4\pi$ بحيث C هــي الدائرة $|z|=2$ في الاتجاه الموجب .

نعتبــر التكامل العددي الحقيقي $\mathrm{I}_n(a)=\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{a+\cos\theta}d\theta$.بحيث n عدد طبيعي و a حقيقي يحقق $a>1$.وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها. نبين طبيعة كل قطب من الأقطاب الثلاثة للدالة المركبة تحت التكامل و انتمائه للـــدائرة السابقة المتحصل عليها ثم استنتج بشكل مفصـــل قيمــــــــة $\mathrm{I}_n(a)$.

تمرين 5. كيف تحسب ζ : $\zeta=\operatorname{Res}_{z=0}\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^3(\pi-z)^2}$.أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجـــموع سلسلة متقاربة .مـــــاهي .

أثبت أن كل جذور المعادلـــــــــة ذات المتغير المركب : $1+z+z^2+...z^{n-1}-nz^n=0$ تقع داخل القرص الوحدة : $D(0,1)=\{z,|z|\le1\}$.

تمرين 6 . طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب بحيث $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب : $\int_{\Gamma}\frac{z^2}{(z^3+i)^2(iz^3-8)^3}dz$

بحيث الجذر التكعيبي يحسب حسب الفرع الذي من أجـــــله $\sqrt[3]{-1}=-1$. يطلب التأكد من الانتماء و التكرارية لكل قطب.
كيف تحسب الراسب الآتـــــي :

$$\operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{8z+i}\right).$$

تمرين 7 . في حالة كانتور مغلق متحرك (mobile contour) $\Gamma_\varepsilon=\{z:|z-i|=\varepsilon\}$

أحسب التكامل المركب : $\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{(z+1)^3(z^6+1)^2}dz$

لحساب الجذر التكعيبي نعتبر الفرع الذي من أجله $\sqrt[3]{-1}=-1$. ماهي قيمة ε الواجب تحقيقها.

أضبط الراسب عند الصفر الآتي: $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-i}\right)$. في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=1\}$. أحسب التكامل المركب الآتـــــــي: :

$\int_\Gamma\frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2}dz$. استغلالا للوقت اتبـــع النصيحة الآتية : أوجد أولا الثوابت a,b,c,d,e,f بحيث :

$$\frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z-1}+\frac{cz+d}{z^2+1}+\frac{ez+f}{(z^2+1)^2}$$.يجب ضبط الأقطاب الأربعة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

تمرين 8 .نفرض أن $f_n(z)=\prod_{k=1}^{k=n}(z-a_k)$ والتي جذورها الثوابت المركبة $a_k,k=1,2,3....n$. أثبت الحقيـقة الآتية : كيف يتم اشاء الكانتور $\Gamma_R=\{z:|z|=R\}$.بحيث

$$\int_{\Gamma_R}\frac{1}{f_n(z)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}.$$

في حالة :

$$,\ f_n(z)=\prod_{k=1}^{k=n}(z-a_k)\neq 0,(n>2.)$$

من أجل $|z|\geq R$.فان :

$$\int_{\Gamma_R}\frac{1}{f_n(z)}dz=0.$$

استنتج بالتالي :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{j\neq k}(a_k-a_j)}=0$$

أعط أمثلة ملموسة.

تمرين 9 . Γ هو منحنى كانتور مغلق بسيط و z_0 تقع داخل Γ أثبت الحقيـقة الآتية : f تحليلية على Γ عندئذ

$$\frac{\int_\Gamma\frac{f^{(m)}(z)}{(z-z_0)^n}dz}{\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}dz}=\frac{(m-n+1)!}{(n-1)!}$$

تمرين 10 نفرض أن f نشورة وفق سلسلة قوى عند الصفر Entire function وتحقق ما يلي : $|f(z)|\leq\ln(|z|+1)$ لكل z عدد مركب

أثبت الحقيـقة الآتية : f ثـــابته.

تمارين ومسائل للمراجعة والتكوين المستمـر

المراجعـة.1

التمريـن الأول . كيف تحسب ζ

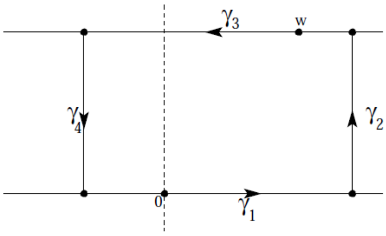
- $$\zeta = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^3(\pi - z)^2}$$

- أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجـمـوع سلسلة متقاربة .مـــاهي. .
- أثبت أن كل جذور المعادلــــــــة ذات المتغير المركب

$$1 + z + z^2 + \dots z^{n-1} - nz^n = 0$$

تقع داخل القرص الوحدة أي $D(0,1) = \{z, |z| \le 1\}$.

