Université Echahid Hamma Lakhdar Eloued
Faculté des sciences exactes
Departement des mathématiques

Niveau: 1 Master Maths (2021/2022)
Module: Analyse numérique (S1)

Série 1 (Généralités sur l'EDP)

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est définie positive.
2. Trouver les valeurs propres de A, quel est le résultat ?
3. Montrer que A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.
4. Est ce que A est monotone ?

Exercice 2. Déterminer pour chaque EDP (la linéarité, homogénéité, l'ordre).
(a, c, μ sont des constants strictement positifs)
1. Equation de la chaleur: $u_t = a\nabla^2 u$ où $\left(\nabla^2 u \equiv \triangle u,\ u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\right)$
2. Equation de Poisson: $\nabla^2 u = f$
3. Equation de Laplace: $\nabla^2 u = 0$
4. Equation des ondes: $u_{tt} = c^2\nabla^2 u$
5. Equation de Burger: $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$

Exercice 3. Déterminer dans chacun des problème d'EDP, s'il s'agit de conditions initiales ou de conditions frontières, et dans ce dernier cas donner son type (Dirichlet, Neumann ou Robin).
1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sur $]0,1[\times]0,1[$
$u(x,0) = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$
$u(0,y) = g(y)$, $0 \leq y \leq 1$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$
$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $t \geq 0$
$u(x,0) = f(x)$, $x \geq 0$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, $x \geq 0$

Exercice 4. Donner la classe (le type) de chacune des equations suivantes:
1. Equation de Helmholtz: $\triangle u + \lambda u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$.
2. Equation des télégraphistes: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nu\frac{\partial u}{\partial t} + \omega^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x, t \in \mathbb{R}$.
3. Equation: $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$