التمرين الثاني .الكــــانتور Ω الذي رؤوســـــــــه $(-a,0)$ و $(a,0)$ و (a,b) و $(-a,b)$ و مساراته الأربعة هي على الترتيب γ_1 من $(-a,0)$ نحو $(a,0)$ و γ_2 من $(a,0)$ نحو (a,b) و γ_3 من (a,b) نحو $(-a,b)$ و γ_4 من $(-a,b)$ نحو $(-a,0)$.



- أثبت أن

$$\lim_{a\to\infty} \int_\Omega \exp(-z^2) dz = 0.$$

- أحسب التكاملات الأربعة

$$\int_{\gamma_4} \exp(-z^2) dz \text{ و } \int_{\gamma_3} \exp(-z^2) dz \text{ و } \int_{\gamma_2} \exp(-z^2) dz \text{ و } \int_{\gamma_1} \exp(-z^2) dz$$

- استنتج أن

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_2} \exp(-z^2) dz = \lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_4} \exp(-z^2) dz = 0.$$

- استنتج حسابا للتكاملات من نوع **Poisson** أو **Fresnel** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos(bx)dx \text{ و } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\sin(bx)dx$$

التمرين الثالث .نعتبـــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r > 1$.

- طبق نظرية الرواسب لحساب $\Xi(z)$ بدلالة z بحيث :

$$\Xi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega \frac{t^3 - z^3}{(t-z)(t^3-1)} \exp\left(-\sqrt[3]{t}\right) dt$$

- هل هـي هولومورفية على Ω؟ لمــــــــاذا ؟

2 .المراجعـة

التمريـن الأول

1.أوجد نشر تايلر للدالة $f(z) = \log(1+z)$ على القرص المفتوح $|z| < 1$: استنتج المحدودية :

$$\left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| \le \frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}.$$

أثبت أن : $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}|z| \le |\log(1+z)| \le \frac{3}{2}|z|$ ماذا تستنتـــــج بالنسبة للمجموعة الصورة.

2. f دالة تحليليه نشوره بصيغة تايلر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ على القرص $|z| \le r$ وتحقق الخاصية المحدودية :

$$\exists M>0,\exists r_0>0, r_0\le r\ ,|z|\le r_0 \Rightarrow |f(z)|\le M$$

كيف تحسب معاملات النشر a_n .أثبت المحدودية الآتية : $|a_n|\le M$ لكل n عدد طبيعي .

3. λ ثابت موجب أثبت أن صور الدوائر $D(0,r)=\{z,|z|=r\}$ بواسطة التحويل $f(z)=\dfrac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\dfrac{z^2}{r^2}\right)$ هي دوائر يطلب تحديد المركز ونصف القطر. يمكن إثبات المتراجحة المساعدة الآتية :

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow\left|\frac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\right|=\frac{2\exp(\lambda\operatorname{Re}(z))}{r^2}\operatorname{Re}(z)$$

التمريـن الثاني.

1.طبق نظرية **ميثاق لوفـــلر** لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2}\quad \text{مستنتجــــــا المجموع :}\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=??$$

نفس السؤال :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2}\quad \text{مستنتجــــــا المجموع :}\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{4}-n^2}=??$$

2.كيف تحسب التكامل المركب : $\Gamma(f,\Omega)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Omega z^3\frac{f'(z)}{f(z)}dz$. في حالة : $f(z)=z^5-2z^4+z^3-3z^2+2$

أحسب$\Gamma(f,\Omega)$.ماهي الدائرة Ω المناسبة للحل كيف تم تحديدها. أعــد حساب $\Gamma(f,\Omega)$ في الحالة الآتيــة : $f(z)=z(z^4-1)$.

التمريـن الثالث

ليكن التابع $f_n(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Omega\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{n+1}}dz$ بحيث الدائرة Ω مركزها 0 ونصف قطرها 1.أثبت أن :

$$f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta$$

*يمكن استخدام المتطابقة : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta=0$ وهي سهلة الأثبات بتعويض θ ب $2\pi-\theta$ نتحصل على – التكامل.

ماذا تمثل الكمية : $f_n(\lambda)$ بالنسبة للدالة الهولومورفية : $g(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.علل أكثر فأكثر.

المـــــــراجعة . 3

التمريـن الأول

1. نعتبــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 . أحسب التكـــــامل المركب $H(t)$ ، t عدد مركب:

$$H(t)=\int_\Omega\frac{z\exp(zt)}{\left(z^2-3z+2\right)^2}dz$$

2.هل أن H هولومورفيـــــة , لمـــــاذا ؟ أحسب $H^{(m)}(t)$ ؟ استنتـــــج حسابــــا لـ : $H^{(m)}(1)$ ؟

3. أثبت أن جميع جذور المعادلة $z^5-2z^3+z^2-3z+2=0$ تقع داخل دائرة أو قرص Ω يطلب تحديد مركزه ونصف قطره.

4.كيف تحسب التكامل المركب :

$$\Gamma(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Omega\left(z^2-z+1\right)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وهذا لمــا Ω هي نفس الدائرة المذكورة سابقا. بماذا يسمى هذا القانــون. أحسب بالتالي $\Gamma(f,\Omega)$ في حالة :

$$f(z)=z^5-2z^3+z^2-3z+2$$

التمرين الثاني

1 . نعتبر الدالة المركبـــــة الهولومورفية f على المفتوح U من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ليكن $z_0 \in U$ و $r>0$ باستخدام دستـور كـــوشي بين ما يلي : $f^{(3)}(z_0)=m(r)\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{e^{3it}}dt$. بحيث $m(r)$ ثابت موجب يطلب تحديده.

2. استنتـج المتباينـــة: $\left|f^{(3)}(z_0)\right|\le k(r)\underset{0\le t\le 2\pi}{Sup}\left|f(z_0+re^{it})\right|$. بحيث $k(r)$ ثابت موجب يطلب تحديده.

التمرين الثالث

1.أوجد نشرا لورانيا للدالة : $f(z)=\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)$ كسلسة قوى سالبة لـ $z+1$ أي في جوار $z=-1$ بدلالة $\cos(1)$ و $\sin(1)$.ثم أحسب الراسب كمساعدة $\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)=\cos\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$ وأيضا : $\cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$ و $\sin(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1}$ طالما $u\to 0$.

2. بغض النظر عن التابع $f(z)=\frac{\exp(-mz)}{(z^2-3z+2)^2}$ احسب الرواسب عند الأقطاب لـلعبارة : $f(z)\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ ثم استنتج بكيفية مفصله ومبرهنه الحصول على المجمـوع :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\exp(-mn)}{(n^2-3n+2)^2}.$$

بحيث m عدد صحيح موجب تماما.

3.طبق نظرية ميتــــاق لوفـلر بطريقة مفصله لا ثبات الدستور النشوري الآتــي:

$$\frac{\pi\tan(\pi z)}{\exp(\pi z)}=4z\sum_n\frac{\exp\left(-\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)(2(n-z)+1)}$$

3. أثبت التقارب المطلـق للجداء اللامنته : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ ثم تأكد بأي طريقة ان :

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

4- استنتج قيمة المجموع : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)(z+n)}$ بدلالة z ..

4. المــــــــــراجعه

التمرين الأول .نعتبـر الدالة $u(x,y)$ المعرفـــة بالعبارة الآتية

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2+1}{(x+1)^2+y^2}$$

- أوجد مجال تعريفها مع الرسم.
- أثبث أنها توافقية ثم أوجد المرافقة التوافقية لهـــــا $v(x,y)$ بحيث $f=u+iv$ هولومورفية .بحيث $f(1)=\frac{1}{2}$.
- الدوال الهوموغرافية الهولومورفية تتمتع بميزة هامة و التي نريد اثباتها.
- لتكن $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ احدى هذه الدوال أوجد مجال هولومورفيتها.

نسمي المشتقـة لـ **شوارز** derivative **Schwarzian** لــ f هي دالة لـ z التالية :

$$L_f(z)=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

- أثبت الآن مـــا يلي: $g(z)$ دالة هولومورفية فان

$$h = f \circ g \Rightarrow L_h(z) = L_g(z)$$

- مــــــا تعليقك.

التمرين الثاني . هـام جدا الجـــزئين A وB منفصـلين..

A. نعتبـــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r \succ 0$.طبق دستور كوشي لحساب $\Xi(z)$ بدلالة z بحيث

$$\Xi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{z^n \exp(tz)}{n!t^n}\frac{dt}{t}$$

- مستنتجــــا المتطابقـــة الهـــــــامة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(2z\cos\theta)d\theta$$

B.طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب.في حالة $\Gamma = \{z : |z-i| = 2\}$.أحسب التكامل المركب

$$\int_{\Gamma}\frac{z^2}{(z^3+i)^2(iz^3-8)^3}dz$$

بحيث الجذر التكعيبي يحسب حسب الفرع الذي من أجـــــــله . $\sqrt[3]{-1} = -1$. يطلب التأكد من الانتماء و التكرارية لكل قطب.

-كيف تحسب الراسب الآتـــــــــي

$$\operatorname*{Re\,s}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{8z+i}\right)$$

ثم احسب الراسب :

$$\operatorname*{Re\,s}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{z^2(8z+i)}\right)$$

5. المراجعــة

التمرين الأول.أثبت الاستلزام المنطـقي **من أجل كل عدد مركب** z **يحقق** $|z| < 1$

$$|t| = 1 \Rightarrow |1-\bar{z}t| = |z-t| \Rightarrow \left|\frac{t-z}{1-\bar{z}t}\right| = 1$$

طبق دستور **كوشـــــي Cauchy** لإثبات المتباينة التالية :

في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K > 0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$\left(1-|z|^2\right)|f(z)| \le K$$

و هذا لكل z يحقق $|z| < 1$.

استنتج حـــــادا من الأعـــــــــلى للكمية الآتية . ما يسمى (Area of $f(.)$).

$$\iint_{|x+iy|\prec 1}|f(x+iy)|^2 dxdy$$

كمثال تطبيقـــي نموذجي أثبت المتباينة

$$\iint_{|z|\prec 1}\left|\frac{z}{1-z^2}\right|dxdy < 4.$$

التمرين الثاني. الجـــــزئين أ و ب منفصلين.

الجزء أ.نعتبر القطع الناقص Ω الذي معادلته في المستوي المركب (أي **المعادلة القطبية**)

$$|z-1|+|z+1|=6$$

أثبت أن المعادلة التحليلية لـ Ω من الشكل لما $z=x+iy$ فان :

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

أرســــــم Ω بعناية واهتمام مع تحديد العناصر المميزة .طبق دستور **غرين Green** لحساب التكامل المساحي :

$$\iint_{\Omega}\left(4x^3-3y^2\right)dxdy$$

نعتبر القطع الناقص Ω' الموسع الذي معادلته في المستوي المركب (أي **المعادلة القطبية**) $|z-1|+|z+1|=16$

طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب

$$\int_{\Omega'}\frac{z^{66}}{\exp(2iz)-3\exp(iz)+2}dz$$

الجزء ب..في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب

$$\int_{\Gamma}\frac{z^{66}}{\left(z^2+i\right)^2\left(z^3-1\right)^3}dz$$

يجب ضبط الأقطاب الخمســة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

المراجعـــــــة 06

التمريـن الأول

1 . نعتبر الدالة المركبـــــة : $f(z)=\left(1-z^3\right)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ باستخدام نشــــور لـوران كيف تحسب λ :

$$\lambda=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

2. نعتبـــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 أحسب التكـــــامل المركب :

$$.\int_{\Omega}\frac{z+1}{\left(z^2+4z+3\right)^2}\exp\left(iz^2\right)dz$$

التمريـن الثاني

1. أثبت أن : $\left|\exp\left(z^3+i\right)+\exp\left(-iz^2\right)\right|\le\exp\left(x^3-3xy^2\right)+\exp(2xy)$ مـــــــن أجـل كل $z=x+iy$.

2. لتكـن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ هولومورفية من أجـــل $z=x+iy$ عدد مركب تحقق الشرط :
$v(x,y)\ge x$:
لكل (x,y) أثبت أن الدالــــة$g(z)=\exp(z+if(z))$ هولومورفية وتحقق $|g(z)|\le 1$ مـــــــن أجـل كل z عدد مركب.

3.نفرض أن $f(0)=1$ استنتــــج من السؤالين السابقيـن أن $f(z)=iz+1$ مـــــــن أجـل كل z عدد مركب.

4. نفرض أن $f(\alpha)=\beta$ استنتــــج عبارة $f(z)$ مـــــــن أجـل كل z عدد مركب.

التمريـن الثالث

1.طبق نظرية **ميتـــــــاق لوفـــلر** لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

2. أثبت أن :

$$-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2=-\frac{1}{z^2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

3. باستخدام السؤال الثـــــاني أستنتـــج من جديد الدستـور :الســـــــابق (الأول)

أي أن.

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

3. أثبت التقارب المطلق للجداء اللامنته :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

ثم تأكد انه يساوي : $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ أي أن :

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

استنتج حسابا للجداء اللامنتـــــــــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.